

2023 年上海市徐汇区中考数学一模试卷

一、选择题（本大题共 6 小题，共 24.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 在 $Rt \triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $AC = 4$ 。下列四个选项，正确的是（ ）

A. $\tan B = \frac{3}{4}$ B. $\cot B = \frac{4}{3}$ C. $\sin B = \frac{4}{5}$ D. $\cos B = \frac{4}{5}$

2. 下列命题中假命题是（ ）

- A. 任意两个等腰直角三角形都相似
- B. 任意两个含 36° 内角的等腰三角形相似
- C. 任意两个等边三角形都相似
- D. 任意两个直角边之比为 $1:2$ 的直角三角形相似

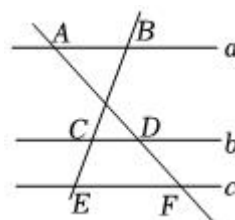
3. 如图， $a \parallel b \parallel c$ ，若 $\frac{AD}{DF} = \frac{3}{2}$ ，则下面结论错误的是（ ）

A. $\frac{AD}{AF} = \frac{3}{5}$

B. $\frac{BC}{CE} = \frac{3}{2}$

C. $\frac{AB}{EF} = \frac{2}{3}$

D. $\frac{BC}{BE} = \frac{3}{5}$



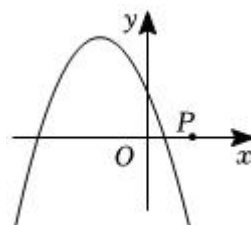
4. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示，点 P 在 x 轴的正半轴上，且 $OP = 1$ ，下列选项中正确的是（ ）

A. $a > 0$

B. $c < 0$

C. $a + b + c > 0$

D. $b < 0$

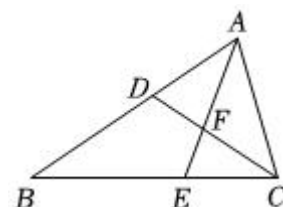


5. 将抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 经过下列平移能得到抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 - 3$ 的是（ ）

A. 向右平移 1 个单位，向下平移 3 个单位 B. 向左平移 1 个单位，向下平移 3 个单位

C. 向右平移 1 个单位，向上平移 3 个单位 D. 向左平移 1 个单位，向上平移 3 个单位

6. 如图，点 D 在 $\triangle ABC$ 边 AB 上， $\angle ACD = \angle B$ ，点 F 是 $\triangle ABC$ 的角平分线 AE 与 CD 的交点，且 $AF = 2EF$ ，则下列选



项中不正确的是()

A. $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$

B. $\frac{CF}{BE} = \frac{2}{3}$

C. $\frac{DC}{BC} = \frac{2}{3}$

D. $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$

二、填空题 (本大题共 12 小题, 共 48.0 分)

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, 则 $\frac{x-y}{x+y} = \underline{\hspace{1cm}}$.

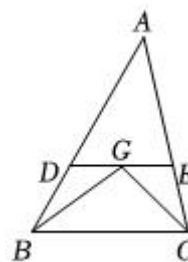
8. 计算: $2(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{1}{3}(3\vec{a} - \vec{b}) = \underline{\hspace{1cm}}$.

9. 两个相似三角形的对应边上的中线之比 4: 5, 则这两个三角形面积之比为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

10. 大自然巧夺天工, 一片树叶也蕴含着“黄金分割”.如图, P 为线段 AB 的黄金分割点 ($AP > PB$); 如果 AB 的长度为 8cm , 那么叶片部分 AP 的长度是 $\underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$.

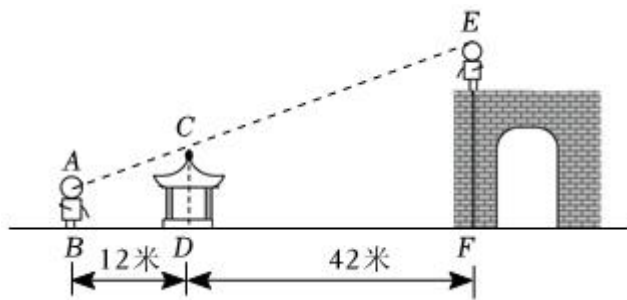


11. 如图, 已知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 作 BC 的平行线交边 AB 和 AC 于点 D 、 E . 设 $\vec{GB} = \vec{a}$, $\vec{GC} = \vec{b}$, 试用 $x\vec{a} + y\vec{b}$ (x 、 y 为实数) 的形式表示向量 $\vec{DE} = \underline{\hspace{1cm}}$.



12. 小明和小杰去公园游玩, 小明给站在观景台边缘的小杰拍照时, 发现他的眼睛、凉亭顶端、小杰的头顶三点恰好一条直线上(如图所示). 已知小明的眼睛离地面的距离 AB 为 1.6 米, 凉亭的高度 CD 为 6.6 米, 小明到凉亭的距离 BD 为 12 米, 凉亭与观景台底部的距离 DF

为 42 米, 小杰身高为 1.8 米. 那么观景台的高度为 ____ 米.

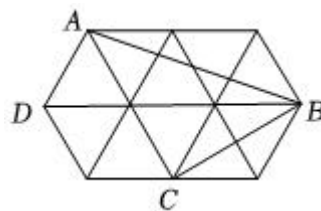


13. 已知点 $A(-3, m)$ 、 $B(-2, n)$ 在抛物线 $y = -x^2 - 2x + 4$ 上, 则 m ____ n (填 “>”、“=” 或 “<”).

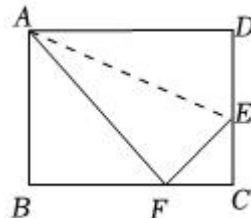
14. 小球沿着坡度为 $i = 1:1.5$ 的坡面滚动了 13m, 则在这期间小球滚动的水平距离是 ____ m.

