

2023 年上海市宝山区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）下列各题的四个选项中，有且只有只有一个选项是正确的。

1. 已知线段 a 、 b ，如果 $a:b=2:3$ ，那么下列各式中一定正确的是（ ）

- A. $2a=3b$ B. $a+b=5$ C. $\frac{a+b}{a}=\frac{5}{2}$ D. $\frac{a+3}{b+2}=1$

【答案】C

【解析】

【分析】根据比例的性质进行判断即可。

【详解】解：A、由 $a:b=2:3$ ，得 $3a=2b$ ，故本选项错误，不符合题意；

B、当 $a=4$ ， $b=6$ 时， $a:b=2:3$ ，但是 $a+b=10$ ，故本选项错误，不符合题意；

C、由 $a:b=2:3$ ，得 $\frac{a+b}{a}=\frac{5}{2}$ ，故本选项正确，符合题意；

D、当 $a=4$ ， $b=6$ 时， $a:b=2:3$ ，但是 $\frac{a+3}{b+2}=\frac{7}{8}$ ，故本选项错误，不符合题意。

故选：C。

【点睛】本题考查了比例的性质及式子的变形，用到的知识点：在比例里，两外项的积等于两内项的积，比较简单。

2. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 上，如果 $AD:BD=1:3$ ，那么下列条件中能够判断 $DE \parallel BC$ 的是（ ）

- A. $\frac{DE}{BC}=\frac{1}{4}$ B. $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{4}$ C. $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{4}$ D. $\frac{AE}{EC}=\frac{1}{4}$

【答案】C

【解析】

【详解】试题解析： $\because AD:BD=1:3$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{当 } \frac{AE}{AC}=\frac{1}{4} \text{ 时, } \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC},$$

$\therefore DE \parallel BC$ ，故 C 选项能够判断 $DE \parallel BC$ ；

而 A，B，D 选项不能判断 $DE \parallel BC$ ；

故选 C。

3. 已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，下列条件中，能判定向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 方向相同的是（ ）

- A. $\vec{a} \parallel \vec{c}, \vec{b} \parallel \vec{c}$ B. $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ C. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ D. $\vec{a} = 3\vec{c}, \vec{b} = 2\vec{c}$

【答案】D

【解析】

【分析】由 $\vec{a} \parallel \vec{c}, \vec{b} \parallel \vec{c}$, 可得 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反; 由 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ 可知, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反; 由 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$, 可得 $\vec{a} = -\vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反, 由 $\vec{a} = 3\vec{c}, \vec{b} = 2\vec{c}$, 可得 $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同, 即可得出答案.

【详解】解: 对于 A 选项, 由 $\vec{a} \parallel \vec{c}, \vec{b} \parallel \vec{c}$, 可得 $\vec{a} \parallel \vec{b}$,

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反,

故 A 选项不符合题意;

对于 B 选项, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反,

故 B 选项不符合题意;

对于 C 选项, 由 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$, 可得 $\vec{a} = -\vec{b}$,

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反,

故 C 选项不符合题意;

对于 D 选项, 由 $\vec{a} = 3\vec{c}, \vec{b} = 2\vec{c}$, 可得 $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$,

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同,

故 D 选项符合题意.

故选: D.

【点睛】本题考查平面向量, 熟练掌握平面向量的性质是解答本题的关键.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(2,1)$ 与原点 O 的连线与 x 轴的正半轴的夹角为 β , 那么 $\tan \beta$ 的值是 ()

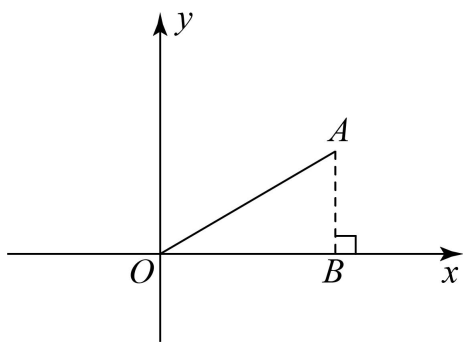
- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】如图, 由题意易得 $OB = 2, AB = 1$, 然后问题可求解.

【详解】解: 过点 A 作 $AB \perp x$ 轴于点 B , 如图所示:



由题意得: $\beta = \angle AOB$,

$$\therefore A(2,1),$$

$$\therefore OB = 2, AB = 1,$$

$$\therefore \tan \beta = \frac{AB}{OB} = \frac{1}{2};$$

故选 B.

【点睛】 本题主要考查三角函数及坐标与图形, 熟练掌握求一个角的正切值是解题的关键.

5. 将抛物线 $y = x^2 + 3$ 向右平移 3 个单位长度, 平移后抛物线的表达式为 ()

A. $y = x^2$

B. $y = x^2 - 3$

C. $y = (x+3)^2 + 3$

D. $y = (x-3)^2 + 3$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据二次函数的平移可进行求解.

【详解】 解: 将抛物线 $y = x^2 + 3$ 向右平移 3 个单位长度, 平移后抛物线的表达式为 $y = (x-3)^2 + 3$;

故选 D.

【点睛】 本题主要考查二次函数的平移, 熟练掌握“左加右减, 上加下减”是解题的关键.

6. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$ 、 $BC = 4$. 以 C 为圆心作 $\odot C$, 如果圆 C 与斜边 AB 有两个公共点, 那么圆 C 的半径长 R 的取值范围是 ()

A. $0 < R < \frac{12}{5}$

B. $R < \frac{12}{5}$

C. $\frac{12}{5} < R \leq 3$

D. $\frac{12}{5} < R \leq 4$.

【答案】 C

【解析】

【分析】 作 $CD \perp AB$ 于 D , 由勾股定理求出 AB , 由三角形的面积求出 CD , 由 $AC > BC$, 可得以 C 为圆心, $R = 4$ 为半径所作的圆与斜边 AB 只有一个公共点; 若 $\odot C$ 与斜边 AB 有两个公共点, 即可得出 R 的取值范围.

【详解】 解: 作 $CD \perp AB$ 于 D , 如图所示:

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AC = 3, BC = 4,$$

$$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\because \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} AC \cdot BC,$$

$$\therefore CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{12}{5},$$

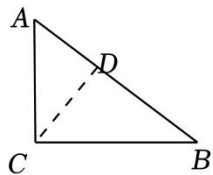
$$\text{即圆心 } C \text{ 到 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{12}{5},$$

$$\because AC < BC,$$

$\therefore$ 以 C 为圆心, $R = 4$ 为半径所作的圆与斜边 AB 只有一个公共点,

$\therefore$ 若 $\odot C$ 与斜边 AB 有两个公共点, 则 R 的取值范围是 $\frac{12}{5} < R \leq 3$.

故选: C.



【点睛】此题考查了直线与圆的位置关系、勾股定理以及直角三角形的性质. 此题难度适中, 注意掌握数形结合思想的应用.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知线段 $a = 2$, $b = 8$, 如果线段 c 是 a 、 b 的比例中项, 那么 $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 4

【解析】

【分析】根据成比例线段列出比例式即可求解.

【详解】解: $\because$ 线段 c 是 a 、 b 的比例中项,

$$\therefore a = 2, b = 8,$$

$$\therefore c^2 = ab = 16,$$

$$\therefore c = 4 \text{ (负值舍去)}$$

故答案为: 4.

【点睛】本题考查了成比例线段, 熟练掌握成比例线段是解题的关键.

8. 已知一个三角形的三边之比为 $2:3:4$, 与它相似的另一个三角形 ABC 的最小边长为 4 厘米, 那么三角形 ABC 的周长为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 厘米.

【答案】 18

【解析】

【分析】相似三角形的对应边的比相等，因而与已知三角形相似的三角形的三边的比也是 $2:3:4$ ，即可求得三角形的三边，从而求得周长。

【详解】解：所求三角形的三边的比是 $2:3:4$ ，

设最短边是 $2x$ 厘米，则 $2x=4$ ，

解得 $x=2$ ，

因而另外两边的长是 $3x=6$ 厘米， $4x=8$ 厘米。

则三角形的周长是 $6+8+4=18$ （厘米）。

故答案为：18。

【点睛】本题考查了相似三角形的性质，相似三角形对应边的比相等，由此得到所求三角形的三边的比也是 $2:3:4$ ，是解题关键。

9. 计算： $2(\vec{a}-\vec{b})-3(\vec{a}+\vec{b})=$ _____。

【答案】 $-\vec{a}-5\vec{b}$

【解析】

【分析】根据加减运算及乘法运算法则进行计算即可。

【详解】解：原式 $=2\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-3\vec{b}$

$=-\vec{a}-5\vec{b}$

故答案为： $-\vec{a}-5\vec{b}$ 。

【点睛】本题考查了向量的线性运算，熟练掌握平面的加减运算及乘法运算法则是正确计算本题的关键。

10. 如果抛物线 $y=ax^2$ 的开口方向向下，那么 a 的取值范围是_____。

【答案】 $a<0$

【解析】

【分析】根据二次函数的图象可进行求解。

【详解】解：由抛物线 $y=ax^2$ 的开口方向向下，则有 $a<0$ ；

故答案为 $a<0$ 。

【点睛】本题主要考查二次函数的图象与性质，熟练掌握二次函数的图象与性质是解题的关键。

11. 抛物线 $y=-(x-1)^2+2$ 的对称轴是_____。

【答案】直线 $x=1$

【解析】

【分析】由二次函数顶点式可得抛物线顶点坐标，进而求解.

【详解】解：∵ $y = -(x-1)^2 + 2$,

∴ 抛物线顶点坐标为 $(1, 2)$ ，对称轴为直线 $x = 1$,

故答案为：直线 $x = 1$.

【点睛】本题考查二次函数的性质，解题关键是掌握二次函数的顶点式.

12. 正六边形一个外角的度数为_____.

【答案】 60° ## 60 度

【解析】

【分析】根据正多边形的每一个外角都相等和多边形的外角和等于 360° 解答即可.

【详解】∵ 正六边形的外角和是 360° ,

∴ 正六边形的一个外角的度数为： $360^\circ \div 6 = 60^\circ$,

故答案为： 60° .

【点睛】本题主要考查多边形的外角和及正多边形外角度数的计算，掌握多边形外角和等于 360° 是解答本题的关键.

13. 已知圆 O 的半径为 1, A 是圆 O 内一点, 如果将线段 OA 的长记为 d , 那么 d 的取值范围是 _____.

【答案】 $0 \leq d < 1$

【解析】

【分析】根据点在圆内, $0 \leq d < 1$, 可得结论.

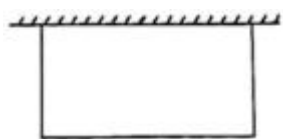
【详解】解：∵ 点 A 在圆内,

∴ $0 \leq d < 1$,

故答案为： $0 \leq d < 1$.

