

2023 年 3 月学业质量调研

九年级数学

(满分 150 分, 时间 100 分钟)

一、选择题: (本题共 6 题, 每小题 4 分, 满分 24 分) 每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 下列各组图形中, 一定相似的是 ()

- A. 两个矩形 B. 两个菱形 C. 两个正方形 D. 两个等腰梯形

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据相似图形的定义, 四条边对应成比例, 四个角对应相等, 对各选项分析判断后利用排除法解答.

【详解】 A、两个矩形四个角相等, 但是各边不一定对应成比例, 所以不一定相似, 故不符合题意;

B、两个菱形, 对应边成比例, 对应角不一定相等, 不符合相似的定义, 故不符合题意;

C、两个正方形, 对应角相等, 对应边一定成比例, 一定相似, 故符合题意;

D、两个等腰梯形同一底上的角不一定相等, 对应边不一定成比例, 不符合相似的定义, 故不符合题意.

故选: C.

【点睛】 本题主要考查了相似形的定义, 熟练掌握矩形、等腰梯形、菱形、正方形的性质是解题的关键.

2. 将函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像向右平移 2 个单位, 下列结论中正确的是 ()

- A. 开口方向不变 B. 顶点不变 C. 对称轴不变 D. 与 y 轴的交点不变

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据二次函数图象的平移规律: 左右平移, x 改变: 左加右减, y 不变, 即可判定 B、C、D 选项错误; 开口方向与 a 有关, a 不变, 则开口方向不变, 则 A 正确.

【详解】 开口方向与 a 有关, a 不变, 则开口方向不变, A 选项正确;

左右平移, x 改变, 则顶点改变, B 选项错误;

左右平移, x 改变, 则对称轴改变, C 选项错误;

左右平移, x 改变, 则与 y 轴的交点改变, D 选项错误.

故答案为: A.

【点睛】 本题考查了二次函数图象的平移规律: 左右平移, x 改变: 左加右减, y 不变; 上下平移, x 不变, y 改变, 上加下减; 同时考查了二次函数图象开口方向, 开口方向与 a 有关, a 不变, 则开口方向不变.

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 4$, $AC = 3$, 那么 $\cos A$ 的值是 ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

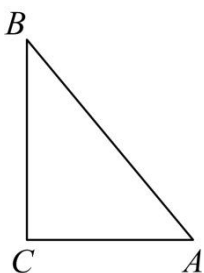
【答案】C

【解析】

【分析】先画出图形, 再由锐角三角函数的定义求解即可.

【详解】解: $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$,

故选: C.



【点睛】本题考查了锐角三角函数的定义, 解答本题的关键是余弦的定义.

4. 已知 $\vec{e}$ 为单位向量, 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 方向相反, 且其模为 $|\vec{e}|$ 的 4 倍; 向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{e}$ 方向相同, 且其模为 $|\vec{e}|$ 的 2 倍, 则下列等式中成立的是 ()

- A. $\vec{a} = 2\vec{b}$ B. $\vec{a} = -2\vec{b}$ C. $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$ D. $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据平面向量的性质得到 $\vec{a} = -4\vec{e}$, $\vec{b} = 2\vec{e}$, 从而得到 $\vec{a} = -2\vec{b}$.

【详解】解: 根据题意知, $\vec{a} = -4\vec{e}$, $\vec{b} = 2\vec{e}$,

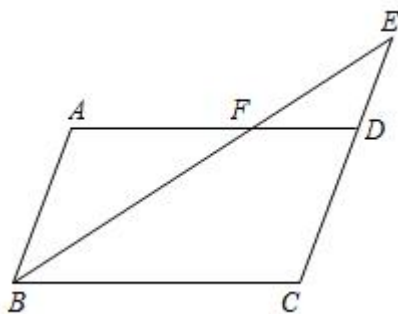
则 $\vec{e} = -\frac{1}{4}\vec{a}$, $\vec{e} = \frac{1}{2}\vec{b}$,

则 $\vec{a} = -2\vec{b}$, 观察选项, 只有选项 B 符合题意.

故选: B.

【点睛】此题考查了平面向量的知识. 此题比较简单, 注意掌握单位向量的知识.

5. 四边形 $ABCD$ 中, 点 F 在边 AD 上, BF 的延长线交 CD 的延长线于 E 点, 下列式子中能判断 $AD \parallel BC$ 的式子是 ()



- A. $\frac{FD}{BC} = \frac{ED}{EC}$ B. $\frac{AF}{DF} = \frac{BF}{EF}$ C. $\frac{AB}{ED} = \frac{AF}{FD}$ D. $\frac{EF}{BE} = \frac{ED}{EC}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据相似三角形的判定与性质、平行线的判定方法逐项判断即可.

【详解】解: A. $\frac{FD}{BC} = \frac{ED}{EC}$, 结合 $\angle FED = \angle BEC$ 不能证明 $\triangle FED \sim \triangle BEC$, 不能推出 $\angle EFD = \angle EBC$, 因此不能判断 $AD \parallel BC$, 不合题意;

B. $\frac{AF}{DF} = \frac{BF}{EF}$, 结合 $\angle AFB = \angle DFE$, 可证 $\triangle AFB \sim \triangle DFE$, 可得 $\angle A = \angle FDE$, 可以判断 $AB \parallel DC$, 不能判断 $AD \parallel BC$, 不合题意;

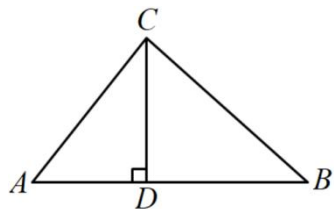
C. $\frac{AB}{ED} = \frac{AF}{FD}$, 结合 $\angle AFB = \angle DFE$, 不能证明 $\triangle AFB \sim \triangle DFE$, 不能判断 $AB \parallel DC$, 也不能判断 $AD \parallel BC$, 不合题意;

D. $\frac{EF}{BE} = \frac{ED}{EC}$, 结合 $\angle FED = \angle BEC$ 可证 $\triangle FED \sim \triangle BEC$, 推出 $\angle EFD = \angle EBC$, 能够判断 $AD \parallel BC$, 符合题意;

故选 D.