15. 计算: $\frac{\cos 60^\circ - \sin 60^\circ}{\cot 30^\circ - \tan 45^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}.$

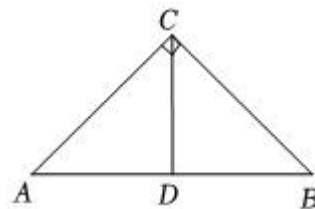
16. 如图, 在由正三角形构成的网格图中, A 、 B 、 C 三点均在格点上, 则 $\sin \angle BAC$ 的值为 ____.



17. 如图, 点 E 是矩形 $ABCD$ 纸片边 CD 上一点, 如果沿着 AE 折叠矩形纸片, 恰好使点 D 落在边 BC 上的点 F 处, 已知 $BF = 6\text{cm}$, $\tan \angle BAF = \frac{3}{4}$, 那么折痕 AE 的长是 ____.



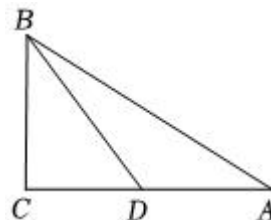
18. 规定: 如果经过三角形一个顶点的直线把这个三角形分成两个小三角形, 其中一个小三角形是等腰三角形, 另一个小三角形和原三角形相似, 那么符合这样条件的三角形称为 “和谐三角形”, 这条直线称为这个三角形的 “和谐分割线”. 例如, 如图所示, 在 $Rt \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CA = CB$, CD 是斜边 AB 上的高, 其中 $\triangle ACD$ 是等腰三角形, 且 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ABC$ 相似, 所以 $\triangle ABC$ 是 “和谐三角形”, 直线 CD 为 $\triangle ABC$ 的 “和谐分割线”. 请依据规定求解问题: 已知 $\triangle DEF$ 是 “和谐三角形”, $\angle D = 42^\circ$, 当直线 EG 是 $\triangle DEF$ 的 “和谐分割线” 时, $\angle F$ 的度数是 ____ . (写出所有符合条件的情况)



三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 78.0 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. (本小题 10.0 分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{5}{13}$. 点 D 为边 AC 上一点, $\angle BDC = 45^\circ$, $AD = 7$, 求 CD 的长.



20. (本小题 10.0 分)

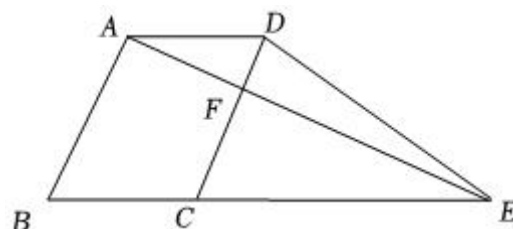
如图, 点 E 在平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 的延长线上, 且 $CE = 2BC$, AE 与 CD 交于点 F .

设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

(1) 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{DE}$;

(2) 求作: 向量 $\overrightarrow{EF}$ 分别在向量 $\overrightarrow{EC}$ 、 $\overrightarrow{ED}$ 方向上的分向量.

(不要求写作法, 但要保留作图痕迹, 并指出所作图中表示结论的分向量)

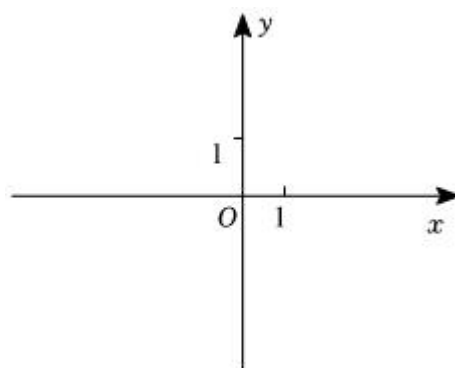


21. (本小题 10.0 分)

已知二次函数 $y = -3x^2 + 6x + 9$.

(1) 用配方法把二次函数 $y = -3x^2 + 6x + 9$ 化为 $y = a(x + m)^2 + k$ 的形式, 并指出这个函数图象的开口方向、对称轴和顶点的坐标;

(2) 如果将该函数图象向右平移 2 个单位, 所得的新函数的图象与 x 轴交于点 A 、 B (点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D , 求四边形 $DACB$ 的面积.



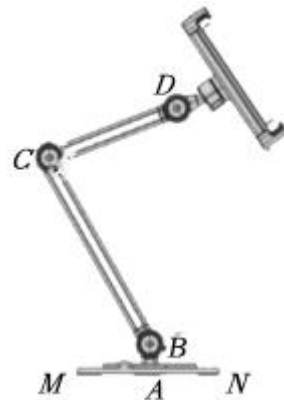
22. (本小题 10.0 分)

如图, 是一个放置于水平桌面的平板支架的示意图, 底座的高 AB 为 5cm , 宽 MN 为 10cm , 点 A 是 MN 的中点, 连杆 BC 、 CD 的长度分别为 18.5cm 和 15cm , $\angle CBA = 150^\circ$, 且连杆 BC 、 CD 与 AB 始终在同一平面内.

(1) 求点 C 到水平桌面的距离;

(2) 产品说明书提示, 若点 D 与 A 的水平距离超过 AN 的长度, 则该支架会倾倒. 现将 $\angle DCB$ 调节为 80° , 此时支架会倾倒吗?

(参考数据: $\tan 20^\circ \approx 0.36$, $\cot 20^\circ \approx 2.75$, $\sin 20^\circ \approx 0.34$, $\cos 20^\circ \approx 0.94$)

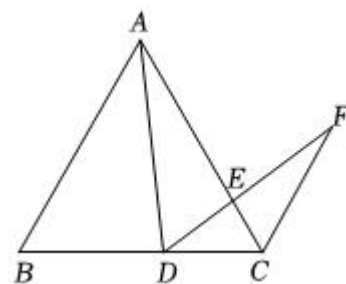


23. (本小题 12.0 分)

如图, 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, D 、 E 分别是边 BC 、 AC 上的点, 且 $BC \cdot CE = BD \cdot DC$. 在 DE 的延长线上取点 F , 使得 $DF = AD$, 联结 CF .

(1) 求证: $\angle ADE = 60^\circ$;

(2) 求证: $CF \parallel AB$.



