

## 2023 年上海市崇明区中考数学一模试卷

一、选择题（本大题共 6 小题，共 24.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 下列各组图形，一定相似的是( )

- A. 两个等腰梯形    B. 两个菱形    C. 两个正方形    D. 两个矩形

2. 将函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  的图象向右平移 2 个单位，下列结论中正确的是( )

- A. 开口方向不变    B. 顶点不变    C. 对称轴不变    D. 与 y 轴的交点不变

3. 在  $Rt \triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $AC = 3$ ，那么  $\cos A$  的值是( )

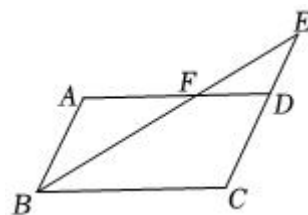
- A.  $\frac{3}{5}$     B.  $\frac{\sqrt{7}}{4}$     C.  $\frac{3}{4}$     D.  $\frac{4}{3}$

4. 已知  $\vec{e}$  为单位向量，向量  $\vec{a}$  与  $\vec{e}$  方向相反，且其模为  $|\vec{e}|$  的 4 倍；向量  $\vec{b}$  与  $\vec{e}$  方向相同，且其模为  $|\vec{e}|$  的 2 倍，则下列等式中成立的是( )

- A.  $\vec{a} = 2\vec{b}$     B.  $\vec{a} = -2\vec{b}$     C.  $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$     D.  $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

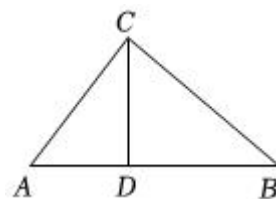
5. 四边形  $ABCD$  中，点  $F$  在边  $AD$  上， $BF$  的延长线交  $CD$  的延长线于  $E$  点，下列式子中能判断  $AD \parallel BC$  的式子是( )

- A.  $\frac{FD}{BC} = \frac{ED}{EC}$   
B.  $\frac{AF}{DF} = \frac{BF}{EF}$   
C.  $\frac{AB}{ED} = \frac{AF}{FD}$   
D.  $\frac{EF}{BE} = \frac{ED}{EC}$



6. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $CD \perp AB$ ，垂足为点  $D$ ，以下条件中不能推出  $\triangle ABC$  为直角三角形的是( )

- A.  $\angle A = \angle BCD$   
B.  $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$   
C.  $\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD}$   
D.  $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$



二、填空题（本大题共 12 小题，共 48.0 分）

7. 如果  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} (x \neq 0)$ ，那么  $\frac{x+y}{y} = \underline{\hspace{1cm}}$  .

8. 计算:  $\vec{5a} - 3(\vec{2a} - \vec{b}) =$  \_\_\_\_ .

9. 点 $P$ 是线段 $MN$ 的黄金分割点, 如果 $MN = 10\text{cm}$ , 那么较长线段 $MP$ 的长是 \_\_\_\_  $\text{cm}$ .

10. 如果抛物线 $y = (m - 2)x^2$ 有最高点, 那么 $m$ 的取值范围是 \_\_\_\_ .

11. 如果抛物线 $y = 2x^2 - bx + 1$ 的对称轴是 $y$ 轴, 那么它的顶点坐标为 \_\_\_\_ .

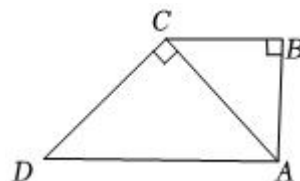
12. 已知点 $A(2, y_1)$ ,  $B(-3, y_2)$ 为二次函数 $y = (x + 1)^2$ 图象上的两点, 那么 $y_1$  \_\_\_\_  $y_2$  (填“>”, “=”或“<”).

13. 如果两个相似三角形的周长之比是 4 : 9, 那么它们的对应角平分线的比为 \_\_\_\_ .

14. 飞机离水平地面的高度为 3 千米, 在飞机上测得该水平地面上的目标 $A$ 点的俯角为 $\alpha$ , 那么此时飞机与目标 $A$ 点的距离为 \_\_\_\_ 千米. (用 $\alpha$ 的式子表示)

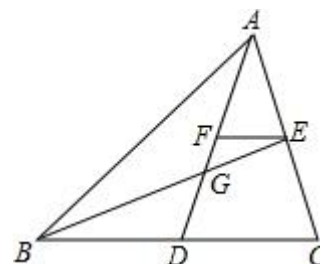
15. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中,  $AD \parallel BC$ ,  $\angle B = \angle ACD = 90^\circ$ ,  $\angle D = 45^\circ$ , 则

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \text{ ____ } .$$



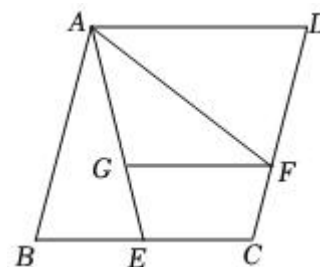
16. 如图,  $\triangle ABC$ 的两条中线 $AD$ 和 $BE$ 相交于点 $G$ , 过点 $E$

作 $EF \parallel BC$ 交 $AD$ 于点 $F$ , 那么 $\frac{FG}{AG} =$  \_\_\_\_.

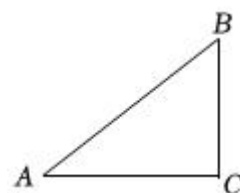


17. 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长为 8,  $E$ 为 $BC$ 的中点,  $AF$ 平分 $\angle EAD$ 交 $CD$ 于点 $F$ , 过点 $F$ 作 $FG \parallel AD$ , 交 $AE$ 于点 $G$ ,

若 $\cos B = \frac{1}{4}$ , 则 $FG$ 的长为 \_\_\_\_ .



18. 如图, 在 $Rt \triangle ABC$ 中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 3$ , 点 $D$ 在 $AC$ 边上, 点 $E$ 在射线 $AB$ 上, 将 $\triangle ADE$ 沿 $DE$ 翻折, 使得点 $A$ 落在点 $A'$ 处, 当 $A'D \perp AC$ 且 $CA' \parallel AB$ 时,  $BE$ 的长为 \_\_\_\_ .



三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 78.0 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. (本小题 10.0 分)

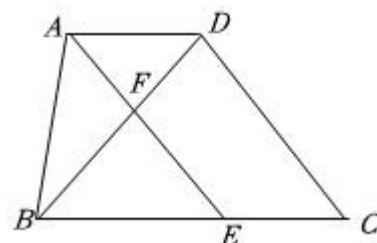
计算:  $4\cos 30^\circ - \cos 45^\circ \tan 60^\circ + 2\sin^2 45^\circ$ .

20. (本小题 10.0 分)

在梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ , 且  $BC = 3AD$ . 过点  $A$  作  $AE \parallel DC$ , 分别交  $BC$ ,  $BD$  于点  $E$ ,  $F$ , 若  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ .

(1) 用  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  表示  $\overrightarrow{BD}$  和  $\overrightarrow{AF}$ ;

(2) 求作  $\overrightarrow{BF}$  在  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  方向上的分向量. (不要求写作法, 但要保留作图痕迹, 并指出所作图中表示结论的分向量)



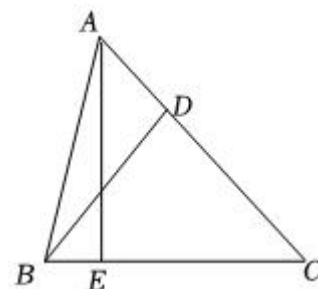
21. (本小题 10.0 分)

如图,  $D$  是  $\triangle ABC$  边上的一点,  $CD = 2AD$ ,  $AE \perp BC$ , 垂足为点  $E$ , 若  $AE = 9$ ,

$$\sin \angle CBD = \frac{3}{4}$$

(1) 求  $BD$  的长;

(2) 若  $BD = CD$ , 求  $\tan \angle BAE$  的值.



22. (本小题 10.0 分)

如图, 一根灯杆  $AB$  上有一盏路灯  $A$ , 路灯  $A$  离水平地面的高度为 9 米, 在距离路灯正下方  $B$

点 15.5 米处有一坡度为  $i = 1: \frac{4}{3}$  的斜坡  $CD$ . 如果高为 3 米的标尺  $EF$  竖立在地面  $BC$  上, 垂足为  $F$ , 它的影子的长度为 4 米.

(1) 当影子全在水平地面  $BC$  上 (图 1), 求标尺与路灯间的距离;

(2) 当影子一部分在水平地面  $BC$  上, 一部分在斜坡  $CD$  上 (图 2), 求此时标尺与路灯间的距离为多少米?

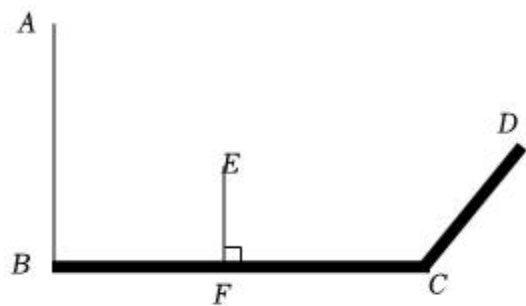


图1

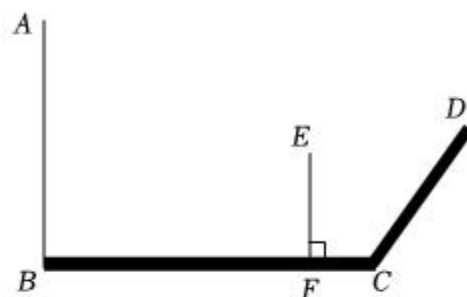


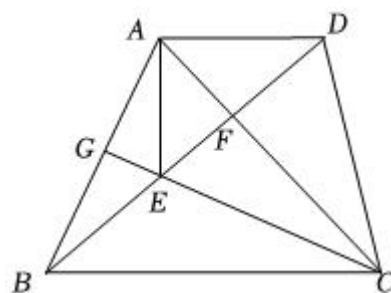
图2

23. (本小题 12.0 分)

已知: 如图, 在梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AD = \frac{1}{2}BC$ , 对角线  $AC$  与  $BD$  交于点  $F$ , 点  $G$  是  $AB$  边上的中点, 联结  $CG$  交  $BD$  于点  $E$ , 并满足  $BG^2 = GE \cdot GC$ .

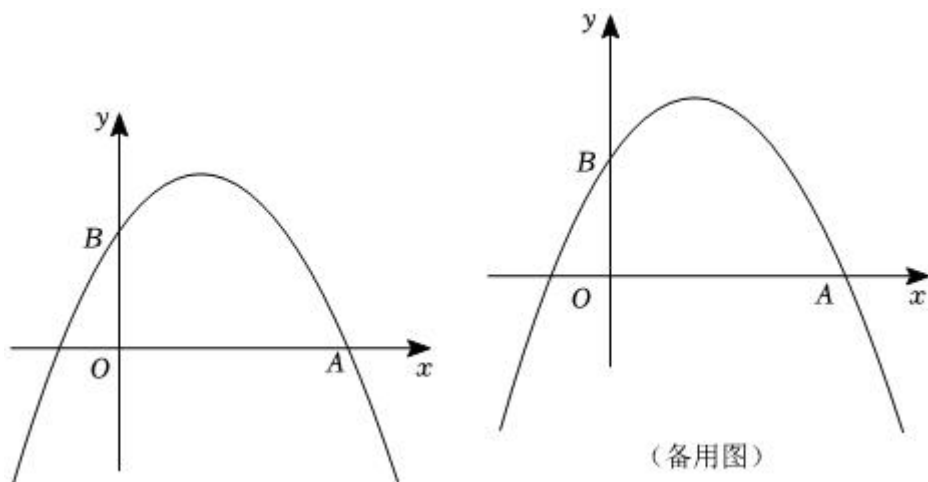
(1) 求证:  $\angle GAE = \angle GCA$ ;

(2) 求证:  $AD \cdot BC = 2DF \cdot DE$ .



24. (本小题 12.0 分)

如图, 在直角坐标平面  $xOy$  中, 对称轴为直线  $x = \frac{3}{2}$  的抛物线  $y = ax^2 + bx + 2$  经过点  $A(4,0)$ 、点  $M(1,m)$ , 与  $y$  轴交于点  $B$ .



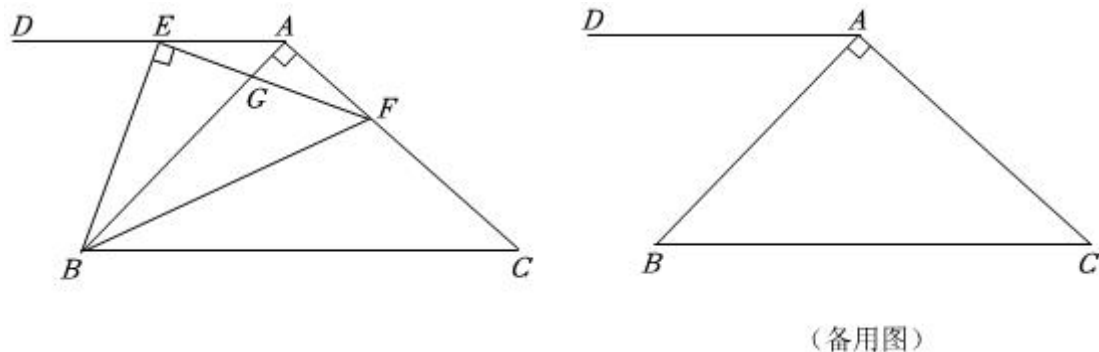
(1)求抛物线的解析式，并写出此抛物线顶点 $D$ 的坐标；

(2)联结 $AB$ 、 $AM$ 、 $BM$ ，求 $S_{\triangle ABM}$ 的面积；

(3)过 $M$ 作 $x$ 轴的垂线与 $AB$ 交于点 $P$ ， $Q$ 是直线 $MP$ 上点，当 $\triangle BMQ$ 与 $\triangle AMP$ 相似时，求点 $Q$ 的坐标.