【点睛】本题考查点与圆的位置关系，解题的关键是记住：点与圆的位置关系有 3 种. 设 $\odot O$ 的半径为 r , 点 P 到圆心的距离 $OP = d$, 则有：①点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d > r$ ②点 P 在圆上 $\Leftrightarrow d = r$. ③点 P 在圆内 $\Leftrightarrow d < r$.

14. 如图, 用长为 12 米的篱笆围成一个矩形花圃, 花圃一面靠墙 (墙的长度超过 12 米), 设花圃垂直于墙的一边长为 x 米, 花圃面积为 y 平方米, 那么 y 关于 x 的函数解析式为 _____. (不要求写出定义域)



【答案】 $y = x(12 - 2x)$

【解析】

【分析】由篱笆的总长及花圃垂直于墙的一边长度，可得出花圃平行于墙的一边长为 $(12-2x)$ 米，再利用矩形的面积公式，即可得出 y 关于 x 的函数解析式.

【详解】解：∵篱笆的总长为12米，花圃垂直于墙的一边长为 x 米，

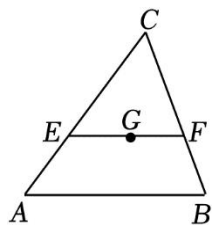
∴花圃平行于墙的一边长为 $(12-2x)$ 米.

根据题意得： $y = x(12-2x)$.

故答案为： $y = x(12-2x)$.

【点睛】本题考查了根据实际问题列二次函数关系式，根据各数量之间的关系，找出 y 关于 x 的函数解析式是解题的关键.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知线段 EF 经过三角形的重心 G ， $EF \parallel AB$ ，四边形 $ABFE$ 的面积为 15cm^2 ，那么 $\triangle ABC$ 的面积为_____ cm^2 .

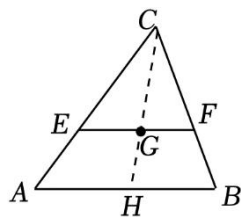


【答案】27

【解析】

【分析】连接 CG 并延长交 AB 于 H ，由 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，可得 $\frac{CG}{CH} = \frac{2}{3}$ ，而 $EF \parallel AB$ ，有 $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ ， $\frac{CE}{CA} = \frac{CG}{CH} = \frac{2}{3}$ ，故 $\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAB}} = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ ，设 $S_{\triangle ABC} = x \text{ cm}^2$ ，有 $\frac{x-15}{x} = \frac{4}{9}$ ，即可解得答案.

【详解】解：连接 CG 并延长交 AB 于 H ，如图：



∵ G 为 $\triangle ABC$ 的重心，

∴ $CG = 2GH$ ，

∴ $\frac{CG}{CH} = \frac{2}{3}$ ，

∵ $EF \parallel AB$ ，

∴ $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ ， $\frac{CE}{CA} = \frac{CG}{CH} = \frac{2}{3}$ ，

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{CG}{CH} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAB}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

设 $S_{\triangle ABC} = x \text{ cm}^2$, 则 $S_{\triangle CEF} = (x-15)\text{cm}^2$,

$$\therefore \frac{x-15}{x} = \frac{4}{9},$$

解得 $x = 27$,

故答案为: 27.

【点睛】 本题考查三角形的重心, 涉及相似三角形的判定与性质, 解题的关键是掌握三角形重心的性质.

16. 已知内切两圆的圆心距为 5, 其中一个圆的半径长等于 2, 那么另一个圆的半径长等于 ____.

【答案】 7

【解析】

【分析】 设另一个圆的半径长为 r , 根据两圆内切得出 $r-2=5$ 或 $2-r=5$, 再求出 r 即可.

【详解】 解: 设另一个圆的半径长为 r ,

$\because$ 内切两圆的圆心距为 5, 其中一个圆的半径长等于 2,

$$\therefore r-2=5 \text{ 或 } 2-r=5,$$

解得: $r=7$ 或 $r=-3$ (半径不能为负, 舍去),

所以另一个圆的半径长是 7.

故答案为: 7.

【点睛】 本题考查了圆与圆的位置关系, 能熟练掌握圆与圆的位置关系的内容是解此题的关键, 已知两圆的半径分别为 a , $b(a > b)$, 两圆的圆心距为 d , 那么当 $a-b=d$ 时, 两圆的位置关系是内切.

17. 已知相交两圆的半径长分别为 13 和 20, 公共弦的长为 24, 那么这两个圆的圆心距为 ____.

【答案】 11 或 21

【解析】

【分析】 设半径长分别为 13 和 20 的 $\odot A$ 、 $\odot B$ 相交于点 E 、点 F , $EF = 24$, 连接 AE 、 BE , 则 $AE = 13$, $BE = 20$, 再分两种情况讨论, 一是点 A 、点 B 在直线 EF 的同侧, 延长 BA 交 EF 于点 C , 根据“相交两圆的连心线垂直平分公共弦”得 $\angle BCE = 90^\circ$, $CE = CF = 12$, 可由勾股定理求得 $BC = 16$, $AC = 5$, 则 $AB = BC - AC = 11$; 二是点 A 、点 B 在直线 EF 的异侧, BA 交 EF 于点 D , 则 $BD = 16$, $AD = 5$, $AB = BD + AD = 21$.