24. (本小题 12.0 分)

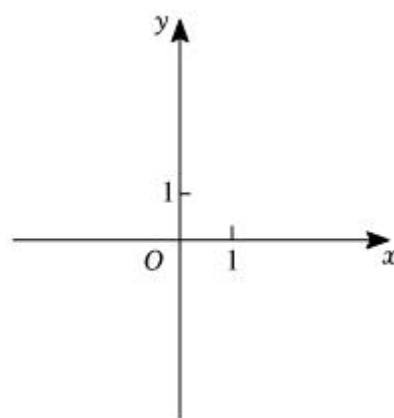
已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(4, 0)$ ，与 y 轴相交于点 C 。

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 点 P 是第一象限内抛物线上的一个动点，过点 P 作直线 $PD \perp x$ 轴，垂足为点 D ，直线 PD 与直线 BC 相交于点 E 。

① 当 $CP = CE$ 时，求点 P 的坐标；

② 联结 AC ，过点 P 作直线 AC 的平行线，交 x 轴于点 F ，当 $\angle BPF = \angle CBA$ 时，求点 P 的坐标。



25. (本小题 14.0 分)

如图 1，已知菱形 $ABCD$ ，点 E 在边 BC 上， $\angle BFE = \angle ABC$ ， AE 交对角线 BD 于点 F 。

(1) 求证： $\triangle ABF \sim \triangle DBA$ ；

(2) 如图 2，联结 CF 。

① 当 $\triangle CEF$ 为直角三角形时，求 $\angle ABC$ 的大小；

②如图 3, 联结 DE .当 $DE \perp FC$ 时, 求 $\cos \angle ABD$ 的值.

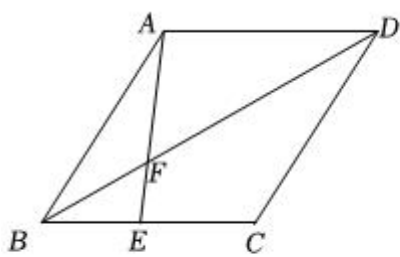


图1

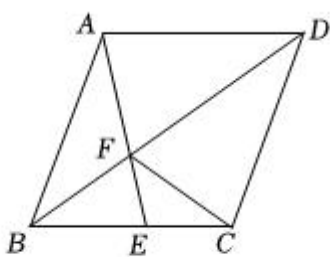


图2

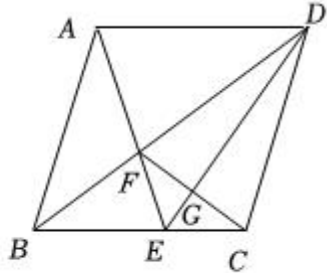


图3

答案和解析

1. 【答案】C

【解析】解：如图，根据勾股定理得： $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} =$

$$\sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\cot B = \frac{1}{\tan B} = \frac{3}{4},$$

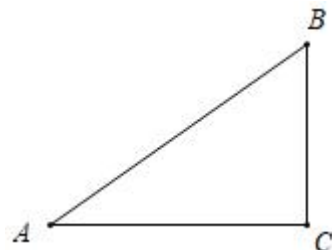
$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$$

故选：C.

根据勾股定理求出 BC 的长，根据锐角三角函数的定义判断即可.

本题考查了勾股定理，锐角三角函数的定义，掌握 $\cot B = \frac{1}{\tan B}$ 是解题的关键.



2. 【答案】B

【解析】解：A、任意两个等腰直角三角形都相似，正确，故A不符合题意；

B、任意两个含 36° 内角的等腰三角形不一定相似，故B符合题意；

C、任意两个等边三角形都相似，正确，故C不符合题意；

D、任意两个直角边之比为1:2的直角三角形相似，正确，故D不符合题意.

故选：B.

由相似三角形的判定方法，即可判断.

本题考查相似三角形的判定，等边三角形，等腰直角三角形的性质，关键是掌握相似三角形的判定方法.

3. 【答案】C

【解析】解：由 $\frac{AD}{DF} = \frac{3}{2}$ 得 $\frac{AD}{AF} = \frac{AD}{AD+DF} = \frac{3}{5}$ 故A不符合题意；

$\therefore a/ / b/ / c,$

$\therefore \frac{BC}{CE} = \frac{AD}{DF} = \frac{3}{2}$, 故 B 不符合题意;

根据已知条件得不出 $\frac{AB}{EF} = \frac{2}{3}$, 故 C 符合题意;

由 $\frac{BC}{CE} = \frac{3}{2}$, 得 $\frac{BC}{BE} = \frac{BC}{BC+CE} = \frac{3}{5}$, 故 D 不符合题意;

故选: C .

已知 $a//b//c$, 根据平行线分线段成比例定理, 对各项进行分析即可.

本题考查了平行线分线段成比例定理: 三条平行线截两条直线, 所得的对应线段成比例.

4. 【答案】 D

【解析】解: A 、二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像开口向下, $a < 0$, 故 A 不符合题意;

B 、当 $x = 0$ 时, $y = c > 0$, 故 B 不符合题意;

C 、当 $x = 1$ 时 $y = a + b + c < 0$, 故 C 不符合题意;

D 、抛物线的对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a} < 0$, 由 $a < 0$, 得到 $b < 0$, 故 D 符合题意.

故选: D .

由二次函数的图像和性质, 即可判断.

本题考查二次函数的图像与系数的关系, 关键是掌握: 二次函数的性质.

5. 【答案】 B

【解析】解: 将抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位, 向下 3 个单位得到抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$.

故选: B .

由图象平移的, 上加下减, 左加右减的法则, 即可得到答案.

本题考查二次函数图象与几何变换, 关键是掌握函数图象平移的方法: 上加下减, 左加右减.