25. (本小题 14.0 分)

已知 $Rt \triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 4$ ， $AD \parallel BC$ .点 $E$ 为射线 $AD$ 上的一个动点(不与 $A$ 重合)，过点 $E$ 作 $EF \perp BE$ ，交射线 $CA$ 于点 $F$ ，联结 $BF$ .



(1)如图，当点 $F$ 在线段 $AC$ 上时， $EF$ 与 $AB$ 交于点 $G$ ，求证： $\triangle AEG \sim \triangle FBG$ ；

(2)在(1)的情况下，射线 $CA$ 与 $BE$ 的延长线交于点 $Q$ ，设 $AE = x$ ， $QF = y$ ，求 $y$ 关于 $x$ 的函数解析式，并写出定义域；

(3)当 $BE = 3$ 时，求 $CF$ 的长.

---

## 答案和解析

### 1. 【答案】C

【解析】解：A、两个等腰梯形不一定相似，故本选项不合题意；

B、两个菱形，形状不一定相同，故本选项不合题意；

C、两个正方形，形状相同，大小不一定相同，符合相似形定义，故本选项符合题意；

D、两个矩形四个角相等，但是各边不一定对应成比例，所以不一定相似，故本选项不合题意。

故选：C。

根据相似图形的定义，四条边对应成比例，四个角对应相等，对各选项分析判断后利用排除法解答。

本题主要考查了图形相似的判定，熟练掌握矩形、等腰梯形、菱形、正方形的性质是解题的关键，难度适中。

### 2. 【答案】A

【解析】解：A、将函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象向右平移2个单位， $a$ 不变，开口方向不变，故正确；

B、将函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象向右平移2个单位，顶点的横坐标改变，纵坐标不变，故错误；

C、将函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象向右平移2个单位，形状不变，顶点改变，对称轴改变，故错误；

D、将函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象向右平移2个单位，与 $y$ 轴的交点也改变，故错误。

故选：A。

由于抛物线平移后的形状不变，对称轴不变， $a$ 不变，抛物线的增减性不变。

本题主要考查了二次函数图象与几何变换，二次函数的性质，注意：抛物线平移后的形状不变，开口方向不变，顶点坐标改变。

### 3. 【答案】C

【解析】解：在 $Rt \triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $AC = 3$ ，

$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$$

故选：C.

利用锐角三角函数的定义，进行计算即可解答.

本题考查了锐角三角函数的定义，熟练掌握锐角三角函数的定义是解题的关键.

#### 4. 【答案】B

【解析】解：根据题意知， $\vec{a} = -4\vec{e}$ ， $\vec{b} = 2\vec{e}$ ，则 $\vec{a} = -2\vec{b}$ ，观察选项，只有选项B符合题意.

故选：B.

根据平面向量的性质进行一一判断.

此题考查了平面向量的知识. 此题比较简单，注意掌握单位向量的知识.

#### 5. 【答案】D

【解析】解：当 $\frac{FD}{BC} = \frac{ED}{EC}$ 时，无法判断 $AD \parallel BC$ ，故选项A不符合题意；

当 $\frac{AF}{DF} = \frac{BF}{EF}$ 时， $\angle AFB = \angle DFE$ ，则 $\triangle AFB \sim \triangle DFE$ ，故 $\angle ABF = \angle DEF$ ， $AB \parallel CD$ ，

但无法判断 $AD \parallel BC$ ，故选项B不符合题意；

当 $\frac{AB}{ED} = \frac{AF}{FD}$ 时，无法判断 $AD \parallel BC$ ，故选项C不符合题意；

当 $\frac{EF}{BE} = \frac{ED}{EC}$ 时， $\angle FED = \angle BEC$ ，则 $\triangle FED \sim \triangle BEC$ ，故 $\angle EFD = \angle EBC$ ，可以判断判断 $AD \parallel BC$ ，故选项D符合题意；

故选：D.

根据各个选项中的条件和图形，利用相似三角形的判定和性质、平行线的判定，可以判断哪个选项符合题意.

本题考查平行线分线段成比例、平行线的判定、相似三角形的判定和性质，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

#### 6. 【答案】D

【解析】解： $\because CD \perp AB$ ，

$\therefore \angle CDA = \angle CDB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle A + \angle ACD = 90^\circ$

$\therefore$ 若 $\angle A = \angle BCD$ ，则 $\angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$ ，故 $\angle ACB = 90^\circ$ ，选项A不符合题意；

---

若 $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$ , 则 $\triangle BCD \sim \triangle CAD$ ,  $\angle BCD = \angle A$ , 故 $\angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,

选项 B 不符合题意;

若 $\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD}$ , 则 $\triangle BCD \sim \triangle CAD$ ,  $\angle BCD = \angle A$ , 故 $\angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,

选项 C 不符合题意;

若 $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ , 无法判断 $\triangle BCD \sim \triangle CAD$ , 从而可以不能推出 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 故选项 D

不符合题意;

故选: D.

根据题意和各个选项中的条件, 可以判断各个选项中的条件能否推出 $\triangle BCD \sim \triangle CAD$ , 从而可以判断 $\triangle ABC$ 是否为直角三角形.

本题考查相似三角形的判定和性质, 解答本题的关键是明确题意, 利用数形结合的思想解答.

7. 【答案】 $\frac{5}{3}$

【解析】解:  $\because \frac{x}{2} = \frac{y}{3} (x \neq 0)$ ,

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{x+y}{y}$$

$$= \frac{x}{y} + 1$$

$$= \frac{2}{3} + 1$$

$$= \frac{5}{3}$$

故答案为:  $\frac{5}{3}$

根据 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} (x \neq 0)$ , 可以得到 $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ , 然后将所求式子变形, 再将 $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ 代入计算即可.

本题考查比例的性质, 解答本题的关键是明确题意, 求出 $\frac{x}{y}$ 的值.

8. 【答案】 $-\vec{a} + 3\vec{b}$

---

【解析】解：  $\vec{5a} - 3(\vec{2a} - \vec{b})$

$$= \vec{5a} - \vec{6a} + \vec{3b}$$

$$= -\vec{a} + \vec{3b}.$$

故答案为：  $-\vec{a} + \vec{3b}$ .

先去括号，然后计算加减法.

本题主要考查了平面向量的知识，实数的运算法则同样能应用于平面向量的计算过程中，属于基础题.

9. 【答案】  $(5\sqrt{5} - 5)$

【解析】解：较长线段  $MP = 10 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = (5\sqrt{5} - 5)(cm)$ .

故答案为：  $(5\sqrt{5} - 5)$ .

由黄金分割的定义即可计算.

本题考查黄金分割，掌握黄金分割的定义是解题的关键.

10. 【答案】  $m < 2$

【解析】解：  $\because$  抛物线有最高点，

$\therefore$  抛物线开口向下，

$$\therefore m - 2 < 0,$$

解得  $m < 2$ ,

故答案为：  $m < 2$ .

由抛物线有最高点可得抛物线开口方向，进而求解.