【点睛】本题考查相似三角形的判定与性质、平行线的判定, 解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定方法.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $CD \perp AB$, 垂足为点 D , 以下条件中不能推出 $\triangle ABC$ 为直角三角形的是 ()



- A. $\angle A = \angle BCD$ B. $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$ C. $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$ D. $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$

【答案】D

【解析】

【分析】此题根据直角三角形的定义和相似三角形的判定方法判断即可.

【详解】A. 因为 $\angle A = \angle BCD$, $\angle A + \angle ACD = 90^\circ$, 所以 $\angle BCD + \angle ACD = 90^\circ$, 即 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 故 A 正确.

B. 因为 $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$, 而且 $\angle BDC = \angle ADC = 90^\circ$, 所以 $\triangle ADC \sim \triangle CDB$, 那么 $\angle B = \angle ACD$, 因为 $\angle B + \angle BCD = 90^\circ$, 所以 $\angle BCD + \angle ACD = 90^\circ$, 即 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 故 B 正确.

C. 因为 $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$, 而且 $\angle B = \angle B$, 所以 $\triangle CDB \sim \triangle ACB$, 那么 $\angle ACB = \angle BDC = 90^\circ$, 即 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 故 C 正确.

D. $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$, 而且 $\angle BDC = \angle ADC = 90^\circ$, 所以 $\triangle ADC \sim \triangle CDB$, 因为 $CD = CD$, 所以两三角形全等, 只能说明 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 无法说明是直角三角形, 故 D 错误.

故选: D

【点睛】此题考查相似三角形, 解题关键是熟练掌握相似三角形的判定方法.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 若 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, 且 $xy \neq 0$, 则 $\frac{x+y}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】由等式 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, 两边同时除以 $\frac{y}{2}$, 可得 $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, 进而根据分式的性质求解即可

【详解】 $\because \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, 且 $xy \neq 0$,

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{x+y}{y} = \frac{x}{y} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

故答案为: $\frac{5}{3}$

【点睛】本题考查了分式的性质, 等式的性质, 掌握分式的性质是解题的关键.

8. 计算: $5\vec{a} - 3(2\vec{a} - \vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\vec{a} + 3\vec{b}$

【解析】

【分析】直接利用实数与向量相乘及平面向量的加减运算法则去括号求解即可求得答案.

【详解】解: $5\vec{a}-3(2\vec{a}-\vec{b})$

$$=5\vec{a}-6\vec{a}+3\vec{b}$$

$$=-\vec{a}+3\vec{b},$$

故答案为: $-\vec{a}+3\vec{b}$.

【点睛】此题考查了平面向量的运算法则. 注意掌握去括号时的符号变化是解此题的关键.

9. 点 P 是线段 MN 的黄金分割点, 如果 $MN=10\text{cm}$, 那么较长线段 MP 的长是_____ cm .

【答案】 $(5\sqrt{5}-5)$

【解析】

【分析】根据黄金分割点的定义, 得到 $\frac{MP}{MN}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 求解即可.

【详解】解: 由题意, 得: $\frac{MP}{MN}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 即: $\frac{MP}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$$\therefore MP=(5\sqrt{5}-5)\text{cm};$$

故答案为: $(5\sqrt{5}-5)$.

【点睛】本题考查黄金分割点. 熟练掌握黄金分割点的定义, 是解题的关键.

10. 如果抛物线 $y=(m-2)x^2$ 有最高点, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m<2$

【解析】

【分析】根据二次函数 $y=(m-2)x^2$ 有最高点, 得出抛物线开口向下, 即 $m-2<0$, 即可得出答案.

【详解】解: $\because$ 抛物线 $y=(m-2)x^2$ 有最高点,

$\therefore$ 抛物线开口向下,

$$\therefore m-2<0,$$

$$\therefore m<2,$$

故答案为: $m<2$.

【点睛】此题主要考查二次函数的图象与性质, 解题的关键是熟知二次函数的最值与开口方向的特点.

11. 如果抛物线 $y=2x^2-bx+1$ 的对称轴是 y 轴, 那么它的顶点坐标为_____.

【答案】 $(0,1)$

【解析】

【分析】 由题意知 $x = -\frac{b}{2a} = 0$ ，即可解得抛物线为 $y = 2x^2 + 1$ ，将 $x = 0$ 代入即可求得顶点坐标.

【详解】 解： $\because y = 2x^2 - bx + 1$ 的对称轴是 y 轴，

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{-b}{2 \times 2} = 0,$$

解得： $b = 0$

$\therefore$ 抛物线为： $y = 2x^2 + 1$ ，

将 $x = 0$ 代入 $y = 2x^2 + 1$ 得： $y = 2 \times 0^2 + 1 = 1$ ，

$\therefore$ 顶点坐标为 $(0,1)$.

故答案为： $(0,1)$.

【点睛】 本题主要考查了二次函数的图象及其性质，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$ ，与 y 轴的交点为 $(0, c)$.

12. 已知点 $A(-2, y_1)$ 、 $B(-3, y_2)$ 为二次函数 $y = (x+1)^2$ 图像上的两点，那么 y_1 _____ y_2 . (填 “>”、“=” 或 “<”)

【答案】 <

【解析】

【分析】 由于知道二次函数的解析式，且知道 A 、 B 两点的横坐标，故可将两点的横坐标代入二次函数解析式求出 y_1 、 y_2 值，再比较即可

【详解】 解： 当 $x = -2$ 时，

$$y_1 = (-2+1)^2 = 1,$$

当 $x = -3$ 时，

$$y_2 = (-3+1)^2 = 4,$$

$$\therefore y_1 < y_2.$$

故答案为： <.

【点睛】 本题考查了二次函数图像上的两点 y 值的大小，这类题目的一种算法是将两点的横坐标代入二次函数解析式求出 y 值.