6. 【答案】 D

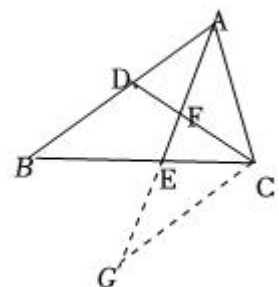
【解析】解: 过 C 作 $CG//AB$ 交 AE 延长线于 G ,

$\therefore \angle G = \angle BAE$,

$\because AE$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAE = \angle CAE$,

$\therefore \angle G = \angle CAE$,



$$\therefore CG = CA,$$

$$\because \angle ACD = \angle B, \angle ECG = \angle B,$$

$$\therefore \angle ACF = \angle ECG,$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle GCE (ASA),$$

$$\therefore CF = CE, AF = EG,$$

$$\because AF = 2FE,$$

$$\therefore EG = 2FE,$$

$$\text{令 } EF = k, \text{ 则 } AF = EG = 2k, AE = GF = 3k,$$

$$\because \triangle ADF \sim \triangle GCE,$$

$$\therefore AD : CG = AF : FG = 2k : (3k) = 2 : 3,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3},$$

故 A 正确.

$$\because AB \parallel CG,$$

$$\therefore CE : BE = GE : AE = 2k : (3k) = 2 : 3,$$

$$\therefore \frac{CF}{BE} = \frac{2}{3},$$

故 B 正确.

$$\because \angle ACD = \angle B, \angle DAC = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3},$$

故 C 正确.

$$\because \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3} \quad AC \text{ 和 } BD \text{ 不一定相等},$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} \text{ 不一定等于 } \frac{2}{3}$$

故选: D.

过C作CG//AB交AE延长线于G, 由条件可以证明 $\triangle ACF \cong \triangle GCE (ASA)$, 得到 $AF = EG$, $CF = CE$, 由 $\triangle ADF \sim \triangle GCF$, 再由平行线分线段成比例, 即可解决问题.

本题考查角的平分线, 相似三角形的判定和性质, 关键是通过辅助线构造相似三角形.

7. 【答案】 $\frac{1}{7}$

【解析】解：∵ $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

$$\therefore x = \frac{4}{3}y,$$

$$\therefore \frac{x-y}{x+y} = \frac{\frac{4}{3}y-y}{\frac{4}{3}y+y} = \frac{\frac{1}{3}y}{\frac{7}{3}y} = \frac{1}{7}$$

故答案为： $\frac{1}{7}$

由题干可得 $x = \frac{4}{3}y$ ，再把 $x = \frac{4}{3}y$ 代入式子即可解得答案.

本题考查了比例的性质，熟练掌握比例的性质是关键.

8. 【答案】 $\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b}$

$$\begin{aligned} \text{【解析】解：} & 2(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{1}{3}(3\vec{a} - \vec{b}) \\ &= 2\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \\ &= \vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b}. \end{aligned}$$

故答案为： $\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b}$.

由平面向量的加减运算法则，即可计算.

本题考查平面向量，关键是掌握平面向量的加减运算方法.

9. 【答案】 16: 25

【解析】解：∵两个相似三角形的对应边上的中线之比 4: 5，则这两个相似三角形的相似比是 4: 5,

∴这两个三角形面积之比为 $4^2: 5^2 = 16: 25$.

故答案为： 16: 25.

由相似三角形的性质：相似三角形面积的比等于相似比的平方，即可计算.

本题考查相似三角形的性质，关键是掌握相似三角形的性质：相似三角形面积的比等于相似比的平方.

10. 【答案】 $(4\sqrt{5} - 4)$

【解析】解： $AP = 8 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = (4\sqrt{5}-4)(cm)$.

故答案为： $(4\sqrt{5}-4)$.

由黄金分割的定义，即可计算.

本题考查黄金分割，关键是掌握黄金分割的定义.

11. 【答案】 $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【解析】解：连接 AG 并延长交 BC 于 M ,

$\because G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore AG:AM = 2:3$,

$\because DE \parallel BC$,

$\therefore AD:AB = AG:AM = 2:3$,

$\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$,

$\therefore DE:BC = AD:AB = 2:3$,

$\therefore \vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{BC}$,

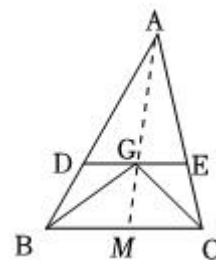
$\because \vec{BC} = \vec{GC} - \vec{GB} = \vec{b} - \vec{a}$,

$\therefore \vec{DE} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

故答案为： $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

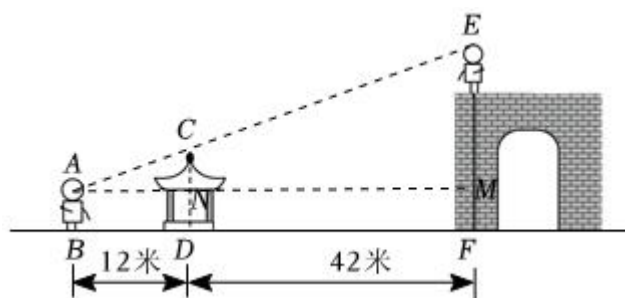
由三角形重心的性质，相似三角形的判定和性质，平面向量的减法公式，即可求解.

本题考查平面向量，三角形的重心，关键是掌握平面向量的有关公式.



12. 【答案】 22.3

【解析】解：作 $AM \perp EF$ 于 M ，交 DC 于 N ，



$$\because CD = 6.6 \text{ 米}, AB = 1.6 \text{ 米},$$

$$\therefore CN = CD - AB = 5 \text{ 米}, FM = AB = 1.6 \text{ 米},$$

$$\because CN \parallel EM,$$

$$\therefore \triangle ACN \sim \triangle AEM,$$

$$\therefore CN : EM = AN : AM,$$

$$\therefore 5 : EM = 12 : 54,$$

$$\therefore EM = 22.5 \text{ (米)},$$

$$\therefore EF = EM + FM = 22.5 + 1.6 = 24.1 \text{ (米)},$$

$$\therefore \text{观景台的高度为 } 24.1 - 1.8 = 22.3 \text{ 米}.$$

故答案为：22.3.

作 $AM \perp EF$ 于 M ，交 DC 于 N ，由 $\triangle ACN \sim \triangle AEM$ ，求出 EM 的长，即可解决问题.