本题考查二次函数的性质，解题关键是掌握二次函数图象与系数的关系.

11. 【答案】  $(0, 1)$

【解析】解：  $\because$  抛物线的对称轴为  $y$  轴，

$$\therefore -\frac{-b}{4} = 0,$$

$$\therefore b = 0,$$

$$\therefore y = 2x^2 + 1,$$

---

$\therefore$  抛物线顶点坐标为  $(0, 1)$ ,

故答案为:  $(0, 1)$ .

由抛物线的对称轴为  $y$  轴可得  $b = 0$ , 进而求解.

本题考查二次函数的性质, 解题关键是掌握二次函数图象与系数的关系.

12. 【答案】  $>$

【解析】解:  $\because y = (x + 1)^2$ ,

$\therefore$  抛物线开口向上, 对称轴为直线  $x = -1$ ,

$\because 2 - (-1) > -1 - (-3)$ ,

$\therefore y_1 > y_2$ .

故答案为:  $>$ .

由二次函数解析式可得抛物线开口方向及对称轴, 进而求解.

本题考查二次函数的性质, 解题关键是掌握二次函数图象上点的坐标特征, 掌握二次函数图象与系数的关系.

13. 【答案】  $4: 9$

【解析】解:  $\because$  两个相似三角形的周长之比是  $4: 9$ ,

$\therefore$  两个相似三角形的相似比为  $4: 9$ ,

$\therefore$  它们的对应角平分线的比为  $4: 9$ .

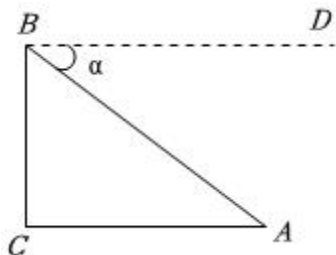
故答案为:  $4: 9$ .

直接利用相似三角形的性质解决问题.

本题考查了相似三角形的性质: 相似三角形(多边形)的周长的比等于相似比; 相似三角形的对应线段(对应中线、对应角平分线、对应边上的高)的比等于相似比.

14. 【答案】  $\frac{3}{\sin \alpha}$

【解析】解：如图：BC为飞机离地面的高度，



由题意得：

$BC \perp AC$ ， $BC = 3$ 千米， $\angle DBA = \alpha$ ， $BD \parallel AC$ ，

$\therefore \angle A = \angle DBA = \alpha$ ，

在 $Rt \triangle ABC$ 中， $AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{3}{\sin \alpha}$  (千米)，

$\therefore$ 此时飞机与目标A点的距离为 $\frac{3}{\sin \alpha}$ 千米，

故答案为： $\frac{3}{\sin \alpha}$ 。

根据题意可得： $BC \perp AC$ ， $BC = 3$ 千米， $\angle DBA = \alpha$ ， $BD \parallel AC$ ，从而可得 $\angle A = \angle DBA = \alpha$ ，然后在 $Rt \triangle ABC$ 中，利用锐角三角函数的定义，进行计算即可解答。

本题考查了解直角三角形的应用—仰角俯角问题，列代数式，熟练掌握锐角三角函数的定义是解题的关键。

15. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】解： $\because \angle ACD = 90^\circ$ ， $\angle D = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle DAC = 45^\circ$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle BCA = \angle DAC = 45^\circ$ ，

又 $\because \angle B = \angle ACD = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle DCA \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \left(\frac{CB}{AC}\right)^2,$$

$\because \angle B = 90^\circ$ ， $\angle BCA = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle CAB = 45^\circ$ ，

$$\therefore \sin \angle CAB = \frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \left(\frac{CB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

故答案为:  $\frac{1}{2}$ .

根据平行线的性质、相似三角形的判定和性质, 可以得到  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \left(\frac{CB}{AC}\right)^2$ , 再根据锐角三角函数

即可求得  $\frac{CB}{AC}$  的值, 从而可以求得  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}}$  的值.

本题考查相似三角形的判定与性质、等腰直角三角形、梯形, 解答本题的关键是明确题意, 利用数形结合的思想解答.

16. 【答案】  $\frac{1}{4}$

【解析】解:  $\because$  线段  $AD$ 、 $BE$  是  $\triangle ABC$  的中线,

$$\therefore \frac{EG}{BG} = \frac{1}{2}, \quad \frac{DG}{AG} = \frac{1}{2},$$

$$\because EF \parallel BC, \quad \frac{FG}{DG} = \frac{EG}{BG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{FG}{AG} = \frac{1}{4}$$

故答案为:  $\frac{1}{4}$ .

由三角形的重心定理得出  $\frac{EG}{BG} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{DG}{AG} = \frac{1}{2}$ , 由平行线分线段成比例定理得出  $\frac{FG}{DG} = \frac{EG}{BG} = \frac{1}{2}$ , 即可得出结果.

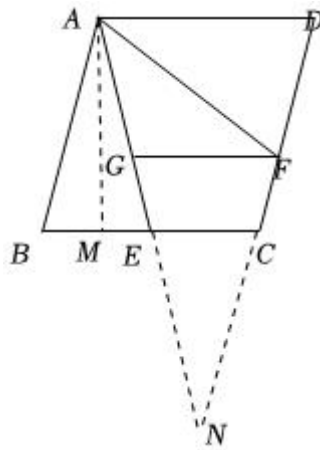
本题考查了平行线分线段成比例定理、三角形的重心定理; 熟练掌握三角形的重心定理, 由平行线分线段成比例定理得出  $FG: DG = 1: 2$  是解决问题的关键

17. 【答案】  $\frac{16}{3}$

【解析】解: 作  $AM \perp BC$  于  $M$ , 延长  $AE$ 、 $DC$  交于点  $N$ ,

$$\because \cos B = \frac{1}{4}, \quad AB = 8,$$

$$\therefore BM = 2,$$



---

∵点 $E$ 为 $BC$ 的中点,

$$\therefore BE = 4,$$

$$\therefore ME = BM = 2,$$

∴  $AM$ 垂直平分 $BE$ ,

$$\therefore AB = AE = 8,$$

∵  $AF$ 平分 $\angle EAD$ ,

$$\therefore \angle DAF = \angle GAF,$$

∵  $AD \parallel GF$ ,

$$\therefore \angle DAF = \angle AFG,$$

$$\therefore \angle GAF = \angle GFA,$$

$$\therefore AG = FG,$$

设 $AG = FG = x$ ,

$$\therefore EG = 8 - x,$$

∵  $BE = CE$ ,  $\angle AEB = \angle NEC$ ,  $\angle ABE = \angle NCE$ ,

∴  $\triangle ABE \cong \triangle NCE (ASA)$ ,

$$\therefore NE = AE = 8,$$

∵  $CE \parallel FG$ ,

∴  $\triangle NCE \sim \triangle NFG$ ,

$$\therefore \frac{4}{x} = \frac{8}{16-x},$$

$$\text{解得 } x = \frac{16}{3},$$

$$\therefore FG = \frac{16}{3},$$

故答案为:  $\frac{16}{3}$ .