13. 若两个相似三角形的周长比是 4:9, 则对应角平分线的比是_____.

【答案】 4:9

【解析】

【详解】 试题解析: 两个相似三角形的周长比是 4:9.

$\therefore$ 这两个三角形的相似比是 4:9.

对应角平分线的比等于相似比, 是 4:9.

故答案是: 4:9.

点睛: 相似三角形的周长比等于相似比. 对应角平分线, 中线, 高之比都等于相似比. 面积比等于相似比的平方.

14. 飞机离水平地面的高度为 3 千米, 在飞机上测得该水平地面上的目标 A 点的俯角为 α , 那么此时飞机与目标 A 点的距离为_____千米. (用 α 的式子表示)

【答案】 $\frac{3}{\sin \alpha}$

【解析】

【分析】 构造直角三角形, 利用锐角三角函数表示边长即可.

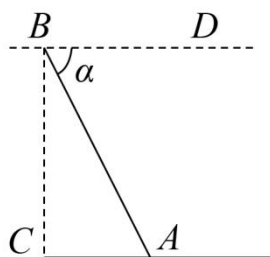
【详解】 如图所示, 飞机在 B 点处, AC 为水平线, 则 $BC \perp AC$

$\therefore BD \parallel AC$

$\therefore \angle BAC = \angle ABD = \alpha$

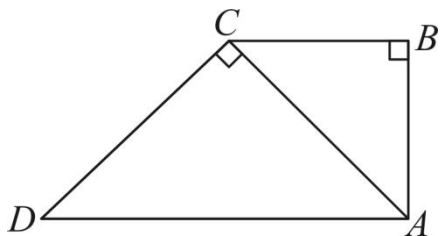
$\therefore \sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{AB}$, 解得 $AB = \frac{3}{\sin \alpha}$

故答案为: $\frac{3}{\sin \alpha}$



【点睛】 此题考查解直角三角形, 解题关键是知道俯角是哪个角, 然后利用正弦值求解.

15. 如图, 在梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = \angle ACD = 90^\circ$, $\angle D = 45^\circ$, 则 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} =$ _____.



【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】证明 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ ， AC 与 AD 为对应边，相似三角形的面积比等于相似比的平方，因此只需求出 $\frac{AC}{AD}$ 即可.

【详解】解： $\because \angle ACD = 90^\circ$ ， $\angle D = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle CAD = \angle D = 45^\circ$ ，

$\therefore AC = CD$ ，

$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{2}AC$ ．

$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ．

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle BCA = \angle CAD = 45^\circ$ ，

又 $\because \angle B = \angle ACD = 90^\circ$ ，

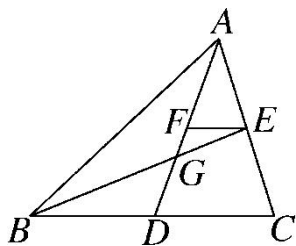
$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD$ ， AC 与 AD 为对应边，

$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \left(\frac{AC}{AD}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ，

故答案为： $\frac{1}{2}$ ．

【点睛】 本题考查勾股定理、等腰三角形的判定、相似三角形的判定与性质，解题的关键是掌握相似三角形的面积比等于相似比的平方．

16. 如图， $\triangle ABC$ 的两条中线 AD 和 BE 相交于点 G ，过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AD 于点 F ，那么 $\frac{FG}{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】根据重心的性质得到 $AG=2DG$ ， $BG=2GE$ ，根据平行线分线段成比例定理计算即可．

【详解】解：∵ $\triangle ABC$ 的两条中线 AD 和 BE 相交于点 G ，

∴ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

∴ $AG=2DG$ ， $BG=2GE$ ，

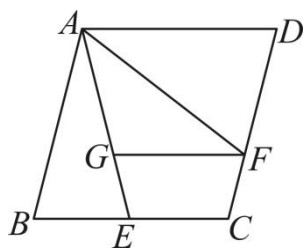
∵ $EF \parallel BC$ ，

$$\therefore \frac{FG}{GD} = \frac{EG}{BG} = \frac{1}{2}.$$

故答案为 $\frac{1}{2}$ ．

【点睛】本题考查的是三角形的重心的概念和性质、平行线分线段成比例定理的应用，三角形的重心是三角形三条中线的交点，且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍．

17. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 8， E 为 BC 的中点， AF 平分 $\angle EAD$ 交 CD 于点 F ，过点 F 作 $FG \parallel AD$ ，交 AE 于点 G ，若 $\cos B = \frac{1}{4}$ ，则 FG 的长为_____．

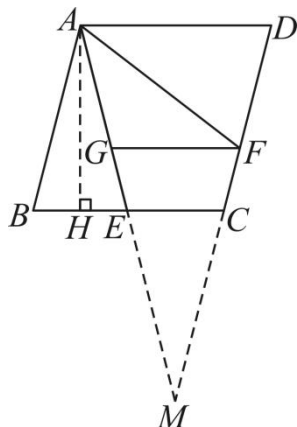


【答案】 $\frac{16}{3}$

【解析】

【分析】作 AH 垂直 BC 于 H ，延长 AE 和 DC 交于点 M ，然后通过证明 AH 是 BE 的垂直平分线，进而证明 $\triangle MGF \sim \triangle MEC$ ，即可得出答案．

【详解】如图，作 AH 垂直 BC 于 H ，延长 AE 和 DC 交于点 M ，



∵ 菱形 $ABCD$ 的边长为 8,

$$\therefore AB=AD=BC=8,$$

$$\therefore \cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore BH = 2,$$