本题考查相似三角形的应用，关键是通过辅助线构造相似三角形.

13. 【答案】 <

【解析】解： $\because$ 抛物线 $y = -x^2 - 2x + 4$ 的对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a} = -1$, $a = -1 < 0$,

$\therefore$ 抛物线在对称轴是直线 $x = -1$ 左侧时，图象上升， y 随 x 的增大而增大，

$$\because -3 < -2 < -1,$$

$$\therefore m < n.$$

故答案为：<.

由开口向下的抛物线的性质：抛物线在对称轴左侧时，图象上升， y 随 x 的增大而增大，即可判断.

本题考查二次函数图象上的点的坐标特征，关键是掌握：二次函数的性质.

14. 【答案】 $3\sqrt{13}$

【解析】解：设坡面的铅直高度是 h m 和水平宽度是 l m,

$$\therefore h : l = 1 : 1.5 = 2 : 3,$$

$$\text{令 } h = 2x \text{ m, 则 } l = 3x \text{ m,}$$

$$\because h^2 + l^2 = 13^2,$$

$$\therefore (2x)^2 + (3x)^2 = 169,$$

$$\therefore x = \sqrt{13},$$

$$\therefore l = 3x = 3\sqrt{13}(m).$$

故答案为: $3\sqrt{13}$.

坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比, 又叫做坡比, 由此即可计算.

本题考查解直角三角形的应用—坡度, 关键是掌握坡度的定义.

15. 【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】解: 原式 $= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}-1}$
 $= -\frac{1}{2}$

故答案为: $-\frac{1}{2}$.

把特殊角的三角函数值, 代入原式即可计算

本题考查特殊角的三角函数值, 关键是要熟记特殊角的三角函数值,

16. 【答案】 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

【解析】解: 令正三角形的边长是 “1”,

$$\therefore AC = 2, BC = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

由等边三角形的性质, 求出 BC 长, 由勾股定理求出 AB 长, 由锐角的正弦定义即可计算.

本题考查等边三角形的性质, 解直角三角形, 勾股定理, 关键是掌握三角函数定义.

17. 【答案】 $5\sqrt{5}cm$

【解析】解: 矩形 $ABCD$ 中, $\angle B = 90^\circ$,

$$\therefore \tan \angle BAF = \frac{BF}{AB},$$

$$\therefore AB = \frac{BF}{\tan \angle BAF} = \frac{6}{\frac{3}{4}} = 8(cm),$$

$$\therefore AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10(cm)$$

由题意得: $AD = AF = 10(\text{cm})$ $DE = EF$,

令 $DE = x \text{ cm}$, 则 $CE = (8 - x) \text{ cm}$,

$$\because FC = BC - BF,$$

$$\therefore FC = 10 - 6 = 4(\text{cm}),$$

$$\because EF^2 = EC^2 + FC^2,$$

$$\therefore x^2 = (8 - x)^2 + 4^2,$$

$$\therefore x = 5,$$

$$\therefore DE = 5(\text{cm}),$$

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}(\text{cm}).$$

故答案为: $5\sqrt{5} \text{ cm}$.

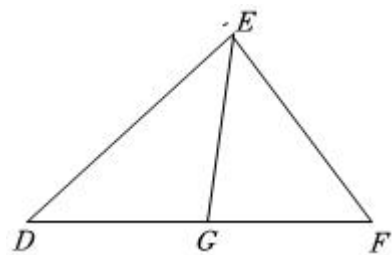
由锐角的正切求出 AB 的长, 由勾股定理求出 AF 的长, 由轴对称的性质, 勾股定理列出关于 DE 的方程, 求出 ED 长, 由勾股定理即可求出 AE 的长.

本题考查矩形的性质, 勾股定理, 折叠问题, 解直角三角形, 熟练掌握以上知识点是解题的关键.

18. 【答案】 54° 或 27° 或 46° 或 32° .

【解析】解: 若 $\triangle DEG$ 是等腰三角形, $\triangle EFG$ 与 $\triangle DEF$ 相似,

如图 1,



当 $DG = EG$, $\angle GEF = \angle D = 42^\circ$ 时,

$$\therefore \angle DEG = \angle D = 42^\circ,$$

$$\therefore \angle F = 180^\circ - \angle D - \angle DEF = 180^\circ - 3 \times 42^\circ = 54^\circ,$$

如图 2,

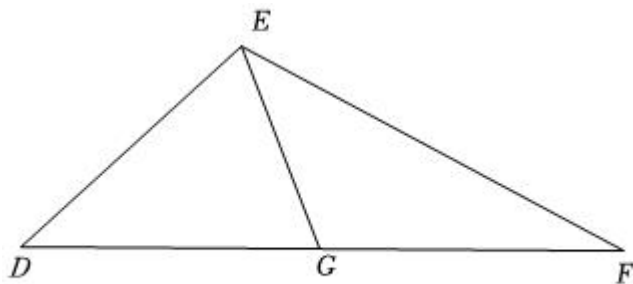


图2

当 $DE = DG$, $\angle FGE = \angle D = 42^\circ$ 时,

$$\therefore \angle DGE = \angle DEG = \frac{180^\circ - 42^\circ}{2} = 69^\circ,$$

$$\therefore \angle F = \angle DGE - \angle FEG = 69^\circ - 42^\circ = 27^\circ,$$

当 $\triangle EFG$ 是等腰三角形, $\triangle DEG$ 与 $\triangle DEF$ 相似时,

如图 3,

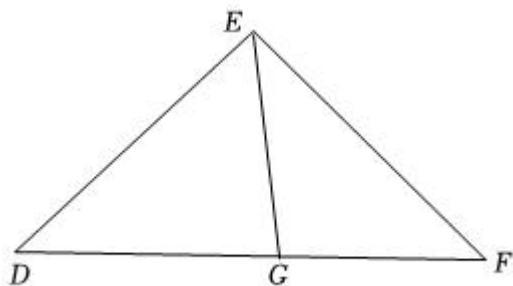


图3

当 $EG = FG$, $\angle DEG = \angle F$ 时,

$$\therefore \angle F = \angle FEG,$$

$$\therefore \angle F = \angle FEG = \angle DEG = \frac{180^\circ - 42^\circ}{3} = 46^\circ,$$

