

2023 学年第一学期期末学业质量调研

九年级数学

(满分 150 分, 完卷时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题, 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 如果两个相似三角形的周长之比为 $1:4$, 那么它们对应边之比为 ()

- A. $1:2$ B. $1:4$ C. $1:8$ D. $1:16$

【答案】B

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的性质, 熟知相似三角形的周长之比等于相似比是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 两个相似三角形的周长之比为 $1:4$,

$\therefore$ 它们对应边之比为 $1:4$,

故选 B.

2. 在直角坐标平面内有一点 $A(5,12)$, 点 A 与原点 O 的连线与 x 轴正半轴的夹角为 θ , 那么 $\tan\theta$ 的值为 ()

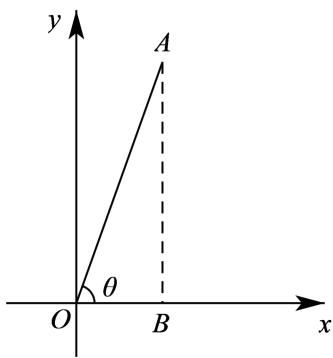
- A. $\frac{5}{13}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{12}{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查了求锐角的正切值; 画出图形, 过 A 作 $AB \perp x$ 轴于 B , 则由点 A 的坐标可得 OB , AB , 由正切的定义即可求解.

【详解】 解: 如图, 过 A 作 $AB \perp x$ 轴于 B ,



$$\therefore A(5,12),$$

$$\therefore OB=5, AB=12,$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{AB}{OB} = \frac{12}{5};$$

故选: D.

3. 将抛物线 $y = -x^2$ 向左平移 3 个单位后, 得到的新抛物线的表达式为 ()

A. $y = -x^2 - 3$

B. $y = -x^2 + 3$

C. $y = -(x+3)^2$

D. $y = -(x-3)^2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图象的平移, 关键是抓住抛物线顶点的平移; 原抛物线的顶点为原点, 向左平移 3 个单位后的顶点坐标为 $(-3, 0)$, 由此即可得平移后新抛物线的表达式.

【详解】解: 抛物线 $y = -x^2$ 的顶点为原点, 原点向左平移 3 个单位后的坐标为 $(-3, 0)$,

由于平移不改变图象的大小与形状, 则平移后的新抛物线表达式为 $y = -(x+3)^2$;

故选: C.

4. 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 下列条件中不一定能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的是 ()

A. $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$

B. $\vec{a} = 2\vec{b}$

C. $\vec{a} \parallel \vec{c}, \vec{b} \parallel \vec{c}$

D. $\vec{a} = 2\vec{c}, \vec{b} \parallel \vec{c}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了平面向量, 主要利用了向量平行的判定, 解题关键是对向量性质的理解. 根据向量的性质对各选项分析判断后利用排除法求解.

【详解】解: A、只能判定 $\vec{a}, \vec{b}$ 的模的数量关系, 不能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 符合题意;

B、 $\vec{a} = 2\vec{b}$ ，能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，不符合题意；

C、 $\vec{a} \parallel \vec{c}, \vec{b} \parallel \vec{c}$ ，根据平行的传递性得到 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，不符合题意；

D、 $\vec{a} = 2\vec{c}$ ，得到 $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ，平行的传递性得到 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，不符合题意；

故选 A.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，以下能推出 $DE \parallel BC$ 的条件是 ()

A. $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}, \frac{CE}{AE} = \frac{3}{4}$

B. $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}, \frac{DE}{BC} = \frac{3}{4}$

C. $\frac{AB}{AD} = \frac{4}{3}, \frac{EC}{AE} = \frac{1}{3}$

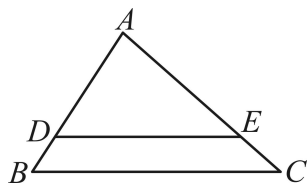
D. $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}, \frac{CE}{AC} = \frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定与性质，平行线的判定；画出图形，根据相似三角形的判定与性质逐一判断即可.

【详解】解：画出图形如下：



A、由 $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}, \frac{CE}{AE} = \frac{3}{4}$ 不能得出 $\triangle ABC, \triangle ADE$ 相似，故不能判定 $DE \parallel BC$ ；

B、由 $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}, \frac{DE}{BC} = \frac{3}{4}$ 不能得出 $\triangle ABC, \triangle ADE$ 相似，故不能判定 $DE \parallel BC$ ；

C、 $\because \frac{EC}{AE} = \frac{1}{3}$ ，则有 $\frac{AC}{AE} = \frac{4}{3}$ ， $\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{4}{3}$ ，则 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle ABC$ ，从而 $DE \parallel BC$ ；

D、由 $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}, \frac{CE}{AC} = \frac{3}{4}$ 不能得出 $\triangle ABC, \triangle ADE$ 相似，故不能判定 $DE \parallel BC$ ；

故选：C.