【详解】 解: 半径长分别为 13 和 20 的 $\odot A$ 、 $\odot B$ 相交于点 E 、点 F , $EF = 24$, 连接 AE 、 BE , 则 $AE = 13$, $BE = 20$,

如图 1，点 A、点 B 在直线 EF 的同侧，延长 BA 交 EF 于点 C，

$\because AB$ 垂直平分 EF ，

$$\therefore \angle BCE = 90^\circ, \quad CE = CF = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2} \times 24 = 12,$$

$$\therefore BC = \sqrt{BE^2 - CE^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16, \quad AC = \sqrt{AE^2 - CE^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

$$\therefore AB = BC - AC = 16 - 5 = 11;$$

如图 2，点 A、点 B 在直线 EF 的异侧，BA 交 EF 于点 D，

$$\therefore \angle BDE = \angle ADE = 90^\circ, \quad DE = DF = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2} \times 24 = 12,$$

$$\therefore BD = \sqrt{BE^2 - DE^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16, \quad AD = \sqrt{AE^2 - DE^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

$$\therefore AB = BD + AD = 16 + 5 = 21,$$

综上所述，这两个圆的圆心距为 11 或 21，

故答案为：11 或 21.

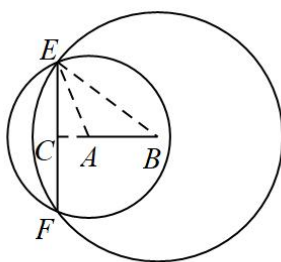


图1

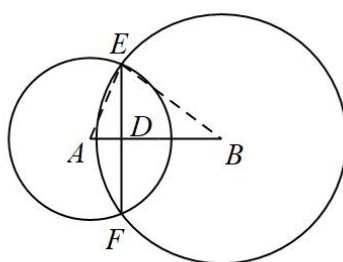


图2

【点睛】 此题重点考查圆与圆的位置关系、线段的垂直平分线的性质、勾股定理以及数形结合与分类讨论数学思想的运用等知识与方法，正确地作出所需要的辅助线是解题的关键.

18. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 2$ ， $\angle A = 36^\circ$.

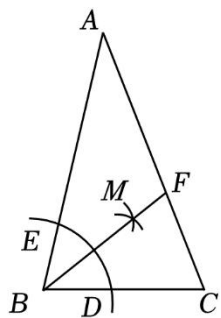
按下列步骤作图：

步骤 1：以点 B 为圆心，小于 BC 的长为半径作弧分别交 BC、AB 于点 D、E；

步骤 2：分别以点 D、E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，两弧交于点 M；

步骤 3：作射线 BM 交 AC 于点 F.

那么线段 AF 的长为 ____.



【答案】 $\sqrt{5}-1$

【解析】

【分析】由题意得， BF 为 $\angle ABC$ 的平分线，可得 $\angle ABF = \angle CBF = 36^\circ$ ，进而可得 $AF = BC$ ，设 $BC = AF = x$ ，则 $CF = 2 - x$ ，结合已知条件证明 $\triangle BCF \sim \triangle ACB$ ，则 $\frac{BC}{AC} = \frac{CF}{BC}$ ，即 $\frac{x}{2} = \frac{2-x}{x}$ ，求出 x 的值，即可得出答案.

【详解】解：由题意得， BF 为 $\angle ABC$ 的平分线，

$$\therefore \angle ABF = \angle CBF,$$

$$\because AB = AC, \angle A = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle CBF = 36^\circ,$$

$$\therefore AF = BF, \angle BFC = 180^\circ - \angle C - \angle CBF = 72^\circ,$$

$$\therefore BC = BF,$$

$$\therefore AF = BC,$$

$$\text{设 } BC = AF = x, \text{ 则 } CF = 2 - x,$$

$$\because \angle A = \angle CBF, \angle BCF = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle BCF \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CF}{BC}, \text{ 即 } \frac{x}{2} = \frac{2-x}{x},$$

$$\text{解得 } x = \sqrt{5}-1 \text{ 或 } -\sqrt{5}-1 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore AF = \sqrt{5}-1.$$

故答案为： $\sqrt{5}-1$.

【点睛】本题考查尺规作图、等腰三角形的性质、相似三角形的判定与性质，熟练掌握角平分线的作图方法、等腰三角形的性质、相似三角形的判定与性质是解答本题的关键.

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 计算: $2\cos 60^\circ - |1 - \cos 30^\circ| + \frac{\tan 45^\circ}{\sin 60^\circ - 1}$.

【答案】 $-\frac{3\sqrt{3}}{2} - 4$

【解析】

【分析】 分别把各特殊角的三角函数值代入进行计算即可.

【详解】 解: $2\cos 60^\circ - |1 - \cos 30^\circ| + \frac{\tan 45^\circ}{\sin 60^\circ - 1}$

$$= 2 \times \frac{1}{2} - \left| 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}$$

$$= 1 - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3} - 2}$$

$$= 1 - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} - 4$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} - 4$$

【点睛】 本题考查了三角函数值的混合运算, 熟记各特殊角的三角函数值是解题的关键.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $A(3, 0)$ 、 $B(2, -3)$ 、 $C(0, -3)$.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 D 与点 E 是抛物线上关于对称轴对称的两点, 如果点 D 的横坐标为 -2 , 试求点 E 的坐标.

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$

(2) $(4, 5)$

【解析】

【分析】 (1) 根据二次函数图象上的点的坐标以及待定系数法解决此题.

(2) 根据二次函数图象的对称性求得 E 的横坐标, 再将其代入函数解析式, 进而求得 E 的坐标.