作 $AM \perp BC$ 于 $M$ , 延长 $AE$ 、 $DC$ 交于点 $N$ , 首先说明 $AM$ 垂直平分 $BE$ , 可得 $AB = AE$ , 再证明 $\triangle ABE \cong \triangle NCE (ASA)$ , 得 $NE = AE = 8$ , 由 $CE \parallel FG$ , 得 $\triangle NCE \sim \triangle NFG$ , 从而解决问题.

本题主要考查了菱形的性质, 线段垂直平分线的性质, 全等三角形的判定与性质, 相似三角形的判定与性质等知识, 熟练掌握菱形的性质是解题的关键.

18. 【答案】  $\frac{25}{7}$

【解析】解：如图，延长  $A'D$  交  $AB$  于点  $G$ ，

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AC = 4, BC = 3,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$$\because A'D \perp AC,$$

$$\therefore \angle A'DC = \angle ADG = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because CA' \parallel AB,$$

$$\therefore \angle A'CD = \angle A,$$

$$\therefore A'D = CD \cdot \tan \angle A'CD = CD \cdot \tan A = \frac{3}{4}CD,$$

$$\text{由翻折得 } AD = A'D = \frac{3}{4}CD,$$

$$\therefore AD = \frac{3}{4}(4 - AD),$$

$$\text{解得 } AD = \frac{12}{7},$$

$$\therefore GD = AD \cdot \tan A = \frac{3}{4}AD = \frac{3}{4} \times \frac{12}{7} = \frac{9}{7}, \quad CD = 4 - \frac{12}{7} = \frac{16}{7},$$

$$\therefore AG = \sqrt{AD^2 + GD^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2} = \frac{15}{7},$$

$$\therefore BG = 5 - \frac{15}{7} = \frac{20}{7},$$

$$\because \angle A'DE = \angle ADE = \frac{360^\circ - 90^\circ}{2} = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore CF = CD \cdot \tan \angle CDF = CD \cdot \tan 45^\circ = CD \times 1 = CD = \frac{16}{7},$$

$$\therefore BF = 3 - \frac{16}{7} = \frac{5}{7}$$

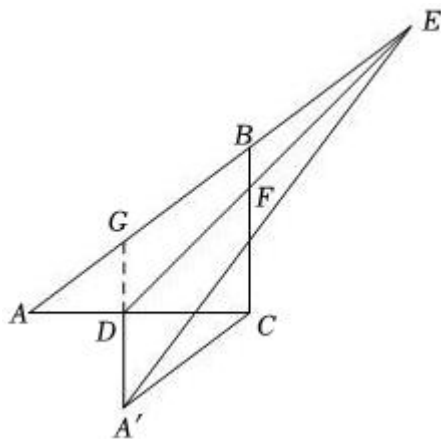
$$\therefore BF \parallel GD,$$

$$\therefore \triangle EBF \sim \triangle EGD,$$

$$\therefore \frac{BE}{GE} = \frac{BF}{GD},$$

$$\therefore \frac{BE}{BE + \frac{20}{7}} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{9}{7}},$$

$$\text{解得 } BE = \frac{25}{7},$$



故答案为:  $\frac{25}{7}$ .

延长  $A'D$  交  $AB$  于点  $G$ , 由  $A'D \perp AC$ , 得  $\angle A'DC = \angle ADG = \angle ACB = 90^\circ$ , 由  $CA' \parallel AB$ , 得  $\angle A'CD = \angle A$ , 则  $A'D = CD \cdot \tan \angle A'CD = CD \cdot \tan A = \frac{3}{4}CD$ , 所以  $AD = \frac{3}{4}(4 - AD)$ , 求得  $AD = \frac{12}{7}$ , 则  $GD = \frac{3}{4}AD = \frac{9}{7}CD = \frac{16}{7}$ , 由勾股定理得  $AG = \sqrt{AD^2 + GD^2} = \frac{15}{7}$ , 则  $BG = 5 - \frac{15}{7} = \frac{20}{7}$ , 可证明  $\angle CDF = 45^\circ$ , 则  $CF = CD = \frac{16}{7}$ ,  $BF = \frac{5}{7}$  再证明  $\triangle EBF \sim \triangle EGD$ , 即可根据相似三角形的对应边成比例求得  $BE = \frac{25}{7}$ .

此题重点考查勾股定理、轴对称的性质、相似三角形的判定与性质、锐角三角函数与解直角三角形等知识, 正确地作出所需要的辅助线是解题的关键.

19. 【答案】解: 原式  $= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{3} + 2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$   
 $= 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 \times \frac{1}{2}$   
 $= 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} + 1.$

【解析】直接利用特殊角的三角函数值代入, 进而计算得出答案.

此题主要考查了特殊角的三角函数值, 正确记忆相关数据是解题关键.

20. 【答案】解: (1)  $\because AD \parallel BC, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, BC = 3AD,$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b},$$

$$\because AD \parallel EC, AE \parallel CD,$$

$\therefore$  四边形  $AECD$  是平行四边形,

$$\therefore AD = EC,$$

$$\therefore BE = 2EC,$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b},$$

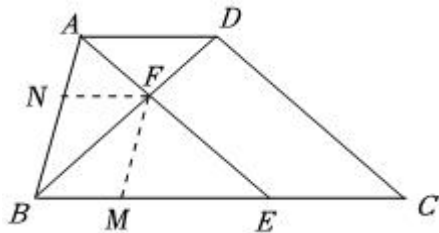
$$\because AD \parallel BE,$$

$$\therefore \frac{AF}{FE} = \frac{AD}{BE} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore AF = \frac{1}{3}AE,$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b};$$

(2)如图,  $\overrightarrow{BN}$ ,  $\overrightarrow{BM}$ 即为所求.



**【解析】**(1)利用平行线的性质, 平行四边形的判定和性质, 三角形法则求解即可;

(2)利用平行四边形法则画出图形即可.

本题考查作图—复杂作图, 梯形的性质, 平面向量等知识, 解题的关键是掌握三角形法则, 属于中考常考题型.

**21. 【答案】**解: (1)作  $DF \perp BC$  于点  $F$ ,

$$\because AE \perp BC,$$

$$\therefore DF \parallel AE,$$

$$\therefore \frac{DF}{AE} = \frac{CD}{CA},$$

$$\because CD = 2AD, \quad CD + AD = CA,$$

$$\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{2}{3}$$

$$\because AE = 9,$$

$$\therefore \frac{DF}{9} = \frac{2}{3},$$

$$\text{解得 } DF = 6,$$

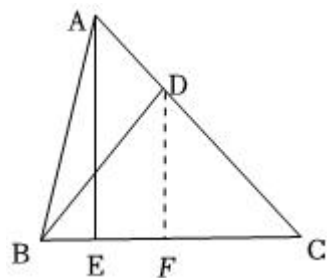
$$\because \sin \angle CBD = \frac{3}{4} \quad \sin \angle CBD = \frac{DF}{BD},$$

$$\therefore \frac{6}{BD} = \frac{3}{4}$$

$$\text{解得 } BD = 8;$$

$$(2) \because BD = CD, \quad DF \perp BC,$$

$$\therefore BF = CF,$$



---

由(1)知:  $DF = 6$ ,  $BD = 8$ ,  $\angle DFC = 90^\circ$ ,

$$\therefore CF = \sqrt{CD^2 - DF^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore BF = 2\sqrt{7},$$

$$\because DF \parallel AE, CD = 2AD,$$

$$\therefore CF = 2EF,$$

$$\therefore EF = \sqrt{7},$$

$$\therefore BE = BF - EF = 2\sqrt{7} - \sqrt{7} = \sqrt{7},$$

$$\therefore \tan \angle BAE = \frac{BE}{AE} = \frac{\sqrt{7}}{9}.$$

**【解析】**(1)作  $DF \perp BC$  于点  $F$ , 根据平行线分线段成比例, 可以得到  $DF$  的长, 再根据  $\sin \angle CBD = \frac{3}{4}$ , 即可得到  $BD$  的长;