6. 在二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中，如果 $a < 0, b > 0, c < 0$ ，那么它的图像一定不经过 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】B

【解析】

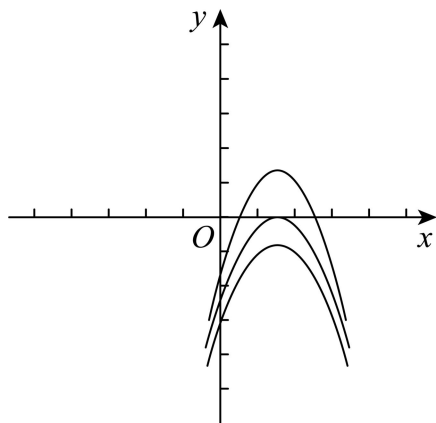
【分析】本题考查二次函数的性质，根据二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ， $a < 0, b > 0, c < 0$ 和二次函数的性质，可知该函数图象的对称轴在 y 轴右侧，与 y 轴交于负半轴，开口向下，然后即可判断该函数图象一定不

经过第二象限.

【详解】解: $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$,

$\therefore$ 该函数图象的对称轴在 y 轴右侧, 与 y 轴交于负半轴, 开口向下,

$\therefore$ 该函数图象存在三种情况, 如图所示,



$\therefore$ 它的图象一定不经过第二象限,

故选: B.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$, 那么 $\frac{a}{a+b}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{4}{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的性质. 熟练掌握分式的性质是解题的关键.

根据 $\frac{a}{a+b} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1}$, 计算求解即可.

【详解】解: 由题意知, $\frac{a}{a+b} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}+1} = \frac{4}{7}$,

故答案为: $\frac{4}{7}$.

8. 计算: $\left(\frac{5}{2}\vec{a} + 2\vec{b}\right) - \left(\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) =$ _____.

【答案】 $\vec{a} + 3\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了向量的线性运算；根据向量的运算法则进行计算即可.

【详解】 解: $\left(\frac{5}{2}\vec{a}+2\vec{b}\right)-\left(\frac{3}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{5}{2}\vec{a}+2\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+3\vec{b},$

故答案为: $\vec{a}+3\vec{b}.$

9. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 且 $AP > BP$, 则 $AP:BP$ 的值=_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【解析】

【分析】 根据黄金分割的定义列可得答案.

【详解】 $\because$ 点 P 是线段 AB 的一个黄金分割点, 且 $AP > BP$,

$$\therefore AP:BP = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$

【点睛】 本题考查了黄金分割点的应用, 把一条线段分割为两部分, 使较大部分与全长的比值等于较小部分与较大的比值, 则这个比值即为黄金分割; 其比值是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 理解黄金分割点的定义是解题的关键.

10. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, AC = 8, \sin B = 0.8$, 则 AB 的长为_____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 利用锐角三角函数的定义, 进行求解即可.

【详解】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, \sin B = \frac{AC}{AB},$

$$\therefore AC = 8, \sin B = 0.8$$

$$\therefore \frac{8}{AB} = 0.8,$$

$$\therefore AB = 10;$$

故答案为: 10.

【点睛】 本题考查利用三角函数值求边长. 解题的关键是掌握正弦等于对边比斜边.

11. 如果抛物线 $y = (m-1)x^2 + m$ 经过原点, 那么该抛物线的开口方向_____.

【答案】 向下

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的图象与性质；根据抛物线过原点，把原点坐标代入解析式中可求得 m 的值，根据二次项系数的符号可确定抛物线的开口方向.

【详解】 解： $\because$ 抛物线 $y = (m-1)x^2 + m$ 经过原点，

$$\therefore (m-1) \cdot 0 + m = 0,$$

$$\therefore m = 0,$$

$$\therefore \text{抛物线为 } y = -x^2;$$

$$\because -1 < 0,$$

$\therefore$ 抛物线开口向下；

故答案为： 向下.

12. 已知一条抛物线的对称轴是直线 $x=1$ ，且在对称轴右侧的部分是上升的，那么该抛物线的表达式可以是_____。（只要写出一个符合条件的即可）

【答案】 $y = x^2 - 2x + 3$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的图象与性质；由题意知，抛物线的开口向上，根据对称轴与开口方向写出一个二次函数的表达式即可.

【详解】 解： $\because$ 在对称轴右侧的部分是上升的

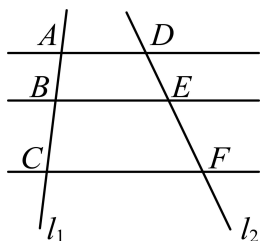
$\therefore$ 抛物线的开口向上；

$\because$ 抛物线的对称轴是直线 $x=1$ ，

$$\therefore \text{抛物线可为： } y = x^2 - 2x + 3;$$

故答案为： $y = x^2 - 2x + 3$ （答案不唯一）.

13. 如图，已知 $AD \parallel BE \parallel CF$ ，它们与直线 l_1 、 l_2 依次交于点 A 、 B 、 C ，点 D 、 E 、 F ，如果 $\frac{EF}{DF} = \frac{3}{5}$ ， $AB = 10$ ，那么线段 BC 的长是_____.



【答案】 15

【解析】

【分析】 本题考查了平行线分线段成比例定理，由 $\frac{EF}{DF} = \frac{3}{5}$ 得 $\frac{DE}{EF} = \frac{2}{3}$ ，根据平行线分线段成比例定理即可求解.