【小问 1 详解】

解: 由题意得, $9a + 3b + c = 0$, $4a + 2b + c = -3$, $c = -3$.

$\therefore a = 1, b = -2$.

$\therefore$ 这个抛物线的表达式为 $y = x^2 - 2x - 3$.

【小问 2 详解】

由 (1) 得, $y=x^2-2x-3$.

$\therefore$ 该抛物线的对称轴是直线 $x=1$.

$\because$ 点 D 与点 E 是抛物线上关于对称轴对称的两点, 点 D 的横坐标为 -2 ,

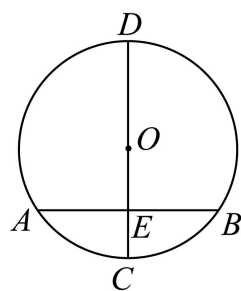
$\therefore E$ 的横坐标是 4 .

$\therefore$ 当 $x=4$ 时, $y=16-8-3=5$.

$\therefore E(4,5)$.

【点睛】 本题主要考查二次函数图象上点的坐标特征、待定系数法求函数解析式, 熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征是解决本题的关键.

21. 如图, 已知圆 O 的弦 AB 与直径 CD 交于点 E , 且 CD 平分 AB .



(1) 已知 $AB=6$, $EC=2$, 求圆 O 的半径;

(2) 如果 $DE=3EC$, 求弦 AB 所对的圆心角的度数.

【答案】 (1) $\frac{13}{4}$

(2) 120°

【解析】

【分析】(1) 连接 OA , 如图, 设 $\odot O$ 的半径为 r , 则 $OA=r$, $OE=r-2$, 先根据垂径定理得到 $AE=BE=3$, $CD \perp AB$, 在 $\text{Rt}\triangle OAE$ 中利用勾股定理得到 $3^2+(r-2)^2=r^2$, 然后解方程即可;

(2) 连接 OB , 如图, 先利用 $DE=3EC$ 得到 $OE=CE$, 即 $OE=\frac{1}{2}OA$, 再利用正弦的定义得到 $\angle A=30^\circ$, 然后根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理计算 $\angle AOB$ 即可.

【小问 1 详解】

解: 连接 OA , 如图, 设 $\odot O$ 的半径为 r , 则 $OA=r$, $OE=r-2$,

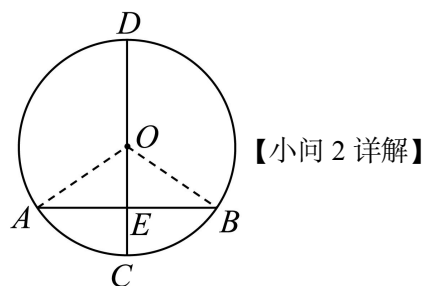
$\because CD$ 平分 AB ,

$\therefore AE=BE=3$, $CD \perp AB$,

在 $\text{Rt}\triangle OAE$ 中, $3^2+(r-2)^2=r^2$,

$$\text{解得 } r = \frac{13}{4},$$

即 $\odot O$ 的半径为 $\frac{13}{4}$;



解：连接 OB ，如图，

$$\because DE = 3EC,$$

$$\therefore OC + OE = 3EC,$$

$$\text{即 } OE + CE + OE = 3CE,$$

$$\therefore OE = CE,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OA,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OAE \text{ 中, } \because \sin A = \frac{OE}{OA} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

$$\because OA = OB,$$

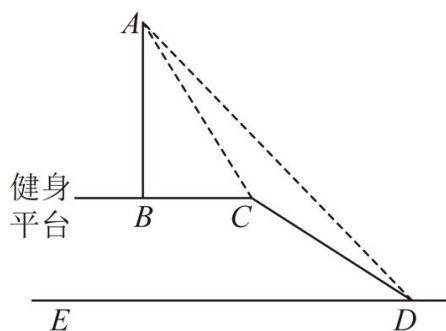
$$\therefore \angle B = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - \angle A - \angle B = 120^\circ,$$

即弦 AB 所对的圆心角的度数为 120° .

【点睛】 本题考查了圆心角、弧、弦的关系：在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等．也考查了垂径定理和勾股定理．

22. 如图，某小区车库顶部 BC 是居民健身平台，在平台上垂直安装了太阳能灯 AB ．已知平台斜坡 CD 的坡度 $i = 1:\sqrt{3}$ ，坡长为 6 米．在坡底 D 处测得灯的顶端 A 的仰角为 45° ，在坡顶 C 处测得灯的顶端 A 的仰角为 60° ，求灯的顶端 A 与地面 DE 的距离．（结果保留根号）

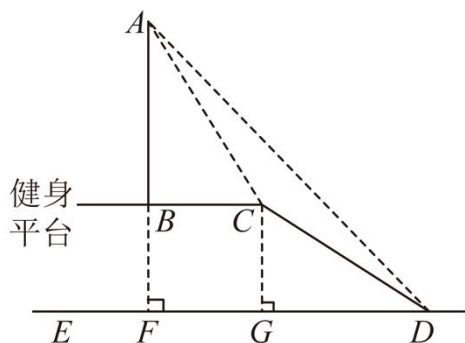


【答案】 $(3+3\sqrt{3})$ 米

【解析】

【分析】 过点 B 作 $BF \perp DE$ 于点 F ，过点 C 作 $CG \perp DE$ 于点 G ，由坡度的定义及斜坡 CD 的坡长为 6 米，可得 $DG = 3\sqrt{3}$ 米， $CG = BF = 3$ 米，设 $BC = FG = x$ 米，则 $DF = (x + 3\sqrt{3})$ 米，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{x} = \sqrt{3}$ ，解得 $AB = \sqrt{3}x$ ，则 $AF = (3 + \sqrt{3}x)$ 米，在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中， $\angle ADF = 45^\circ$ ，可得 $AF = DF$ ，即 $3 + \sqrt{3}x = x + 3\sqrt{3}$ ，求出 x 的值，进而可得答案.