如图 4,

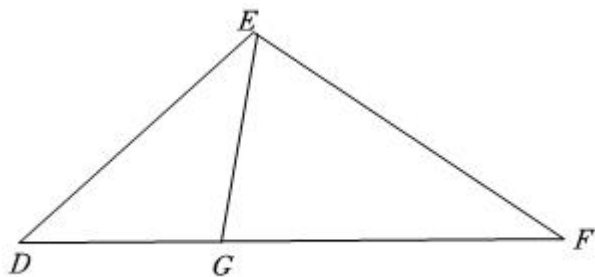


图4

当 $EF = FG$, $\angle DEG = \angle F$ 时,

$$\therefore \angle FEG = \angle FGE,$$

设 $\angle F = \angle DEG = x^\circ$,

$$\therefore \angle FEG = \angle FGE = (42 + x)^\circ,$$

$$\therefore x + 2(42 + x) = 180,$$

$$\therefore x = 32^\circ,$$

$$\therefore \angle F = 32^\circ,$$

综上所述: $\angle F = 54^\circ$ 或 27° 或 46° 或 32° ,

故答案为 54° 或 27° 或 46° 或 32° .

分为 $\triangle DEG$ 是等腰三角形, $\triangle EFG$ 与 $\triangle DEF$ 相似及 $\triangle EFG$ 是等腰三角形, $\triangle DEG$ 与 $\triangle DEF$ 相似; 当 $\triangle DEG$ 是等腰三角形时, 又分为 $DG = EG$ 和 $DE = DG$ 两种; 当 $\triangle EFG$ 是等腰三角形时, 也分为 $EG = FG$ 和 $EF = FG$ 两种进行讨论.

本题考查了等腰三角形的分类, 相似三角形的判定等知识, 解决问题的关键是画出图形, 正确分类.

19. 【答案】解: $\because \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13},$$

$$\text{令 } BC = 5x, AB = 13x,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = 12x,$$

$$\because \angle BDC = 45^\circ, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle CBD = 45^\circ,$$

$$\therefore BC = CD = 5x,$$

$$\therefore AD = AC - CD = 7x = 7,$$

$$\therefore x = 1,$$

$$\therefore CD = 5x = 5.$$

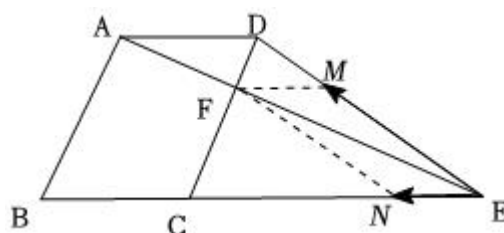
【解析】令 $BC = 5x$, $AB = 13x$, 由 $\angle A$ 的正弦得到 $AC = 12x$, $\triangle BCD$ 是等腰直角三角形, $CD = BC = 5x$, 得到 $AD = 7x = 7$, 求出 x 的值, 即可得到答案.

本题考查解直角三角形, 关键是掌握三角函数定义.

20. 【答案】解: (1) $\because$ 四边形是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC, AB \parallel DC, AB = DC,$$

$$\because CE = 2BC,$$



$$\therefore CE = 2AD,$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AD} = 2\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \vec{a} + 2\vec{b};$$

(2)过F作FM//CE, 交DE于M, FN//DE交CE于N,

$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{EF}$ 分别在向量 $\overrightarrow{EC}$ 、 $\overrightarrow{ED}$ 方向上的分向量是向量 $\overrightarrow{EM}$ 和向量 $\overrightarrow{EN}$.

【解析】(1)由平面向量的三角形法则, 即可计算;

(2)由平面向量的平行四边形法则, 即可作图.

本题考查平面向量, 平行四边形的性质, 关键是掌握平行四边形的性质, 平面向量的运算法则.

21. 【答案】解: (1) $y = -3x^2 + 6x + 9$

$$= -3(x^2 - 2x) + 9$$

$$= -3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9$$

$$= -3(x - 1)^2 + 12,$$

$$\therefore y = -3(x - 1)^2 + 12,$$

$$\therefore -3 < 0,$$

$\therefore$ 图象开口向下,

则对称轴 $x = 1$, 顶点坐标为 $(1, 12)$;

(2)根据题意可得平移后的解析式为: $y = -3(x - 3)^2 +$

$$12,$$

$\therefore$ 顶点坐标为 $(3, 12)$, 即 $D(3, 12)$,

当 $y = 0$ 时, 即 $-3(x - 3)^2 + 12 = 0$, 解得: $x_1 = 1, x_2 = 5$,

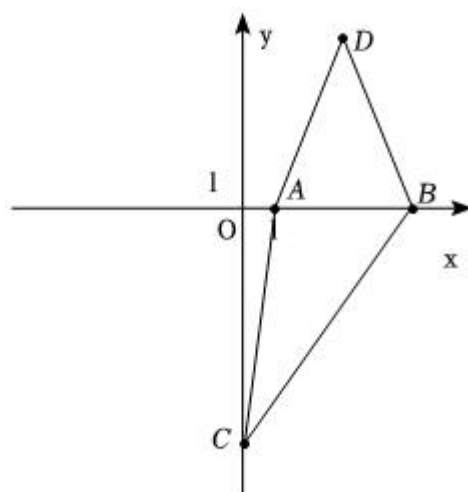
$\therefore$ 新函数的图像与 x 轴交于点A、B(点A在点B左侧),

$\therefore A(1, 0), B(5, 0)$,

当 $x = 0$ 是, $y = -15$,

$\therefore$ 点C的坐标为 $(0, -15)$,

如图所示 $S_{\text{四边形ACBD}} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ABC}$



$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 12 + \frac{1}{2} \times 4 \times 15$$

$$= 54,$$

∴ 四边形 $DACB$ 的面积为 54.