【详解】 解： $\because \frac{EF}{DF} = \frac{3}{5}$,

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AD \parallel BE \parallel CF,$$

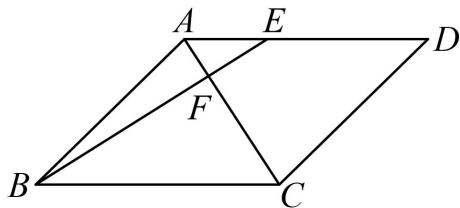
$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore BC = \frac{3}{2}AB = 15;$$

故答案为：15.

14. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在边 AD 上，联结 BE ，交对角线 AC 于点 F ，如果 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BFC}} = \frac{1}{9}$ ，

$AD = 15$ ，那么 $AE =$ _____.



【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质，相似三角形的判定与性质；由平行四边形的性质对边平行可得 $\triangle AEF \sim \triangle CBF$ ，由相似三角形的性质即可求解.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, BC = AD = 15,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CBF,$$

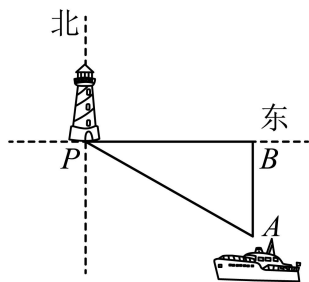
$$\therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BFC}} = \left(\frac{AE}{BC}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } AE = \frac{1}{3}BC = 5;$$

故答案为：5.

15. 如图，一艘轮船位于灯塔 P 的南偏东 60° 方向，距离灯塔 25 海里的 A 处，它沿正北方向航行到达位于灯塔正东方向上的 B 处，那么此时轮船与灯塔 P 的距离为_____海里.



【答案】 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用；由题意，利用余弦函数即可求解.

【详解】 解： $\because$ 轮船位于灯塔 P 的南偏东 60° 方向，

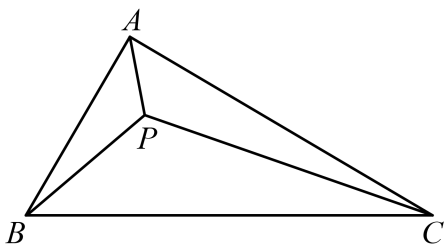
$\therefore \angle APB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中， $PB = PA \cos 30^\circ = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$ (海里)；

即此时轮船与灯塔 P 的距离为 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ 海里.

故答案为： $\frac{25\sqrt{3}}{2}$.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， P 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\angle APB = \angle BPC = 120^\circ$ ，如果 $AP = 3$ ， $BP = 4$ ，那么 $CP =$ _____.



【答案】 $\frac{16}{3}$ 或 $5\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 由题意可以得到 $\angle PAB = \angle PBC$ ，判定两个三角形相似，然后用相似三角形的性质计算求出最终结果；

本题考查的是相似三角形的判定与性质，运用相似三角形的知识解决问题是解题关键.

【详解】解：∵ $\angle APB = \angle BPC = 120^\circ$

设 $\angle PBC = \alpha$

$$\therefore \angle PBA = 60^\circ - \alpha$$

$$\therefore \angle PAB = \alpha$$

所以 $\angle PAB = \angle PBC$

$$\therefore \triangle APB \sim \triangle BPC$$

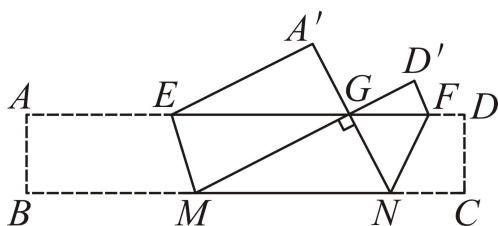
$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{PB}{PC}$$

$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{4}{PC}$$

$$\therefore PC = \frac{16}{3}$$

故答案为： $\frac{16}{3}$.

17. 如图，将矩形 $ABCD$ 沿 EM 、 FN 折叠，点 A 、 D 分别与 A' 、 D' 对应， B 、 C 两点对应点落在 AD 上的点 G 处，且 $GM \perp GN$ ，如果 $S_{\triangle A'EG} = 8$ ， $S_{\triangle D'GF} = 2$ ，那么 AB 的长为_____.



【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质，折叠的性质，相似三角形的判定与性质；

由折叠的性质及已知可和 $\triangle A'EG \sim \triangle D'GF$ ，结合面积得 $A'E = 4D'F$ ；设 $AB = a$ ， $D'F = b$ ，则可得 a ， b 的关系，再由面积可求得 b ，从而求得 a 的值.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AB = CD, \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ;$$

由折叠知， $EM \perp AG$ ， $A'G = AB$ ；

$FN \perp DG$ ， $C'G = CD$ ，

$$\therefore DG = AG = CD = AB;$$

$$\therefore GM \perp GN,$$

$\therefore A, G, N$ 三点共线, D, G, M 三点共线,

$\therefore DM \parallel AE$,

$\therefore \angle AEG = \angle DGF$,

$\therefore \angle ADE = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AEG \sim \triangle DGF$,

$$\therefore \frac{AE}{DG} = \frac{AG}{DF};$$

$$\therefore S_{\triangle AEG} = 8, S_{\triangle DGF} = 2,$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2} AE \times AG}{\frac{1}{2} DG \times DF} = 4,$$

$$\text{即 } AE = 4DF;$$

设 $AB = a$, $DF = b$, 则 $AE = 4b$;

$$\text{由 } \frac{AE}{DG} = \frac{AG}{DF} \text{ 得: } \frac{4b}{a} = \frac{a}{b},$$

$$\text{即 } a = 2b;$$

$$\therefore S_{\triangle DFG} = \frac{1}{2} b \cdot 2b = 2,$$

$$\therefore b = \sqrt{2} \text{ (负值舍去)},$$

$$\therefore AB = a = 2b = 2\sqrt{2};$$

故答案为: $2\sqrt{2}$.