(2)根据(1)中的结论和勾股定理, 可以得到  $BE$  的长, 然后即可计算出  $\tan \angle BAE$  的值.

本题考查解直角三角形, 解答本题的关键是明确题意, 作出合适的辅助线, 利用数形结合的思想解答.

**22. 【答案】**解: 如图 1, 连接  $AE$  并延长, 交  $BC$  于点  $G$ ,

由题意可知,  $AB = 9$  米,  $EF = 3$  米,  $FG = 4$  米,

$$\because AB \perp BC, EF \perp BC,$$

$$\therefore AB \parallel EF,$$

$$\therefore \triangle GEF \sim \triangle GAB,$$

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BG}, \text{ 即 } \frac{3}{9} = \frac{4}{BG},$$

$$\therefore BG = 12 \text{ 米},$$

$$\therefore BF = BG - FG = 12 - 4 = 8 \text{ (米)},$$

$\therefore$  标尺与路灯间的距离为 8 米;

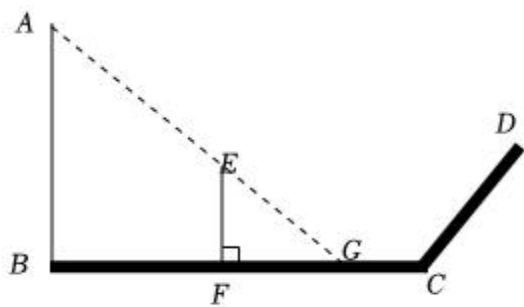


图1

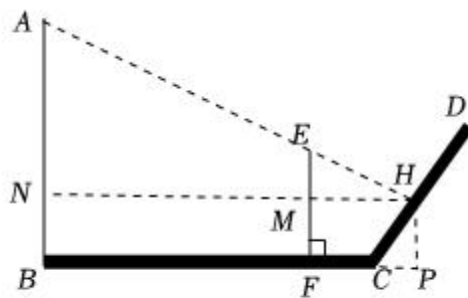


图2

(2)如图 2, 连接  $AE$  并延长, 交  $CD$  于点  $H$ , 过点  $H$  作  $HN \perp AB$  于点  $N$ , 交  $EF$  于点  $M$ , 过点  $H$  作  $HP \perp BC$  交  $BC$  延长线于点  $P$ ,

由题意可得,  $CF + CH = 4$  米,  $\frac{HP}{CP} = \frac{3}{4}$ ,

设  $CH = x$  米, 则  $CF = (4 - x)$  米,  $HP = \frac{3}{5}x$  米,  $CP = \frac{4}{5}x$  米,

$\therefore MF = BN = HP = \frac{3}{5}x$  米,  $MH = 4 - x + \frac{4}{5}x = (4 - \frac{1}{5}x)$  米,

$\therefore AN = (9 - \frac{3}{5}x)$  米,  $ME = (3 - \frac{3}{5}x)$  米,

$\because BC = 15.5$  米,

$\therefore NH = (15.5 + \frac{4}{5}x)$  米,

$\because AB \perp BC, EF \perp BC$ ,

$\therefore AB \parallel EF$ ,

$\therefore \angle EMH = \angle ANH, \angle HEM = \angle HAN$ ,

$\therefore \triangle HEM \sim \triangle HAN$ ,

$\therefore \frac{ME}{AN} = \frac{MH}{NH}$ , 即  $\frac{3 - \frac{3}{5}x}{9 - \frac{3}{5}x} = \frac{4 - \frac{1}{5}x}{15.5 + \frac{4}{5}x}$ ,

整理得:  $2x^2 + 9x - 35 = 0$ ,

解得:  $x_1 = -7$  (不符合题意, 舍去),  $x_2 = \frac{5}{2}$ ,

则  $CF = 4 - x = 4 - \frac{5}{2} = 1.5$  (米),

$\therefore BF = BC - CF = 15.5 - 1.5 = 14$  (米),

$\therefore$  此时标尺与路灯间的距离为 14 米.

**【解析】**(1)连接  $AE$  并延长, 交  $BC$  于点  $G$ , 根据题意可得  $AB \parallel EF$ , 易证明  $\triangle GEF \sim \triangle GAB$ , 根据相似三角形的性质即可求解.

(2)连接 $AE$ 并延长,交 $CD$ 于点 $H$ ,过点 $H$ 作 $HN \perp AB$ 于点 $N$ ,交 $EF$ 于点 $M$ ,过点 $H$ 作 $HP \perp BC$ 交 $BC$ 延长线于点 $P$ ,根据题意可得 $CF + CH = 4$ 米, $\frac{HP}{CP} = \frac{3}{4}$  设 $CH = x$ 米,则 $CF = (4 - x)$ 米, $HP = \frac{3}{5}x$ 米, $CP = \frac{4}{5}x$ 米,再分别表示出 $MH$ 、 $AN$ 、 $ME$ 、 $NH$ 的长,易证 $\triangle HEM \sim \triangle HAN$ ,根据相似三角形的性质可得关于 $x$ 的方程,求解即可.

本题主要考查解直角三角形的应用—坡度坡脚问题、中心投影、相似三角形的判定与性质,在解决坡度的有关问题中,一般通过作高构成直角三角形,坡角即是一锐角,坡度实际就是一锐角的正切值,水平宽度或铅直高度都是直角边,实质也是解直角三角形问题.