∵ E 为 BC 的中点,

$$\therefore BE = CE = 4,$$

$$\therefore EH = BE - BH = 2,$$

∴ AH 是 BE 的垂直平分线,

$$\therefore AE = AB = 8,$$

$$\therefore BE = CE, \angle AEB = \angle CEM,$$

又 ∵ $AB \parallel DM$,

$$\therefore \angle B = \angle MCE,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle MCE$$

$$\therefore AE = AB = EM = CM = 8,$$

设 $GF = x$,

∵ AF 平分 $\angle EAD$,

$$\therefore \angle GAF = \angle FAD,$$

又 ∵ $FG \parallel AD$,

$$\therefore \angle GFA = \angle FAD,$$

$$\therefore \angle GAF = \angle AFG, \text{ 则 } AG = GF,$$

$$\text{则 } AG = x, GE = 8 - x,$$

∵ $GF \parallel BC$,

$$\therefore \triangle MGF \sim \triangle MEC,$$

$$\therefore \frac{4}{x} = \frac{8}{16-x},$$

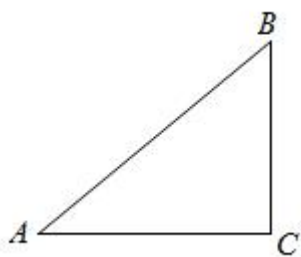
$$\text{解得: } x = \frac{16}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{16}{3}.$$

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质使用、垂直平分线的性质以及菱形的性质，作辅助线是本题的关键.

18. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, 点 D 在 AC 边上, 点 E 在射线 AB 上, 将 $\triangle ADE$

沿 DE 翻折, 使得点 A 落在点 A' 处, 当 $A'D \perp AC$ 且 $CA' \parallel AB$ 时, BE 的长为_____.



【答案】 $\frac{25}{7}$ 或 $3\frac{4}{7}$

【解析】

【分析】 求出 $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$, 勾股定理求出 AB , 根据题意, 易得: $AD = AD'$,

$\tan \angle DCA' = \tan A = \frac{A'D}{CD} = \frac{3}{4}$, 进而求出 AD, CD 的长, 过 A' 作 $A'H \parallel AC$, 过点 E 作 $EH \perp A'H$, 过点 B 作 $BM \perp EH$, 交 EH 于点 M , 延长 BC 交 $A'H$ 于点 N , 易得四边形 $A'NCD$, 四边形 $NHMB$ 均为矩形, 分别求出 $A'N, CN, MH$, 得到 $\tan \angle EBM = \tan A = \frac{EM}{BM} = \frac{3}{4}$, 设 $EM = 3x, BM = 4x$, 则:

$BE = 5x$, 分别用含 x 的式子, 表示出 $A'E, EH, A'H$, 利用勾股定理求出 x 的值, 进而得解.

【详解】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, AC = 4, BC = 3$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5; \quad \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4},$$

$\therefore$ 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折, 使得点 A 落在点 A' 处, 当 $A'D \perp AC$ 且 $CA' \parallel AB$,

$$\therefore AD = A'D, \quad \angle CDA' = 90^\circ, \angle DCA = \angle A,$$

$$\therefore \tan \angle DCA' = \tan A = \frac{A'D}{CD} = \frac{3}{4},$$

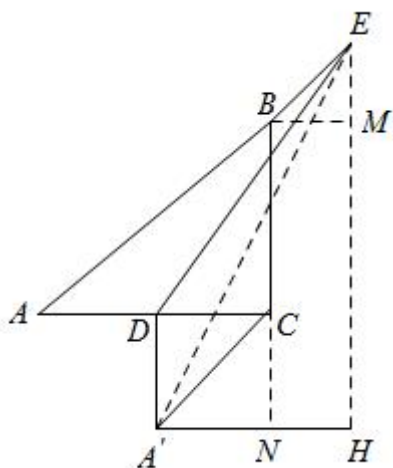
$$\therefore AD = A'D = \frac{3}{4}CD,$$

$$\therefore AD + CD = \frac{3}{4}CD + CD = AC = 4,$$

$$\therefore CD = \frac{16}{7},$$

$$\therefore AD = A'D = \frac{12}{7},$$

过 A' 作 $A'H \parallel AC$, 过点 E 作 $EH \perp A'H$, 过点 B 作 $BM \perp EH$, 交 EH 于点 M , 延长 BC 交 $A'H$ 于点 N ,



$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BNA' = \angle DCN = \angle CNH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $A'NCD$, 四边形 $NHMB$ 均为矩形,

$$\therefore A'N = CD = \frac{16}{7}, CN = A'D = \frac{12}{7}, MH = BN = BC + CN = \frac{33}{7}, BM \parallel NH \parallel AC,$$

$$\therefore \angle EBM = \angle A,$$

$$\therefore \tan \angle EBM = \tan A = \frac{EM}{BM} = \frac{3}{4},$$

设 $EM = 3x, BM = 4x$, 则: $BE = 5x$,

$$\therefore AE = AB + BE = 5 + 5x, A'H = A'N + NH = A'N + BM = \frac{16}{7} + 4x, EH = EM + MH = \frac{33}{7} + 3x,$$

连接 $A'E$, 则: $A'E = AE = 5 + 5x$,

$$\text{在 Rt}\triangle A'HE \text{ 中, } A'E^2 = A'H^2 + EH^2, \text{ 即: } (5 + 5x)^2 = \left(\frac{16}{7} + 4x\right)^2 + \left(\frac{33}{7} + 3x\right)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{5}{7},$$

$$\therefore BE = 5 \times \frac{5}{7} = \frac{25}{7};$$

$$\text{故答案为: } \frac{25}{7}.$$

【点睛】 本题考查折叠的性质, 矩形的判定和性质, 解直角三角形. 本题难度大, 综合性强, 根据题意, 准确的作图, 构造特殊图形, 是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } 4 \cos 30^\circ - \cot 45^\circ \tan 60^\circ + 2 \sin^2 45^\circ$$

$$\text{【答案】 } 1 + \sqrt{3}$$

【解析】

【分析】因为 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cot 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 然后代入计算式即可得出答案.

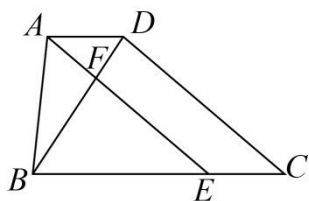
【详解】 $\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cot 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore \text{原式} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \times \sqrt{3} + 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1 + \sqrt{3},$$

故答案为: $1 + \sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了特殊角的三角函数值, 熟记特殊角的各种三角函数值是解题的关键.

20. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 且 $BC = 3AD$, 过点 A 作 $AE \parallel DC$, 分别交 BC 、 BD 于点 E 、 F , 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.



(1) 用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BD}$ 和 $\overrightarrow{AF}$;

(2) 求作 $\overrightarrow{BF}$ 在 $\vec{a}, \vec{b}$ 方向上的分向量. (不要求写作法, 但要保留作图痕迹, 并指出所作图中表示结论的分向量)

【答案】(1) $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 利用向量的表示方法, 由 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ 即可求出 $\overrightarrow{BD}$, 利用平行线分线段成比例, 求出 $AF = \frac{1}{3}AE$, 即可求出 $\overrightarrow{AF}$;

(2) 过点 F 作 $GF \parallel BC$ 交 AB 于点 G , $FH \parallel AB$ 交 BC 于点 H , 则 $\overrightarrow{BG}$ 、 $\overrightarrow{BH}$ 即为所求.

【小问 1 详解】

解: $\because \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AD}$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}$$

$$\because AD \parallel BC, AE \parallel DC$$

$$\therefore \text{四边形 } ADCE \text{ 是平行四边形, } AD = EC, AE = DC$$

$$\because BC = 3AD,$$

$$\therefore BC = 3EC,$$

$$\therefore BE = 2EC,$$

$$\because AD = EC,$$

$$\therefore BE = 2AD,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle EBF$$

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{AF}{FE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AF = \frac{1}{3}AE,$$

$$\because AE = DC,$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}),$$

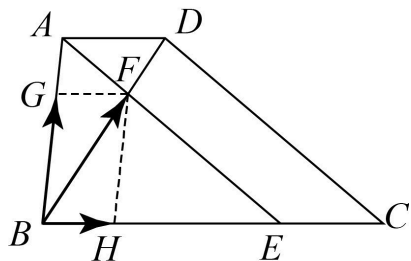
$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{b} + \vec{a}\right) = \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a},$$

【小问 2 详解】

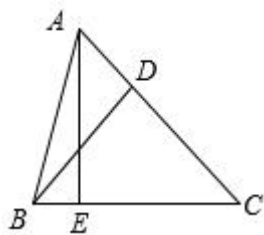
解：如图所示，过点 F 作 $GF \parallel BC$ 交 AB 于点 G ， $FH \parallel AB$ 交 BC 于点 H ，

$\overrightarrow{BF}$ 在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向上的分向量如图所示， $\overrightarrow{BG}$ 、 $\overrightarrow{BH}$ 即为所求；



【点睛】 本题主要考查了相似三角形的性质与判定，平面向量的线性计算，掌握平面向量的线性计算解题的关键。

21. 如图, D 是 $\triangle ABC$ 边上的一点, $CD = 2AD$, $AE \perp BC$, 垂足为点 E , 若 $AE = 9$, $\sin \angle CBD = \frac{3}{4}$.



(1) 求 BD 的长;

(2) 若 $BD = CD$, 求 $\tan \angle BAE$ 的值.

【答案】 (1) 8 (2) $\frac{\sqrt{7}}{9}$

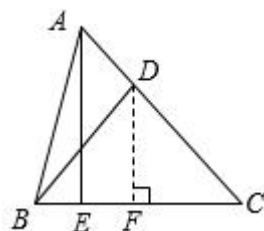
【解析】

【分析】(1) 作 $DF \perp BC$ 于点 F , 通过 $AE \parallel DF$ 可得 $\frac{CD}{AC} = \frac{DF}{AE}$, 求出 DF 的长度, 根据 $\sin \angle CBD = \frac{3}{4}$, 即可求解;

(2) 先利用勾股定理求出 CF 的长度, 根据等腰三角形三线合一可得 $BF = CF$, 再根据平行线分线段成比例求出 EF , 进而求出 BE , 即可求出 $\tan \angle BAE$ 的值.

【小问 1 详解】

解: 如图, 作 $DF \perp BC$ 于点 F ,



$\because DF \perp BC, AE \perp BC,$

$\therefore AE \parallel DF,$

$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{DF}{AE},$

$\because CD = 2AD,$

$\therefore AC = AD + CD = 3AD,$

$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{DF}{AE} = \frac{2}{3},$

$\because AE = 9,$

$\therefore DF = \frac{2}{3}AE = 6,$

$$\therefore \sin \angle CBD = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{DF}{BD} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore BD = \frac{4}{3}DF = \frac{4}{3} \times 6 = 8;$$

【小问2详解】

解： $\because BD = CD = 8$,

由(1)知 $DF = 6$,

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle DFC \text{ 中, } CF = \sqrt{CD^2 - DF^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7},$$

$$\because BD = CD, DF \perp BC,$$

$$\therefore BF = CF = 2\sqrt{7},$$

$$\because AE \parallel DF,$$

$$\therefore \frac{CF}{EF} = \frac{CD}{AD} = 2,$$

$$\therefore EF = \sqrt{7},$$

$$\therefore BE = BF - EF = \sqrt{7},$$

$$\therefore \tan \angle BAE = \frac{BE}{AE} = \frac{\sqrt{7}}{9}.$$

【点睛】本题考查平行线的判定，平行线分线段成比例，解直角三角形，勾股定理，等腰三角形的性质等，难度一般，解题的关键是利用平行线分线段成比例得出相应线段的比例关系.

22. 如图，一根灯杆 AB 上有一盏路灯 A ，路灯 A 离水平地面的高度为 9 米，在距离路灯正下方 B 点 15.5 米处有一坡度为 $i = 1: \frac{4}{3}$ 的斜坡 CD ，如果高为 3 米的标尺 EF 竖立地面 BC 上，垂足为 F ，它的影子的长度为 4 米.