18. 定义: P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 连接 PA 、 PB 、 PC , 在 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 和 $\triangle PAC$ 中, 如果存在一个三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 那么就称 P 为 $\triangle ABC$ 的自相似点, 根据定义求解问题: 已知在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中,

$\angle ACB = 90^\circ$, CD 是 AB 边上的中线, 如果 $\triangle ABC$ 的重心 P 恰好是该三角形的自相似点, 那么 $\angle PBD$ 的余切值为_____.

$$\text{【答案】 } \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 重心的性质, 锐角三角函数等知识; 过点 E 作 $EF \perp AB$ 于 E , 由题意得 $\triangle ABC \sim \triangle CAP$, 结合重心性质得 $AB = \sqrt{3}AC$; 设 $AC = a$, 则 $AB = \sqrt{3}a$, 由勾股定理得 BC ; 由 E 为中线及 $\angle APC = 90^\circ$, 可得 PE , 进而得 BE , 由中线性质的面积关系可求得 EF , 由勾股定理求得

BF ，则由余切的定义即可求得结果；由相似及重心性质得到 AC ， AB 的关系是解题的关键。

【详解】解：如图，中线 BE ， CD 交于点 P ，过点 E 作 $EF \perp AB$ 于 E ，

$$\therefore \angle APB = \angle APD + \angle BPD > \angle ACP + \angle BCP = 90^\circ, \quad \angle BPC > \angle PDB > 90^\circ,$$

$\therefore \triangle PAB, \triangle PBC$ 不可能与 $\triangle ABC$ 相似，

$\therefore \triangle PAC$ 与 $\triangle ABC$ 相似，

即 $\triangle ABC \sim \triangle CAP$ ，且 $\angle APC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{PC}, \quad \text{即 } AC^2 = AB \times PC;$$

$\therefore P$ 是重心，

$$\therefore PC = \frac{2}{3}CD;$$

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是斜边上中线，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore PC = \frac{1}{3}AB,$$

$$\therefore AC^2 = AB \times PC = \frac{1}{3}AB^2,$$

$$\therefore AB = \sqrt{3}AC;$$

设 $AC = a$ ，则 $AB = \sqrt{3}a$ ，由勾股定理得 $BC = \sqrt{2}a$ ；

$\therefore E$ 为 AC 中点， $\angle APC = 90^\circ$ ，

$$\therefore PE = AE = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2},$$

由重心性质得： $BE = 3PE = \frac{3a}{2}$ ；

$\therefore BE$ 为中线，

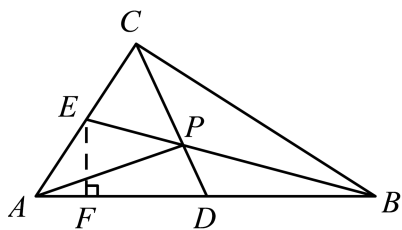
$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}AB \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC \cdot BC,$$

$$\therefore EF = \frac{\sqrt{6}a}{6},$$

由勾股定理得： $BF = \sqrt{BE^2 - EF^2} = \frac{5\sqrt{3}a}{6}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle EFB$ 中, $\cot \angle PBD = \frac{BF}{EF} = \frac{5\sqrt{3}a}{6}$, $\frac{\sqrt{6}a}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$;



故答案为: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\cos^2 45^\circ - \frac{\sin 60^\circ}{3 \tan 30^\circ} + \cot 30^\circ$.

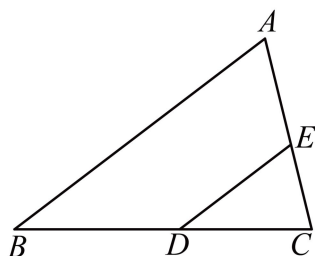
【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了特殊角三角函数值的混合运算, 熟记特殊角三角函数值是解题的关键; 利用特殊角三角函数化简即可.

【详解】 解: 原式 $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} + \sqrt{3}$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sqrt{3}$
 $= \sqrt{3}.$

20. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 18$, 点 D 在边 BC 上, $DE \parallel AB$, $9DE = 4AB$.



(1) 求 BD 的长;

(2) 连接 AD , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$.