23.【答案】证明: (1)  $\because$  点 $G$ 是 $AB$ 边上的中点,

$$\therefore BG = GA,$$

$$\because BG^2 = GE \cdot GC,$$

$$\therefore GA^2 = GE \cdot GC,$$

$$\therefore \frac{GE}{GA} = \frac{GA}{GC},$$

$$\because \angle EGA = \angle AGC,$$

$$\therefore \triangle EGA \sim \triangle AGC,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle GCA.$$

$$(2) \because BG^2 = GE \cdot GC,$$

$$\therefore \frac{GE}{BG} = \frac{BG}{GC},$$

$$\because \angle EGB = \angle BGC,$$

$$\therefore \triangle EGB \sim \triangle BGC,$$

$$\therefore \angle GBE = \angle GCB,$$

$$\therefore \angle AED = \angle GAE + \angle GBE = \angle GCA + \angle GCB = \angle FCB,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle FBC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle FBC,$$

$$\therefore \frac{AD}{FB} = \frac{DE}{BC},$$

$$\therefore AD \cdot BC = FB \cdot DE,$$

$$\because \triangle ADF \sim \triangle CBF, AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \frac{DF}{FB} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore FB = 2DF,$$

$$\therefore AD \cdot BC = 2DF \cdot DE.$$

【解析】(1)由 $BG = GA$ ，且 $BG^2 = GE \cdot GC$ ，得 $GA^2 = GE \cdot GC$ ，则 $\frac{GE}{GA} = \frac{GA}{GC}$ ，即可根据

“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”证明 $\triangle EGA \sim \triangle AGC$ ，则 $\angle GAE = \angle GCA$ ；

(2)先证明 $\triangle EGB \sim \triangle BGC$ ，得 $\angle GBE = \angle GCB$ ，则 $\angle AED = \angle GAE + \angle GBE =$

$\angle GCA + \angle GCB = \angle FCB$ ，由 $AD \parallel BC$ ，得 $\angle ADE = \angle FBC$ ，所以 $\triangle ADE \sim \triangle FBC$ ，

得 $\frac{AD}{FB} = \frac{DE}{BC}$ ，所以 $AD \cdot BC = FB \cdot DE$ ，再证明 $\triangle ADF \sim \triangle CBF$ ，推导出 $FB = 2DF$ ，则

$$AD \cdot BC = 2DF \cdot DE.$$

此题重点考查相似三角形的判定与性质、平行线的性质、三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和等知识，证明 $\triangle ADE \sim \triangle FBC$ 是解题的关键.

24. 【答案】解：(1)  $\because$  抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \text{ ①},$$

$\because$  抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 经过点 $A(4, 0)$ ,

$$\therefore 16a + 4b + 2 = 0 \text{ ②},$$

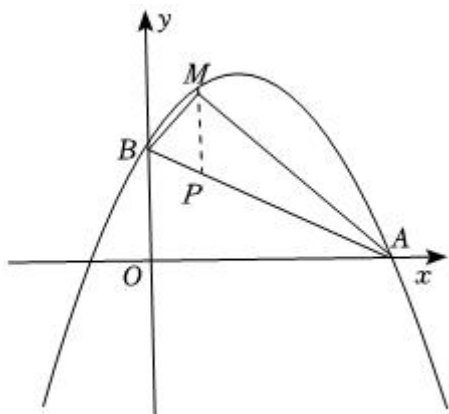
由①②可得 $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{3}{2}$ ,

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2,$$

在 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ 中，令 $x = \frac{3}{2}$ 得： $y = -\frac{1}{2} \times (\frac{3}{2})^2 + \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + 2 = \frac{25}{8}$ ,

$\therefore$  抛物线顶点 $D$ 的坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{25}{8})$ ;

(2)过 $M$ 作 $MP \parallel y$ 轴交 $AB$ 于 $P$ ，如图：



在  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$  中, 令  $x = 0$  得  $y = 2$ ,

$\therefore B(0, 2)$ ,

$\therefore A(4, 0)$ ,

$\therefore$  直线  $AB$  解析式为  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ ,

在  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$  中, 令  $x = 1$  得  $y = 3$ ,

$\therefore M(1, 3)$ ,

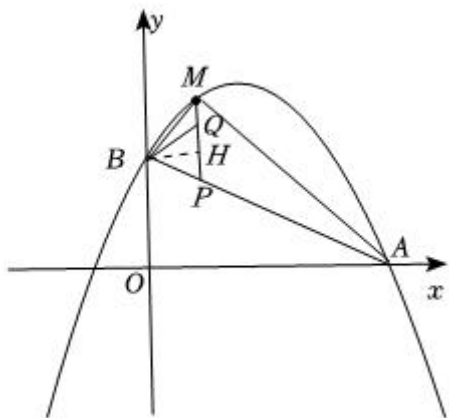
在  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  中, 令  $x = 1$  得  $y = \frac{3}{2}$ ,

$\therefore P(1, \frac{3}{2})$ ,

$\therefore PM = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ,

$\therefore S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}PM \times |x_A - x_B| = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 4 = 3$ ,

(3) 过  $B$  作  $BH \perp MP$  于  $H$ , 如图:



由 (2) 知,  $B(0, 2)$ ,  $M(1, 3)$ ,

$\therefore BH = MH = 1$ ,  $BM^2 = 2$ ,

$\therefore \triangle BMH$  是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle BMQ = 45^\circ,$$

$$\because A(4,0),$$

$$\therefore AB^2 = 20, AM^2 = 18,$$

$$\therefore AM^2 + BM^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle AMB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMP = 90^\circ - \angle BMQ = 45^\circ = \angle BMQ,$$

要使  $\triangle BMQ$  与  $\triangle AMP$  相似, 只需  $\frac{MQ}{MP} = \frac{BM}{AM}$  或  $\frac{MQ}{AM} = \frac{BM}{MP}$ ,

设  $Q(1, t)$ , 则  $MQ = 3 - t$ ,

$$\text{当 } \frac{MQ}{MP} = \frac{BM}{AM} \text{ 时, } \frac{3-t}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}},$$

$$\text{解得 } t = \frac{5}{2},$$

$$\therefore Q(1, \frac{5}{2}),$$

$$\text{当 } \frac{MQ}{AM} = \frac{BM}{MP} \text{ 时, } \frac{3-t}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{3}{2}},$$

$$\text{解得 } t = -1,$$

$$\therefore Q(1, -1),$$

综上所述,  $Q$  的坐标为  $(1, \frac{5}{2})$  或  $(1, -1)$ .

**【解析】**(1) 由抛物线  $y = ax^2 + bx + 2$  的对称轴为直线  $x = \frac{3}{2}$ , 得  $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$  ①, 抛物线  $y = ax^2 + bx + 2$  经过点  $A(4,0)$ , 有  $16a + 4b + 2 = 0$  ②, 可解得  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{3}{2}$ ,  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ , 即得抛物线顶点  $D$  的坐标为  $(\frac{3}{2}, \frac{25}{8})$ ;

(2) 过  $M$  作  $MP \parallel y$  轴交  $AB$  于  $P$ , 在  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$  中, 得  $B(0,2)$ , 故直线  $AB$  解析式为  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ , 令  $x = 1$  得  $P(1, \frac{3}{2})$ , 在  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$  中, 可得  $M(1,3)$ , 从而  $PM = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ,

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}PM \times |x_A - x_B| = 3;$$

(3) 过  $B$  作  $BH \perp MP$  于  $H$ , 由  $B(0,2)$ ,  $M(1,3)$ , 可得  $BH = MH = 1$ ,  $BM^2 = 2$ , 即知