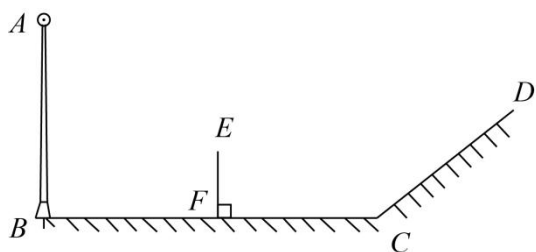


图1

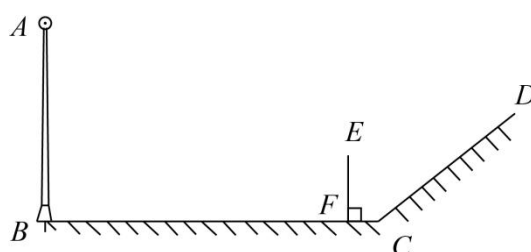


图2

- (1) 当影子全在水平地面 BC 上 (图 1)，求标尺与路灯间的距离;
- (2) 当影子一部分在水平地面 BC 上，一部分在斜坡 CD 上 (图 2)，求此时标尺与路灯间的距离为多少米?

【答案】(1) 标尺与路灯间的距离为 8 米;

(2) 此时标尺与路灯间的距离为 14 米.

【解析】

【分析】(1) 由题意可知, $AB \perp BC, EF \perp BC$ 得到 $AB \parallel EF$, 则 $\triangle EFG \sim \triangle ABG$, 把数值代入

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BF + FG} \text{ 即可得到答案;}$$

(2) 连接 AE 交 CD 于点 M , 过点 M 作 $MN \perp BC$ 交 BC 延长线于点 N , 过点 M 作 $MG \perp AB$ 于点 G , 交 EF 于点 H , 设 $CM = x$ 米, 则 $FC = (4 - x)$ 米, 可证明 $\triangle AGM \sim \triangle GHM$, 得到 $\frac{AG}{EH} = \frac{GM}{HM}$, 求出 $AG = \left(9 - \frac{3}{5}x\right)$ 米, $GM = \left(15.5 + \frac{4}{5}x\right)$ 米, $EH = \left(3 - \frac{3}{5}x\right)$ 米, $HM = \left(4 - x + \frac{4}{5}x\right)$, 代入比例式得到关于 x 的一元二次方程, 解方程求得 x 的值, 即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: 如图,

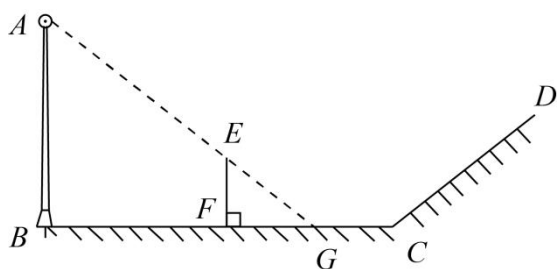


图1

由题意可知, $AB \perp BC, EF \perp BC$,

$$\therefore AB \parallel EF,$$

$$\therefore \triangle EFG \sim \triangle ABG,$$

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BF + FG}$$

由题意可知, $EF = 3, AB = 9, FG = 4$,

$$\therefore \frac{3}{9} = \frac{4}{BF + 4},$$

解得 $BF = 8$,

即标尺与路灯间的距离为 8 米;

【小问 2 详解】

如图, 连接 AE 交 CD 于点 M , 过点 M 作 $MN \perp BC$ 交 BC 延长线于点 N , 过点 M 作 $MG \perp AB$ 于点 G , 交 EF 于点 H ,

经检验 $x = \frac{5}{2}$ 是方程的解且符合题意,

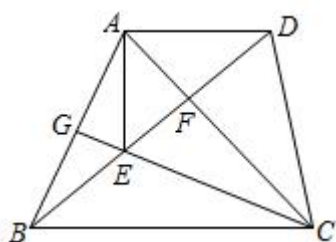
$$\therefore FC = 4 - x = \frac{3}{2} \text{ 米},$$

$$\therefore BF = 15.5 - \frac{3}{2} = 14 \text{ 米},$$

$\therefore$ 此时标尺与路灯间的距离为 14 米.

【点睛】此题考查了相似三角形的判定和性质、解分式方程、解直角三角形的坡度问题, 熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

23. 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = \frac{1}{2}BC$, 对角线 AC 与 BD 交于点 F , 点 G 是 AB 边上的中点, 连接 CG 交 BD 于点 E , 并满足 $BG^2 = GE \cdot GC$.



(1) 求证: $\angle GAE = \angle GCA$;

(2) 求证: $AD \cdot BC = 2DF \cdot DE$

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据线段中点得出 $AG = BG$, 再由相似三角形的判定和性质证明 $\triangle GCA \sim \triangle GAE$ 即可;

(2) 根据相似三角形的判定和性质得出 $\angle GBE = \angle GCB$, 再由 (1) 得 $\angle GAE = \angle GCA$, 利用三角形外角的性质得出 $\angle AEF = \angle ACB$, 再由相似三角形的判定和性质得出 $\triangle ADF \sim \triangle CBF$, $BF = 2DF$, 继续利用相似三角形的判定得出 $\triangle ADE \sim \triangle FBC$, 再由其性质即可证明.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 点 G 是 AB 边上的中点,

$$\therefore AG = BG,$$

$$\because BG^2 = GE \cdot GC,$$

$$\therefore AG^2 = GE \cdot GC$$

$$\therefore \frac{AG}{GC} = \frac{GE}{AG}.$$

又 $\because \angle CGA = \angle AGE$,

$$\therefore \triangle GCA \sim \triangle GAE.$$

$$\therefore \angle GAE = \angle GCA.$$

【小问2详解】

$$\text{证明: } \because BG^2 = GE \cdot GC,$$

$$\therefore \frac{BG}{GC} = \frac{GE}{BG}.$$

$$\text{又} \because \angle CGB = \angle BGE,$$

$$\therefore \triangle GCB \sim \triangle GBE.$$

$$\therefore \angle GBE = \angle GCB.$$

$$\text{由 (1) 得 } \angle GAE = \angle GCA,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle ABE + \angle BAE, \angle ACB = \angle ACG + \angle BCG,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle ACB,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle CBF.$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DF}{BF} = \frac{AF}{CF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BF = 2DF,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle ACB$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle FBC.$$

$$\therefore \frac{AD}{BF} = \frac{DE}{BC} \text{ 即 } AD \cdot BC = DE \cdot BF,$$