【答案】 (1) 10

$$(2) \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的性质与判定，向量的线性运算：

(1) 证明 $\triangle CDE \sim \triangle CBA$ 得到 $\frac{CD}{CB} = \frac{DE}{AB} = \frac{4}{9}$ ，则 $CD = \frac{4}{9}CB = 8$ ，由此可得 $BD = BC - CD = 10$ ；

(2) 先求出 $\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$ ，再由 $CD = \frac{4}{9}CB$ 得到 $\overrightarrow{CD} = \frac{4}{9}\overrightarrow{CB} = \frac{4}{9}\vec{a} - \frac{4}{9}\vec{b}$ ，则 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}$ 。

【小问 1 详解】

解： $\because DE \parallel AB$ ，

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CBA$ ，

$$\therefore \frac{CD}{CB} = \frac{DE}{AB} = \frac{4}{9}，$$

$$\therefore CD = \frac{4}{9}CB = 8，$$

$$\therefore BD = BC - CD = 10；$$

【小问 2 详解】

解： $\because \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ，

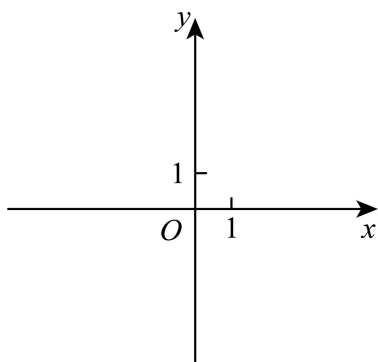
$$\therefore \overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}，$$

$$\because CD = \frac{4}{9}CB，$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{4}{9}\overrightarrow{CB} = \frac{4}{9}\vec{a} - \frac{4}{9}\vec{b}，$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} + \frac{4}{9}\vec{a} - \frac{4}{9}\vec{b} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}$$

21. 已知二次函数 $y = 2x^2 + 4x - 6$



(1) 用配方法把二次函数 $y = 2x^2 + 4x - 6$ 化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式，并指出这个函数图像的对称轴和顶点坐标；

(2) 如果该函数图像与 x 轴负半轴交于点 A ，与 y 轴交于点 C ，顶点为 D ， O 为坐标原点，求四边形 $ADCO$

的面积.

【答案】(1) $y = 2(x+1)^2 - 8$, 对称轴为直线 $x = -1$, 顶点坐标为 $(-1, -8)$

(2) 15

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的图象与性质;

(1) 配方法配方即可, 配方后即可求得对称轴与顶点坐标;

(2) 设对称轴交 x 轴于点 E ; 令 $y = 0$, 可求得点 A 的坐标; 令 $x = 0$, 可求得点 C 的坐标; 由

$S_{\text{四边形}ADCO} = S_{\triangle ADE} + S_{\text{梯形}DCOE}$ 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $y = 2x^2 + 4x - 6$ 配方得: $y = 2(x+1)^2 - 8$,

则抛物线的对称轴为直线 $x = -1$, 顶点坐标为 $(-1, -8)$;

【小问 2 详解】

解: 设对称轴交 x 轴于点 E ;

令 $y = 0$, 即 $y = 2x^2 + 4x - 6 = 0$,

解得: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$,

点 A 的坐标为 $(-3, 0)$, 即 $OA = 3$,

令 $x = 0$, 得 $y = -6$,

$\therefore C(0, -6)$, 即 $OC = 6$;

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$, 顶点坐标为 $(-1, -8)$,

$\therefore OE = 1$, $DE = 8$,

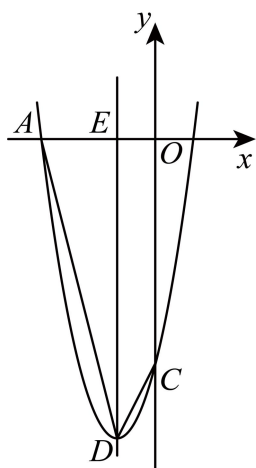
$\therefore AE = OA - OE = 3 - 1 = 2$,

$\therefore S_{\text{四边形}ADCO} = S_{\triangle ADE} + S_{\text{梯形}DCOE}$

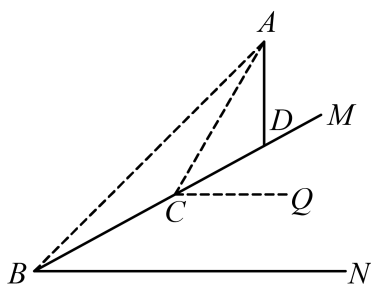
$$= \frac{1}{2} AE \times DE + \frac{1}{2} (DE + OC) \times OE$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 8 + \frac{1}{2} \times (8 + 6) \times 1$$

$$= 15.$$



22. 如图，某校九年级兴趣小组在学习了解直角三角形知识后，开展了测量山坡上某棵大树高度的活动. 已知小山的斜坡 BM 的坡度 $i = 1:\sqrt{3}$ ，在坡面 D 处有一棵树 AD (假设树 AD 垂直水平线 BN)，在坡底 B 处测得树梢 A 的仰角为 45° ，沿坡面 BM 方向前行 30 米到达 C 处，测得树梢 A 的仰角 $\angle ACQ$ 为 60° . (点 B 、 C 、 D 在一直线上)



(1) 求 A 、 C 两点的距离；

(2) 求树 AD 的高度 (结果精确到 0.1 米). (参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.732$)

【答案】 (1) 30m

(2) 树 AD 的高度约为 17.3m

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形的实际应用，三角形外角的性质，等角对等边等等：

(1) 如图所示，延长 AD 交 BN 于 G ，过点 C 作 $CH \perp AG$ 于 H ，先 $\text{Rt}\triangle CHD$ 得到 $\angle DCH = 30^\circ$ ，进而推出 $\angle ACD = 30^\circ$ ，再求出 $\angle ABC = 15^\circ$ ，则可推出 $\angle ABC = \angle CAB$ ，得到 $AC = BC = 30\text{m}$ ；

(2) 先解 $\text{Rt}\triangle AHC$ 得到 $CH = 15\text{m}$ ， $AH = 15\sqrt{3}\text{m}$ ，再解 $\text{Rt}\triangle CDH$ 得到 $DH = 5\sqrt{3}\text{m}$ ，则 $AD = AH - DH = 10\sqrt{3}\text{m} \approx 17.3\text{m}$.