【解析】(1) 利用配方法把一般式配成顶点式，即可得出对称轴和顶点坐标，根据 $-3 < 0$ 即可得出图象开口向下；

(2) 根据题意先求出平移后的抛物线的解析式，即可写出顶点 D 的坐标，求出当 $y = 0$ 时对应的 x 值，即可写出点 A 、 B 的坐标，求出当 $x = 0$ 时对应的 y 值，即可求出点 C 的坐标，然后根据坐标画出图象，即可求出四边形的面积.

本题考查的是二次函数的图像与性质，解题关键是掌握二次函数顶点式的配法.

22. 【答案】解：作 $CE \perp NM$ 于 E ， $BF \perp CE$ 于 F ，

$$\because \angle CBF = \angle CBA - \angle FBA = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \sin \angle CBF = \sin 60^\circ = \frac{CF}{BC} = \frac{CF}{18.5}$$

$$\therefore CF = \frac{37\sqrt{3}}{4} (cm),$$

$$\therefore CE = CF + EF = CF + AB = \frac{37\sqrt{3}+20}{4} (cm).$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 到水平桌面的距离是 } \frac{37\sqrt{3}+20}{4} cm;$$

(2) 作 $DK \perp FB$ 交 FB 延长线于 K ，作 $CH \perp DK$ 于 H ，

$$\because \angle DCH = \angle DCB - \angle HCB = 80^\circ = 60^\circ = 20^\circ,$$

$$\therefore \cos \angle DCH = \cos 20^\circ = \frac{CH}{CD} \approx 0.94,$$

$$\therefore FK = CH = 14.1 (cm),$$

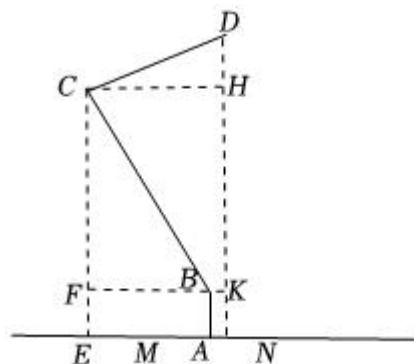
$$\because \angle BCF = 30^\circ,$$

$$\therefore BF = \frac{1}{2} BC = 9.25 (cm),$$

$$\therefore BK = FK - BF = 4.85 (cm),$$

$$\therefore AN = \frac{1}{2} MN = 5 (cm),$$

∴ 此时支架不会倾倒.



【解析】(1) 作 $CE \perp NM$ 于 E ， $BF \perp CE$ 于 F ，由锐角的正弦求出 FC 的长，即可解决问题；

(2) 作 $DK \perp FB$ 交 FB 延长线于 K ，作 $CH \perp DK$ 于 H ，由锐角的余弦求出 CH 的长，而 $FB =$

$\frac{1}{2}BC$ ，即可求出 BK 的长，从而解决问题.

本题考查解直角三角形的应用，关键是通过辅助线构造直角三角形.

23. 【答案】证明：(1) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle ACB = 60^\circ, AB = BC,$$

$$\because BC \cdot CE = BD \cdot DC,$$

$$\therefore AB : DC = BD : CE,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDE,$$

$$\because \angle ADC = \angle ADE + \angle CDE = \angle B + \angle BAD,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B = 60^\circ.$$

(2) 连接 AF ,

$$\because \angle ADE = 60^\circ, AD = DF,$$

$\therefore \triangle ADF$ 是等边三角形,

$$\therefore AF = AD, \angle DAE = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\because \angle BAD + \angle DAC = \angle CAE + \angle DAC,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

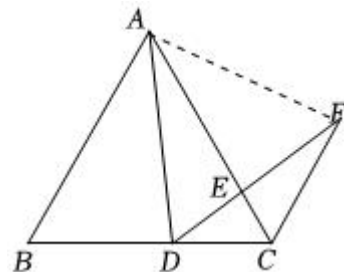
$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (SAS),$$

$$\therefore \angle ACE = \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore CF \parallel AB.$$



【解析】(1) 由条件可以证明 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$ ，得到 $\angle BAD = \angle CDE$ ，又 $\angle ADC = \angle ADE + \angle CDE = \angle B + \angle BAD$ ， $\angle ADE = \angle B = 60^\circ$ ；

(2) 由证明条件可以 $\triangle ABD \cong \triangle ACE (SAS)$ ，得到 $\angle ACE = \angle B = 60^\circ$ ，因此 $\angle ACE = \angle BAC = 60^\circ$ ，即可证明 $CF \parallel AB$.

本题考查相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，等边三角形的性质，熟练掌握以上知识点是解题的关键.

$$\therefore \begin{cases} a - b + 3 = 0 \\ 16a + 4b + 3 = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{4} \end{cases},$$

(2)①过C作 $CH \perp PD$ 于H,

$$\therefore PC = CE,$$

$$\therefore PH = EH,$$

$$\therefore CH // OB,$$

$$\therefore \angle HCE = \angle CBO,$$

$$\therefore \tan \angle HCE = \tan \angle CBO,$$

$$\therefore \frac{HE}{CH} = \frac{OC}{OB} = \frac{3}{4},$$

$\therefore P$ 的坐标是 $(4k, 3 + 3k)$,

$\therefore P$ 在抛物线上,

$$\therefore -\frac{3}{4}(4k)^2 + \frac{9}{4} \times (4k) + 3 = 3 + 3k,$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \text{ 或 } k = 0(\text{舍}),$$

$\therefore P$ 的坐标是 $(2, \frac{9}{2})$;

② $\therefore PG \parallel AC$,

$$\therefore \angle CAB = \angle PFB,$$

$$\therefore BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad AB = OA + OB = 5,$$

$$\therefore AB = CB,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle BCA,$$

$$\therefore \angle PFB = \angle BCA,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BPF,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle PBD,$$