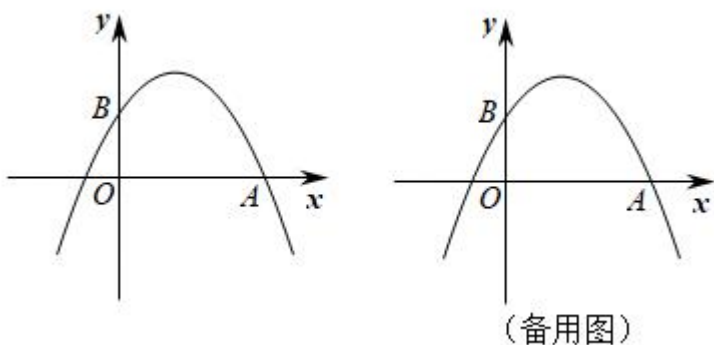
$$\therefore BF = 2DF,$$

$$\therefore AD \cdot BC = 2DF \cdot DE.$$

【点睛】 本题考查的是相似三角形的判定与性质，三角形外角的定义、平行线的性质，熟知相似三角形的判定与性质是解答此题的关键.

24. 如图，在直角坐标平面 xOy 中，对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 经过点 $A(4, 0)$ 、点

$M(1, m)$ ，与 y 轴交于点 B .



- (1) 求抛物线的解析式，并写出此抛物线顶点 D 的坐标；
- (2) 联结 AB, AM, BM ，求 $S_{\triangle ABM}$ ；
- (3) 过 M 作 x 轴的垂线与 AB 交于点 P , Q 是直线 MP 上一点，当 $\triangle BMQ$ 与 $\triangle AMP$ 相似时，求点 Q 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ ，顶点 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{8}\right)$ ；

(2) 3 (3) $(1, -1)$ 或 $\left(1, \frac{5}{2}\right)$

【解析】

【分析】(1) 由对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 经过点 $A(4, 0)$ ，可列方程组
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ 16a + 4b + 2 = 0 \end{cases}$$

解方程组后即可得到函数解析式，化成顶点式求出定点坐标即可；

(2) 求出点 M 和点 B 的坐标，作 $MN \perp y$ 轴于点 N ，利用梯形面积减去两个直角三角形面积即可；

(3) 过点 M 作 $ME \perp y$ 轴于点 E ，设直线 MP 交 x 轴于点 C ，先求出 $\triangle ABM$ 各边的长度，证明 $\angle AMB = 90^\circ$ ，分两种情况分别求解即可.

【小问 1 详解】

解：由题意得到
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ 16a + 4b + 2 = 0 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2,$$

$$\because y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{8},$$

$$\therefore \text{顶点 } D \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3}{2}, \frac{25}{8}\right);$$

【小问 2 详解】

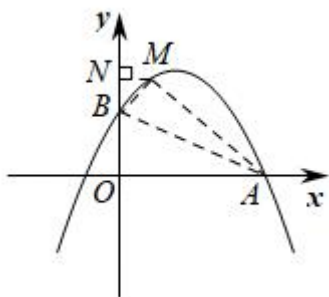
$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 3,$$

$$\therefore \text{点 } M(1, 3),$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 2,$$

$$\therefore B(0, 2),$$

如图, 联结 AB, AM, BM , 作 $MN \perp y$ 轴于点 N ,



$$\text{则 } ON = 3, OB = 2, OA = 4, MN = 1, BN = ON - OB = 1,$$

$$\text{则 } S_{\triangle ABM} = S_{\text{梯形}AONM} - S_{\triangle AOB} - S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} \times (1+4) \times 3 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 3,$$

$$\text{即 } S_{\triangle ABM} = 3;$$

【小问 3 详解】

过点 M 作 $ME \perp y$ 轴于点 E , 设直线 MP 交 x 轴于点 C ,

$$\text{由题意可知 } OC = EM = 1, OE = CM = 3, OA = 4,$$

$$\text{则 } CA = OA - OC = 3, BE = OE - OB = 1,$$

$$\therefore BM = \sqrt{ME^2 + BE^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad AB = \sqrt{OA^2 + BO^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

$$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore BM^2 + AM^2 = AB^2,$$

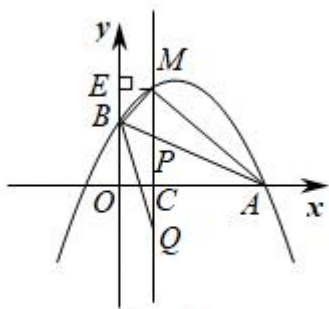
$$\therefore \angle AMB = 90^\circ,$$

在 $\triangle ACM$ 中, $MC = AC = 3$,

$$\therefore \angle AMC = \angle MAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BMP = 90^\circ - \angle AMC = 45^\circ,$$