【小问 1 详解】

解：如图所示，延长 AD 交 BN 于 G ，过点 C 作 $CH \perp AG$ 于 H ，

$$\because AH \perp CH, AG \perp BN,$$

$$\therefore CH \parallel BN,$$

$$\because \text{小山的斜坡 } BM \text{ 的坡度 } i = 1 : \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle CHD \text{ 中, } \tan \angle DCH = \frac{DH}{CH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle DCH = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACH = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = 30^\circ,$$

$$\text{同理可得 } \angle DBG = 30^\circ,$$

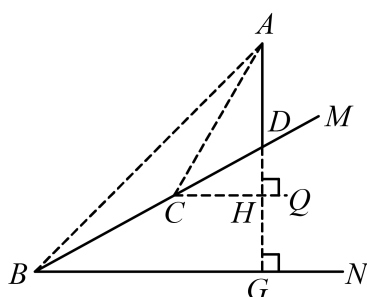
$$\therefore \angle ABG = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle ACD - \angle ABC = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle CAB,$$

$$\therefore AC = BC = 30\text{m};$$



【小问 2 详解】

$$\text{解：Rt}\triangle AHC \text{ 中, } CH = AC \cdot \cos \angle ACH = 30 \times \frac{1}{2} = 15\text{m}, AH = AC \cdot \sin \angle ACH = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}\text{m},$$

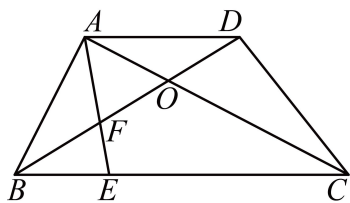
$$\text{在 Rt}\triangle CDH \text{ 中, } DH = CH \cdot \tan \angle DCH = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}\text{m},$$

$$\therefore AD = AH - DH = 10\sqrt{3}\text{m} \approx 17.3\text{m},$$

$$\therefore \text{树 } AD \text{ 的高度约为 } 17.3\text{m}.$$

23. 如图，已知在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， E 是边 BC 上一点， AE 与对角线 BD 相交于点 F ，且

$$BE^2 = EF \cdot AE.$$



(1) 求证: $\triangle DAB \sim \triangle AFB$;

(2) 联结 AC , 与 BD 相交于点 O , 若 $AB \times OB = BC \times AF$, 求证: $AF^2 = OD \times BF$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定与性质, 灵活运用相似三角形的判定是解题的关键.

(1) 由 $BE^2 = EF \cdot AE$ 及 $\angle AEB = \angle BEF$ 可得 $\triangle AEB \sim \triangle BEF$, 则有 $\angle EBF = \angle BAE$; 再由平行条件得 $\angle BAE = \angle ADB$, 则可证明 $\triangle DAB \sim \triangle AFB$;

(2) 由 $AB \times OB = BC \times AF$ 及 $\angle EBF = \angle BAE$, 可得 $\triangle ABF \sim \triangle BCO$, 则可得 $\angle AOF = \angle AFO$, 进而得 $AF = OA$; 再证明 $\triangle AOD \sim \triangle BFA$ 即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because BE^2 = EF \cdot AE$,

$$\therefore \frac{BE}{EF} = \frac{AE}{BE};$$

$$\because \angle AEB = \angle BEF,$$

$$\therefore \triangle AEB \sim \triangle BEF,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle BAE;$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle EBF,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ADB;$$

$$\because \angle ABF = \angle DBA,$$

$$\therefore \triangle DAB \sim \triangle AFB;$$

【小问 2 详解】

证明: $\because AB \times OB = BC \times AF$

$$\therefore \frac{AB}{AF} = \frac{BC}{OB};$$

由 (1) 知 $\angle EBF = \angle BAE$,

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle BCO,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle BOC,$$

$$\therefore \angle AFO = \angle AOF,$$

$$\therefore AF = OA;$$

$$\because \angle BOC = \angle AOD,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle AOD;$$

由 (1) 知 $\angle BAE = \angle ADB$,

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle BFA,$$

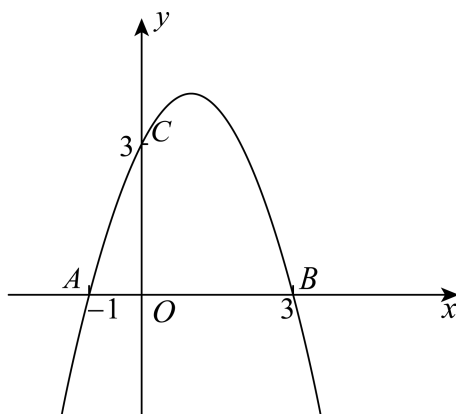
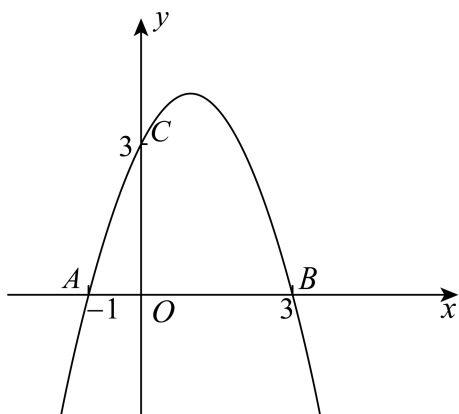
$$\therefore \frac{OA}{BF} = \frac{OD}{AF},$$

$$\text{即 } OA \times AF = OD \times BF.$$

$$\therefore AF = OA,$$

$$\therefore AF^2 = OD \times BF.$$

24. 已知在直角坐标平面 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 三点.