【详解】 解：过点 B 作 $BF \perp DE$ 于点 F ，过点 C 作 $CG \perp DE$ 于点 G ，



由题意得， $CD = 6$ 米， $\angle ADF = 45^\circ$ ， $\angle ACB = 60^\circ$ ， $CG = BF$ ， $BC = FG$ ，

$\because$ 斜坡 CD 的坡度 $i = 1:\sqrt{3}$ ，

$$\therefore \frac{CG}{DG} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{即 } DG = \sqrt{3}CG,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDG$ 中，由勾股定理得 $CG^2 + (\sqrt{3}CG)^2 = 6^2$ ，

解得 $CG = 3$ ，

$$\therefore DG = 3\sqrt{3} \text{ 米}, \quad BF = 3 \text{ 米},$$

设 $BC = FG = x$ 米，则 $DF = (x + 3\sqrt{3})$ 米，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{x} = \sqrt{3}$,

解得 $AB = \sqrt{3}x$,

$\therefore AF = (3 + \sqrt{3}x)$ 米,

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, $\angle ADF = 45^\circ$,

$\therefore AF = DF$,

即 $3 + \sqrt{3}x = x + 3\sqrt{3}$,

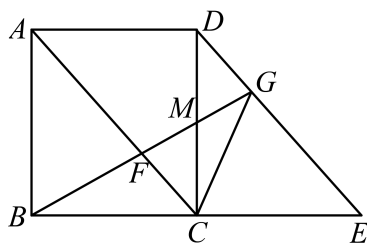
解得 $x = 3$,

$\therefore AF = (3 + 3\sqrt{3})$ 米.

$\therefore$ 灯的顶端 A 与地面 DE 的距离为 $(3 + 3\sqrt{3})$ 米.

【点睛】 本题考查解直角三角形的应用—仰角俯角问题、坡度坡角问题, 熟练掌握锐角三角函数的定义是解答本题的关键.

23. 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 、 $ACED$ 都是平行四边形, M 是边 CD 的中点, 联结 BM 并延长, 分别交 AC 、 DE 于点 F 、 G .



(1) 求证: $BF^2 = FM \cdot BG$;

(2) 联结 CG , 如果 $AB = \sqrt{2}CG$, 求证: $\angle BGC = \angle BAC$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 先根据平行四边形的性质得到 $AB \parallel CD$, $AB = CD$, 则 $AB = 2CM$, $CM = DM$, 再证明 $\triangle ABF \sim \triangle CMF$, 利用相似比得到 $\frac{BF}{FM} = \frac{AB}{CM} = 2$, 同理方法证明 $\triangle CMF \sim \triangle DMG$, 则 $\frac{FM}{MG} = \frac{CM}{DM} = 1$, 所以 $BF = 2FM = 2MG$, 然后利用 $BF^2 = 4FM^2$, $FM \cdot BG = 4FM^2$ 可得到结论;

(2) 先利用 $AB = CD$ 得到 $CD = \sqrt{2}CG$, $CM = \frac{\sqrt{2}}{2}CG$, 则 $\frac{CG}{CD} = \frac{CM}{CG} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 加上 $\angle MCG = \angle GCD$, 则可判断 $\triangle CMG \sim \triangle CGD$, 所以 $\angle MGC = \angle DEC$, 然后利用平行线的性质得到 $\angle EDC = \angle ACD = \angle BAC$, 从而得到结论.

【小问 1 详解】

解：证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD, AB = CD,$$

$\because M$ 是边 CD 的中点，

$$\therefore AB = 2CM, CM = DM,$$

$$\because AB \parallel CM,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle CMF,$$

$$\therefore \frac{BF}{FM} = \frac{AB}{CM} = 2,$$

$\because$ 四边形 $ACED$ 为平行四边形，

$$\therefore AC \parallel DE,$$

$$\therefore \triangle CMF \sim \triangle DMG,$$

$$\therefore \frac{FM}{MG} = \frac{CM}{DM} = 1,$$

$$\therefore BF = 2FM = 2MG,$$

$$\therefore BF^2 = 4FM^2, FM \cdot BG = FM \cdot 4FM = 4FM^2,$$

$$\therefore BF^2 = FM \cdot BG;$$

【小问 2 详解】

$$\because AB = \sqrt{2}CG, AB = CD,$$

$$\therefore CD = \sqrt{2}CG, CM = \frac{\sqrt{2}}{2}CG,$$

$$\therefore \frac{CG}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{CM}{CG} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{CG}{CD} = \frac{CM}{CG},$$

$$\because \angle MCG = \angle GCD,$$

$$\therefore \triangle CMG \sim \triangle CGD,$$

$$\therefore \angle MGC = \angle DEC,$$

$$\because AC \parallel ED,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle ACD,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

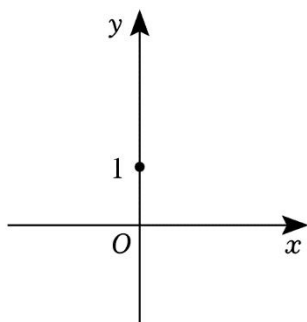
$$\therefore \angle BAC = \angle ACD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BGC.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质：在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用。在应用相似三角形的性质时利用相似比进行几何计

算，也考查了平行四边形的性质.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(2, 0)$ ，将该抛物线位于 x 轴上方的部分沿 x 轴翻折，得到的新图象记为“图象 U ”，“图象 U ”与 y 轴交于点 C .