当 $\triangle BMQ \sim \triangle PMA$ 时, 则 $\frac{BM}{PM} = \frac{MQ}{AM}$, 如图 1,



设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{则} \begin{cases} 4k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + 2,$$

$$\text{当 } x = 1, \quad y = -\frac{1}{2}x + 2 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore P\left(1, \frac{3}{2}\right),$$

$$PM = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{MQ}{3\sqrt{2}},$$

解得 $MQ = 4$,

$$\therefore Q \text{ 点的纵坐标为 } 3 - 4 = -1,$$

$$\therefore \text{点 } Q(1, -1);$$

当 $\triangle BMQ \sim \triangle AMP$ 时, 则 $\frac{BM}{AM} = \frac{MQ}{MP}$, 如图 2,

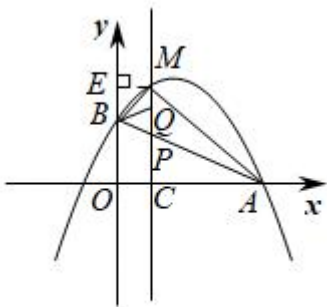


图 2

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{MQ}{\frac{3}{2}},$$

解得 $MQ = \frac{1}{2}$,

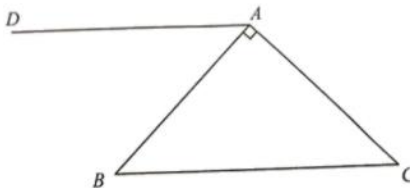
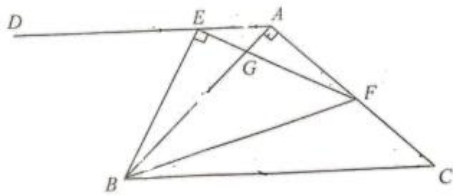
$$\therefore Q \text{ 点的纵坐标为 } 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{点 } Q\left(1, \frac{5}{2}\right);$$

综上, 点 Q 的坐标为 $(1, -1)$ 或 $(1, \frac{5}{2})$

【点睛】此题考查了相似三角形的性质、待定系数法、勾股定理及其逆定理、二次函数的图象和性质等知识，数形结合和分类讨论是解题的关键

25. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 4$, $AD \parallel BC$, 点 E 为射线 AD 上的一个动点 (不与 A 重合), 过点 E 作 $EF \perp BE$, 交射线 CA 于点 F , 连接 BF .



(备用图)

- (1) 如图, 当点 F 在线段 AC 上时, EF 与 AB 交于点 G , 求证: $\triangle AEG \sim \triangle FBG$;
- (2) 在 (1) 的情况下, 射线 CA 与 BE 的延长线交于点 Q , 设 $AE = x, QF = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;
- (3) 当 $BE = 3$ 时, 求 CF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $y = 4 - \sqrt{2}x + \frac{4x}{4\sqrt{2} - x}, 0 < x < 2\sqrt{2}$

(3) $4 - \sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 先证 $\triangle AGF \sim \triangle EGB$ 得到 $\frac{AG}{EG} = \frac{FG}{GB}$, 结合 $\angle AGE = \angle FGB$ 证明即可.

(2) 根据 $AD \parallel BC$, 先证 $\triangle QAE \sim \triangle QCB$ 得到 $\frac{AE}{BC} = \frac{QA}{QC}$, 结合 $\angle EAB = \angle C = 45^\circ$, $\angle FBC = \angle EBA$ 证

$\triangle FBC \sim \triangle EBA$ 得到 $\frac{CF}{AE} = \frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$, 求得 $FC = \sqrt{2}x$, 根据 $QF = y = QA + AF = QA + 4 - FC$ 计算即可.

(3) 过点 F 作 $FM \perp BC$ 于点 M , 结合 $\angle C = 45^\circ$, 设 $FM = MC = x$, 根据勾股定理计算即可.

【小问 1 详解】

$$\because \angle BEG = \angle FAG, \angle BGE = \angle FGA,$$

$$\therefore \triangle AGF \sim \triangle EGB,$$

$$\therefore \frac{AG}{EG} = \frac{FG}{GB},$$

$$\because \angle AGE = \angle FGB,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle FBG.$$

【小问 2 详解】

$$\because AB = AC = 4, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle QAE \sim \triangle QCB, BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 4\sqrt{2}, \angle EAB = \angle ABC = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{QA}{QC},$$

$$\therefore \frac{x}{4\sqrt{2}} = \frac{QA}{QA + 4},$$

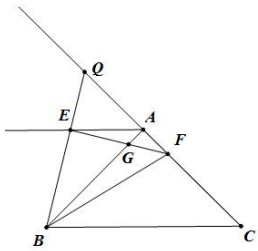
$$\text{解得 } QA = \frac{4x}{4\sqrt{2} - x};$$

由(1)得 $\triangle AEG \sim \triangle FBG$,

$$\therefore \angle EAG = \angle BFG = 45^\circ,$$

$$\therefore EF \perp BE,$$

$$\therefore \angle EBF = 45^\circ,$$



$$\therefore \angle EBA + \angle ABF = \angle CBF + \angle ABF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FBC = \angle EBA,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle FBC \sim \triangle EBA$$

$$\therefore \frac{CF}{AE} = \frac{BC}{AB} = \frac{CF}{x} = \sqrt{2},$$

$$\therefore FC = \sqrt{2}x,$$

$$\therefore QF = y = QA + AF = QA + 4 - FC = 4 - \sqrt{2}x + \frac{4x}{4\sqrt{2} - x},$$

$$\therefore 4 - \sqrt{2}x > 0,$$

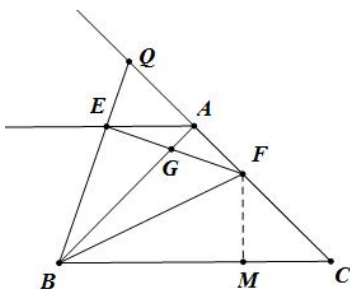
$$\therefore 0 < x < 2\sqrt{2}.$$

【小问 3 详解】

如图，过点 F 作 $FM \perp BC$ 于点 M ，

$$\therefore \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore FM = MC = x, \quad BM = 4\sqrt{2} - x,$$



$$\therefore BE = 3,$$

$$\therefore BF^2 = 3^2 + 3^2 = 18,$$

$$\therefore BF^2 = BM^2 + FM^2 = (4\sqrt{2} - x)^2 + x^2 = 18,$$

解得 $x = 2\sqrt{2} - 1, x = 2\sqrt{2} + 1$ (舍去),

$$\therefore CF = \sqrt{2}x = 4 - \sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查了三角形相似的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，勾股定理，熟练掌握三角形相似的判定和性质，勾股定理是解题的关键.