备用图

备用图

(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 点 D 是点 C 关于抛物线对称轴对称的点, 连接 AD 、 BD , 将抛物线向下平移 m ($m > 0$) 个单位后, 点 D 落在点 E 处, 过 B 、 E 两点的直线与线段 AD 交于点 F .

①如果 $m = 2$, 求 $\tan \angle DBF$ 的值;

②如果 $\triangle BDF$ 与 $\triangle ABD$ 相似, 求 m 的值.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$

(2) ① $\frac{1}{2}$; ② $m = 3$ 或 $m = \frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法求解即可;

(2) ①先求出抛物线对称轴为直线 $x=1$ ，则 $D(2,3)$ ，进而得到 $E(2,1)$ ；求出直线 BE 的解析式为 $y=-x+3$ ，同理可得直线 AD 的解析式为 $y=x+1$ ，进而求出 $F(1,2)$ ；利用勾股定理求出 $DF=\sqrt{2}$ ， $BF=2\sqrt{2}$ ， $BD=\sqrt{10}$ ，进而利用勾股定理的逆定理证明 BDF 是直角三角形，且 $\angle DFB=90^\circ$ ，则 $\tan \angle DBF = \frac{DF}{BF} = \frac{1}{2}$ ；② $\triangle ABD \sim \triangle FBD$ 时，则此时点 F 与点 A 重合，则 BF 与 AB 重合，可得 $m=DE=3$ ；当 $\triangle ABD \sim \triangle BFD$ 时，则 $\angle DBF = \angle DAB$ ，如图所示，设直线 DE 交 x 轴于 G ，则 $G(2,0)$ ，推出 $\angle DAG = \angle ADG = 45^\circ$ ，得到 $\angle DBF = \angle DAB = 45^\circ$ ，如图所示，取点 $(-1,2)$ ，则 $DH = \sqrt{10}$ ， $BH = \sqrt{20}$ ， $BD = \sqrt{10}$ ，证明 $\triangle BDH$ 是等腰直角三角形，得到 $\angle DBH = 45^\circ$ ，则点 F 在直线 BH 上，同理可得直线 BH 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ，在 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 中，当 $x=2$ 时， $y = \frac{1}{2}$ ，则 $E(2, \frac{1}{2})$ ，即可得到 $m = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ；综上所述， $m=3$ 或 $m = \frac{5}{2}$ 。

【小问 1 详解】

解：把 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ 、 $C(0,3)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 中，

$$\text{得：} \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$ ；

【小问 2 详解】

解：① $\because$ 抛物线解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$ ，

$\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x=1$ ，

$\therefore$ 点 D 是点 C 关于抛物线对称轴对称的点，

$\therefore D(2,3)$ ，

$\therefore$ 将抛物线向下平移 $m (m > 0)$ 个单位后，点 D 落在点 E 处，且 $m=2$ ，

$\therefore E(2,1)$ ；

设直线 BE 的解析式为 $y = kx + b'$,

$$\therefore \begin{cases} 3k + b' = 0 \\ 2k + b' = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -1 \\ b' = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BE 的解析式为 $y = -x + 3$,

同理可得直线 AD 的解析式为 $y = x + 1$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x + 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},$$

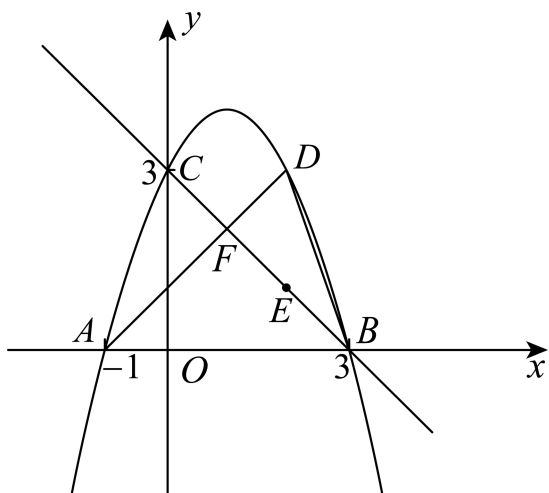
$\therefore F(1, 2)$;

$$\therefore DF = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}, \quad BF = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}, \quad BD = \sqrt{(3-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore DF^2 + BF^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 10 = (\sqrt{10})^2 = BD^2,$$