$\because P$ 在抛物线上,

$$\therefore \text{设 } P(a, -\frac{3}{4}a^2 + \frac{9}{4}a + 3),$$

$$\because \angle CAB = \angle PBD,$$

$$\therefore \tan \angle CAB = \tan \angle PBD,$$

$$\therefore \frac{PD}{DB} = \frac{CO}{AO} = 3,$$

$$\therefore \frac{-\frac{3}{4}a^2 + \frac{9}{4}a + 3}{4-a} = 3,$$

$$\therefore a = 3 \text{ 或 } a = 4(\text{舍}),$$

$$\text{当 } a = 3 \text{ 时, } -\frac{3}{4}a^2 + \frac{9}{4}a + 3 = 3,$$

$$\therefore P \text{ 的坐标是 } (3, 3)$$

【解析】 (1) 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(4, 0)$, 把 A 、 B 坐标代入抛物线解析式, 求出 a 、 b 的值即可;

(2) ① 过 C 作 $CH \perp PD$ 于 H , 由 $\tan \angle HCE = \tan \angle CBO$, 得到 $EH: CH = 3: 4$, 令 $EH = 3k$, 表示出 P 的坐标 $(4k, 3 + 3k)$, 代入函数关系式求出 k 的值即可;

② 由条件得到 $PF = PD$, 推出 $BD = DF$, 由 $\tan \angle CAB = \tan \angle PDB$, 得到 $\frac{PD}{DB} = 3$, 设出 P 的坐标 $(a, -\frac{3}{4}a^2 + \frac{9}{4}a + 3)$, 得到 $\frac{-\frac{3}{4}a^2 + \frac{9}{4}a + 3}{4-a} = 3$, 求出 a 的值即可得到答案.

本题考查二次函数的综合知识, 熟练掌握几何知识, 二次函数的性质是解题的关键.

25.

【答案】

(1)

证明:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore \angle ABF = \angle EBF,$$

$$\because \angle BFE = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle BAF = \angle ABF + \angle EBF,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle EBF,$$

$$\because \angle ADB = \angle EBF,$$

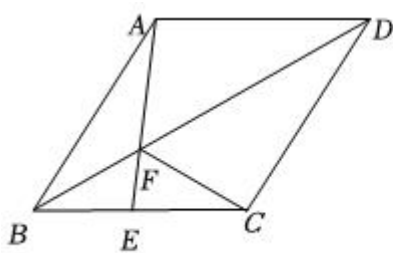


图1

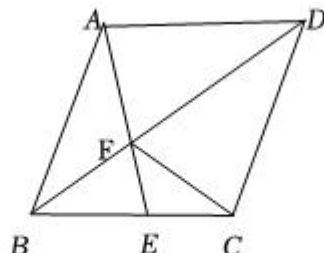


图2

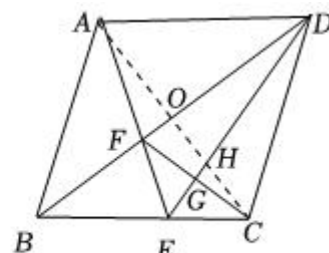


图3

$$\therefore \angle ADB = \angle BAF,$$

$$\because \angle ABF = \angle ABD,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle DBA;$$

(2)① $\because$ 菱形是轴对称图形,

$$\therefore \angle FCB = \angle BAF,$$

$$\text{令 } \angle ABD = \alpha, \text{ 则 } \angle CBF = \angle BAE = \angle FCB = \alpha,$$

$$\text{当 } \angle CEF = 90^\circ \text{ 时, } \angle CEF = \angle ABE + \angle BAE = 3\alpha = 90^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 2\alpha = 60^\circ;$$

$$\text{当 } \angle ECF = 90^\circ \text{ 时, } \alpha = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 2\alpha = 180^\circ, \text{ 不符合题意};$$

$$\text{当 } \angle EFC = 90^\circ \text{ 时, } \angle EFC = 180^\circ - \angle CEF - \angle FCE = 180^\circ - 4\alpha = 90^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 2\alpha = 45^\circ,$$

$$\therefore \text{当 } \triangle CEF \text{ 为直角三角形时, } \angle ABC = 60^\circ \text{ 或 } \angle ABC = 45^\circ;$$

② 连接 AC 交 BD 于 O , 交 DE 于 H ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\because DE \perp FC,$$

$$\therefore \angle GCH + \angle DFC = \angle FDG + \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GCH = \angle FDG,$$

$$\because \angle HEC = \angle DBE + \angle BDE, \angle HCE = \angle FCE + \angle HCG, \angle FCE = \angle DBE,$$

$$\therefore \angle HEC = \angle HCE,$$

$$\therefore EF = EC,$$

$$\therefore DE \text{ 垂直平分 } FC,$$

$$\therefore DF = DC,$$

$$\because \triangle ABF \sim \triangle DBA,$$

$$\therefore AB:BD = BF:AB,$$

$$\therefore AB^2 = BD \cdot BF = BF \cdot (BF + DF),$$

设 $BF = x$, 菱形边长是 a ,

$$\therefore a^2 = x(x + a),$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{5}a - a}{2}, \text{ 或 } x = \frac{-\sqrt{5}a - a}{2} \text{ (舍)},$$

$$\therefore BD = BF + FD = \frac{\sqrt{5}a - a}{2} + a = \frac{\sqrt{5}a + a}{2},$$

$$\therefore BO = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{5}a + a}{4},$$

$$\therefore \cos \angle ABD = \frac{BO}{AB} = \frac{\sqrt{5}a + a}{4a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

$$\therefore \cos \angle ABD \text{ 的值是 } \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

【解析】(1)由菱形的性质，三角形外角的性质即可证明；

(2)①分情况讨论，即可求出 $\angle ABC$ 的度数；

②由条件可以证明 DE 垂直平分 CF ，得到 $DF = DC$ ，由 $\triangle ABF \sim \triangle DBA$ ，设 $BF = x$ ，菱形边长是 a ，得到 $a^2 = x(x + a)$ ，求出 x ，即可解决问题.

本题考查相似形综合题，熟练掌握菱形的性质，相似三角形的性质是解题的关键.