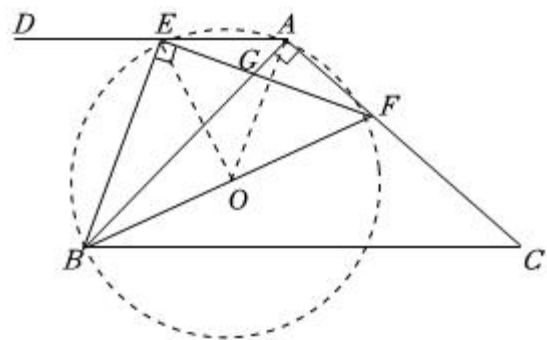
$\angle BMQ = 45^\circ$ , 可求出  $AM^2 + BM^2 = AB^2$ ,  $\angle AMB = 90^\circ$ , 故  $\angle AMP = 90^\circ - \angle BMQ =$

$45^\circ = \angle BMQ$ , 要使  $\triangle BMQ$  与  $\triangle AMP$  相似, 只需  $\frac{MQ}{MP} = \frac{BM}{AM}$  或  $\frac{MQ}{AM} = \frac{BM}{MP}$ , 设  $Q(1, t)$ , 则

$MQ = 3 - t$ , 即得  $\frac{3-t}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$  或  $\frac{3-t}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{3}{2}}$ , 分别解方程可得答案.

本题考查二次函数综合应用, 涉及待定系数法, 三角形面积, 相似三角形等知识, 解题的关键是用含字母的代数式表示相关点坐标和相关线段的长度.

25. 【答案】(1)证明: 取  $BF$  的中点  $O$ , 连接  $OE$ ,  $OA$ .



$$\because \angle BEF = \angle BAF = 90^\circ, OB = OF,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}BF, OA = \frac{1}{2}BF,$$

$$\therefore OE = OB = OA = OF,$$

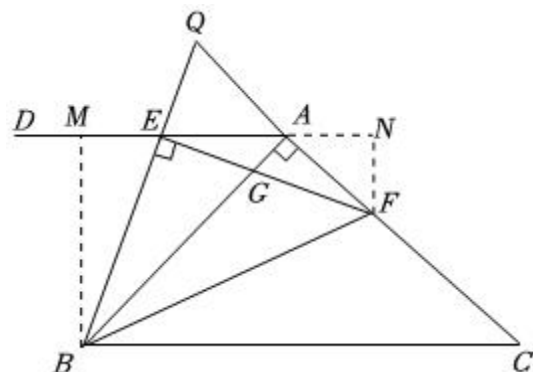
$$\therefore E, B, F, A \text{ 四点共圆},$$

$$\therefore \angle AEG = \angle GBF,$$

$$\because \angle AGE = \angle FGB,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle FBG;$$

(2)解: 过点  $B$  作  $BM \perp AD$  于点  $M$ , 过点  $F$  作  $FN \perp DA$  交  $DA$  的延长线于点  $N$ .



$$\because AB = AC = 4, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{2}AB = 4\sqrt{2}$$

---


$$\begin{aligned}
&\because \angle BME = \angle BEF = \angle N = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BEM + \angle FEN = 90^\circ, \quad \angle FEN + \angle EFN = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BEM = \angle EFN, \\
&\because BE = EF, \\
&\therefore \triangle BME \cong \triangle ENF (AAS), \\
&\therefore BM = EN = EM = FN, \\
&\because AD \parallel CB, \\
&\therefore \angle DAB = \angle ABC = 45^\circ, \quad \angle NAF = \angle C = 45^\circ, \\
&\therefore BM = AM = EN = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 2\sqrt{2}, \\
&\therefore AM = NF = 2\sqrt{2} - x, \\
&\therefore AF = \sqrt{2}AN = 4 - \sqrt{2}x, \\
&\therefore AQ = y - (4 - \sqrt{2}x), \\
&\because AE \parallel CB, \\
&\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{AQ}{QC}, \\
&\therefore \frac{x}{4\sqrt{2}} = \frac{y - (4 - \sqrt{2}x)}{y - (4 - \sqrt{2}x) + 4}, \\
&\therefore y = \frac{\sqrt{2}x^2 - 8x + 16\sqrt{2}}{4\sqrt{2} - x} \quad (0 < x \leq 2\sqrt{2});
\end{aligned}$$

(3)解: 当点 $F$ 在线段 $AC$ 上时,  $\because BE = 3, BM = 2\sqrt{2}$ ,

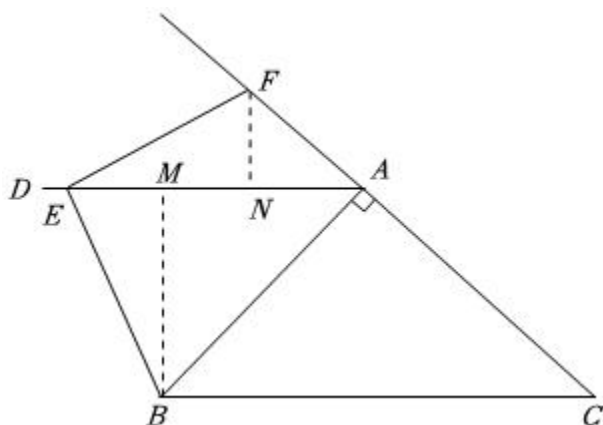
$$\therefore ME = \sqrt{BE^2 - BM^2} = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1,$$

$$\therefore AN = AF = 1,$$

$$\therefore AF = \sqrt{2},$$

$$\therefore CF = AC - AF = 4 - \sqrt{2}.$$

当点 $F$ 在 $CA$ 的延长线上时, 过点 $B$ 作 $BM \perp AD$ 于点 $M$ , 过点 $F$ 作 $FN \perp DA$ 交 $DA$ 于点 $N$ .



同法可证  $EM = FN = AN = 1$ ,

$$\therefore AF = \sqrt{2},$$

$$\therefore CF = AF + AC = 4 + \sqrt{2}.$$

综上所述, 满足条件的  $CF$  的值为  $4 - \sqrt{2}$  或  $4 + \sqrt{2}$ .

**【解析】** (1) 取  $BF$  的中点  $O$ , 连接  $OE$ ,  $OA$ . 证明  $EBFA$  四点共圆, 可得结论;

(2) 过点  $B$  作  $BM \perp AD$  于点  $M$ , 过点  $F$  作  $FN \perp DA$  交  $DA$  的延长线于点  $N$ . 证明

$\triangle BME \cong \triangle ENF$  (AAS), 推出  $BM = EN = EM = FN$ , 解直角三角形可得  $BM =$

$AM = EN = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 2\sqrt{2}$ , 推出  $AM = NF = 2\sqrt{2} - x$ , 推出  $AF = \sqrt{2}AN = 4 - \sqrt{2}x$ , 可

得  $AQ = y - (4 - \sqrt{2}x)$ , 由  $AE \parallel CB$ , 推出  $\frac{AE}{BC} = \frac{AQ}{QC}$ , 由此构建关系式, 可得结论;

(3) 分两种情形: 当点  $F$  在线段  $AC$  上时, 当点  $F$  在  $CA$  的延长线上时, 分别求解可得结论.

本题属于相似形综合题, 考查了等腰直角三角形的性质, 全等三角形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质, 解直角三角形等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造全等三角形解决问题.