$\therefore BDF$ 是直角三角形, 且 $\angle DFB = 90^\circ$,

$$\therefore \tan \angle DBF = \frac{DF}{BF} = \frac{1}{2};$$



②当 $\triangle ABD \sim \triangle FBD$ 时, 则此时点 F 与点 A 重合, 则 BF 与 AB 重合,

$$\therefore m = DE = 3;$$

当 $\triangle ABD \sim \triangle BFD$ 时, 则 $\angle DBF = \angle DAB$,

如图所示, 设直线 DE 交 x 轴于 G , 则 $G(2, 0)$,

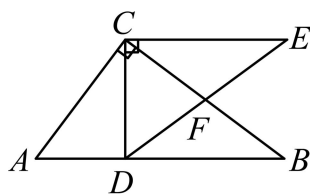


图1

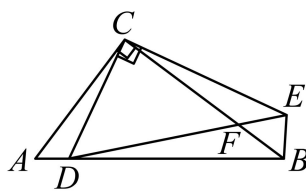
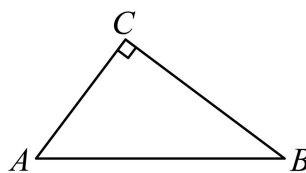


图2



备用图

- (1) 如图 1, 当 $CE \parallel AB$ 时, 求 AD 的长;
- (2) 如图 2, 联结 BE , 设 $AD = x$, $BE = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式并写出定义域;
- (3) 过点 C 作射线 BE 的垂线, 垂足为 H , 射线 CH 与射线 DE 交于点 Q , 当 $\triangle CQE$ 是等腰三角形时, 求 AD 的长.

【答案】(1) $\frac{9}{5}$

(2) 函数关系式为 $y = \frac{4}{3}x$, 定义域为 $0 < x < 5$

(3) $AD = 1$

【解析】

【分析】(1) 由平行关系可得 $\angle B = \angle ECB$, 由 $CE \perp CD$, 则可得 $CD \perp AB$, 由面积关系可求得 CD , 进而由勾股定理求得结果;

(2) 由已知易得 $\triangle ABC \sim \triangle DCE$, 由相似三角形的性质及 $\angle ACD = \angle BCE$, 可得 $\triangle ACD \sim \triangle BCE$, 由相似三角形的性质即可得函数关系式; 再由点 D 是 AB 边上的一个动点, 且不与点 A 、 B 重合, 即可确定自变量的取值范围;

(3) 由 (2) $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ 得 $\angle CBE = \angle A$, 则可得 $\angle DBE = 90^\circ$, 进而得 $CQ \parallel AB$; 由面积关系求得 BH 的长; 由勾股定理可求得 CH ; 由平行可得 $\triangle QHE \sim \triangle DBE$, 由相似三角形的性质即可求得 AD 的值.

【小问 1 详解】

解: $\because CE \parallel AB$,

$\therefore \angle ECB = \angle B$,

$\because CE \perp CD$,

$\therefore \angle DCB + \angle ECB = 90^\circ$

$\therefore \angle DCB + \angle B = 90^\circ$;

$\therefore CD \perp AB$;

由勾股定理得: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 4$,

$$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD,$$

$$\therefore CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{12}{5},$$

$$\text{由勾股定理得: } AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \frac{9}{5};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because \angle ACB = 90^\circ, \quad CD \perp CE,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE};$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BE}, \quad \text{即 } \frac{3}{4} = \frac{x}{y},$$

$$\therefore y = \frac{4}{3}x;$$

$\therefore$ 点 D 是 AB 边上的一个动点, 且不与点 A 、 B 重合,

$\therefore$ 自变量 x 的取值范围为 $0 < x < 5$;

【小问 3 详解】

$$\text{解: 由 (2) 知, } \triangle ACD \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle A,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle ABC + \angle CBE = \angle ABC + \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore CH \perp BH,$$

$$\therefore CQ \parallel AB;$$

$$\therefore \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{1}{2} AB \times BH,$$

$$\therefore BH = \frac{AC \times BC}{AB} = \frac{12}{5};$$

$$\text{由勾股定理得 } CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \frac{16}{5};$$

$$\therefore CQ \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle QHE \sim \triangle DBE,$$

$$\therefore \frac{QH}{DB} = \frac{QE}{DE};$$

$$\therefore \angle DEC < 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEQ > 90^\circ,$$

$\therefore \triangle CQE$ 为等腰三角形时, 只能是 $CE = QE$;

$$\therefore QH = CH, \frac{QH}{DB} = \frac{CE}{DE};$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{CE}{CD} = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3},$$

设 $CE = 4k$, $CD = 3k$, 由勾股定理得 $DE = 5k$,

$$\therefore \frac{QH}{DB} = \frac{CE}{DE} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore DB = AB - AD = 5 - AD,$$

$$\text{即 } \frac{16}{5 - AD} = \frac{4}{5},$$

解得: $AD = 1$.



电子版资料 小学 初中 高中

名师教学 · 务实课程 · 注重教辅

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：



扫描二维码逛本店

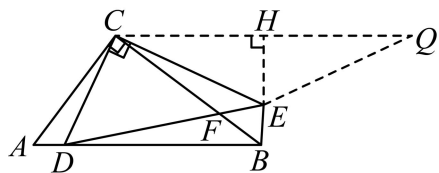
ONLINE EDUCATION

为您的课程，我们一直在努力

最新资讯请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版



淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com



【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质，勾股定理，平行线的判定与性质，面积关系的应用，等腰三角形的性质，综合运用这些知识是关键.