- (1) 写出“图象 U ”对应的函数解析式及定义域；
- (2) 求 $\angle ACB$ 的正切值；
- (3) 点 P 在 x 轴正半轴上，过点 P 作 y 轴的平行线，交直线 BC 于点 E ，交“图象 U ”于点 F ，如果 $\triangle CEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似，求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & (x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -1) \\ x^2 - x - 2 & (-1 < x < 2) \end{cases}$

(2) 3 (3) $(\frac{1}{2}, 0)$ 或 $(\frac{3+\sqrt{73}}{4}, 0)$ 或 $(\frac{2}{3}, 0)$ 或 $(\frac{2+2\sqrt{10}}{3}, 0)$

【解析】

【分析】 (1) 用待定系数法即可求解；

(2) 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times CO = \frac{1}{2} \times AC \times BH$ ，求出 $BH = \frac{6}{\sqrt{5}}$ ，进而求解；

(3) 因为 $\angle E = 45^\circ = \angle ABC$ ，故当 $\triangle CEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似时， $\angle ECF = \angle ACB$ 或 $\angle BCA$ ，①当 $\angle ECF = \angle ACB$ 时，设： $CH = t$ ，则 $HF = 3t = HE$ ，则 $4t = CE = \sqrt{2}m$ 且 $3\sqrt{2}t = EF = -m^2 + 2m$ 或 $m^2 - 4$ ，即可求解；②当 $\angle ECF = \angle CAO$ 时，同理可解.

【小问 1 详解】

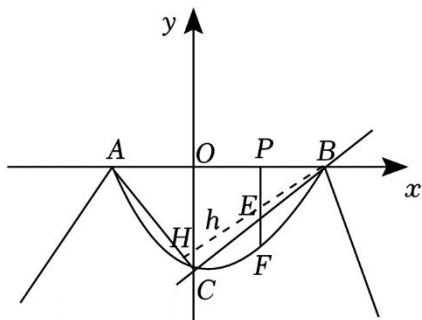
解：由题意得： $y = -(x+1)(x-2) = -x^2 + x + 2$ ，

则翻折后的函数表达式为： $y = x^2 - x - 2$ ，

即 $y = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & (x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -1) \\ x^2 - x - 2 & (-1 < x < 2) \end{cases}$ ；

【小问 2 详解】

过点 B 作 $BH \perp AC$ 于点 H ，



$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times CO = \frac{1}{2} \times AC \times BH,$$

$$\text{即 } 3 \times 2 = \sqrt{5} \times BH,$$

$$\text{解得: } BH = \frac{6}{\sqrt{5}},$$

$$\text{则 } \sin \angle ACB = \frac{BH}{BC} = \frac{\frac{6}{\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\text{则 } \tan \angle ACB = 3;$$

【小问 3 详解】

由点 B 、 C 的坐标得，直线 BC 的表达式为： $y = x - 2$ ，

设点 $P(m, 0)$ ，在点 $E(m, m - 2)$ ，点 $F(m, m^2 - m - 2)$ 或 $(m, -m^2 + m + 2)$ ，

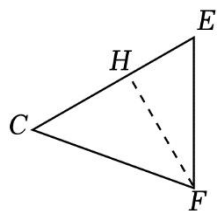
$$\text{则 } CE = \sqrt{2}m, \quad FE = -m^2 + 2m \text{ 或 } m^2 - 4,$$

如下图 $\angle E = 45^\circ = \angle ABC$ ，

故当 $\triangle CEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似时， $\angle ECF = \angle ACB$ 或 $\angle BCA$ ，

①当 $\angle ECF = \angle ACB$ 时，即 $\tan \angle ECF = \tan \angle ACB = 3$ ，

在 $\triangle CEF$ 中，过点 F 作 $FH \perp CE$ 于点 H ，



设： $CH = t$ ，则 $HF = 3t = HE$ ，

$$\text{则 } 4t = CE = \sqrt{2}m \text{ 且 } 3\sqrt{2}t = EF = -m^2 + 2m \text{ 或 } m^2 - 4,$$

$$\text{解得: } m = \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{3 + \sqrt{73}}{4} \text{ (不合题意的值已舍去);}$$

②当 $\angle ECF = \angle CAO$ 时，则 $\tan \angle ECF = \tan \angle CAO = 2$ ，

同理可得: $3t = CE = \sqrt{2}m$ 且 $2\sqrt{2}t = EF = -m^2 + 2m$ 或 $m^2 - 4$,

解得: $m = \frac{2}{3}$ 或 $\frac{2+2\sqrt{10}}{3}$ (不合题意的值已舍去);

综上, 点 P 的坐标为: $(\frac{1}{2}, 0)$ 或 $(\frac{3+\sqrt{73}}{4}, 0)$ 或 $(\frac{2}{3}, 0)$ 或 $(\frac{2+2\sqrt{10}}{3}, 0)$.

【点睛】 本题考查了二次函数综合运用, 涉及到二次函数图象与几何变换, 待定系数法求二次函数的解析式、解直角三角形等, 分类求解是本题解题的关键.

25. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 2\sqrt{5}$, $AB = 5$, $\cot \angle ABC = \frac{1}{2}$. 点 D 、 E 分别在边 AC 、 AB 上 (不与端点重合), BD 和 CE 交于点 F , 满足 $\angle ABD = \angle BCE$.

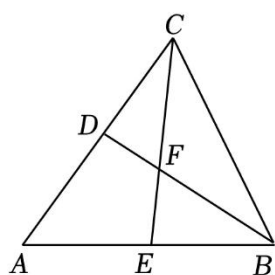


图1

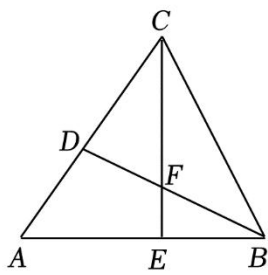
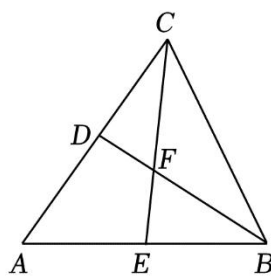


图2



(备用图)

- (1) 求证: $CD^2 = DF \cdot DB$;
- (2) 如图 2, 当 $CE \perp AB$ 时, 求 CD 的长;
- (3) 当 $\triangle CDF$ 是等腰三角形时, 求 $DF:FB$ 的值.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\frac{30}{11}$

(3) $5+2\sqrt{5}$ 或 4

【解析】

【分析】 (1) 作 $CG \perp AB$ 于 G , 解直角三角形 BCG , 求得 BG 和 CG , 进而解直角三角形 ACG , 求得 AC , 从而得出 $AC = AB$, 进一步得出 $\angle DCF = \angle CBD$, 从而 $\triangle CDF \sim \triangle BDC$, 进一步得出结论;

(2) 作 $DG \perp CE$ 于 G , 解直角三角形 BEF , 求得 $EF = \frac{1}{2}BE = 1$, $CF = CE - EF = 3$, 解 $\text{Rt}\triangle DCG$, 得出 $\tan \angle DCF = \frac{DG}{CG} = \frac{AE}{CE} = \frac{3}{4}$, 进而设 $DG = 3a$, $CG = 4a$, $CD = 5a$, 从而 $FG = \frac{3a}{2}$, 进而由 $CG + FG = CF$ 得, $4a + \frac{3}{2}a = 3$, 进一步得出结果;

(3) 有两种情形: 当 $CF = DF$ 时, 可推出 $CD = BC = 2\sqrt{5}$, 作 $CG \perp AB$ 于 G , 作 $DK \perp BC$ 于 K , 进而证明 $\triangle DCK \cong \triangle CBG$, 从而 $CK = BG = 2$, $DK = CG = 4$, 进而求得 BD , 根据 (1): $CD^2 = DF \cdot BD$, 求得 DF , 进而求得 BF , 进一步得出结果; 当 $CD = CF$ 时, 可推出 $BD = BC = 2\sqrt{5}$, 作 $BH \perp AC$ 于

H ，可得出 $CD=4$ ，同样根据 (1) $CD^2 = DF \cdot BD$ 求得 $DF = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ ，进一步得出结果.

【小问 1 详解】

解：证明：如图 1，

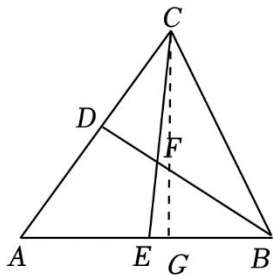


图1

作 $CG \perp AB$ 于 G ，

$$\therefore \cot \angle ABC = \frac{BG}{CG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore BG = 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 2, \quad CG = 2BG = 4,$$

$$\therefore AG = AB - BG = 3,$$

$$\therefore AC = 5,$$

$$\therefore AC = AB,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BCE,$$

$$\therefore \angle DCF = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle CDF,$$

$$\therefore \triangle CDF \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{DF}{CD} = \frac{CD}{BD},$$

$$\therefore CD^2 = DF \cdot DB;$$

【小问 2 详解】

如图 2，

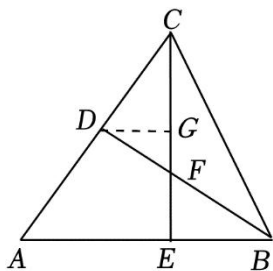


图2

作 $DG \perp CE$ 于 G ,

$\because CE \perp AB$,

$\therefore DG \parallel AB$,

$\therefore \angle FDG = \angle ABD = \angle BCE$,

$\therefore \tan \angle FDG = \tan \angle ABD = \frac{EF}{BE} = \tan \angle BCE = \frac{BE}{CE} = \frac{1}{2}$,

$\therefore EF = \frac{1}{2} BE = 1$,

$\therefore CF = CE - EF = 3$,

在 $\text{Rt}\triangle DCG$ 中,

$\because \tan \angle DCF = \frac{DG}{CG} = \frac{AE}{CE} = \frac{3}{4}$,

$\therefore$ 设 $DG = 3a$, $CG = 4a$, $CD = 5a$,

$\therefore FG = \frac{3a}{2}$,

由 $CG + FG = CF$ 得,

$4a + \frac{3}{2}a = 3$,

$\therefore a = \frac{6}{11}$,

$\therefore CD = 5a = \frac{30}{11}$;

【小问 3 详解】

如图 3,

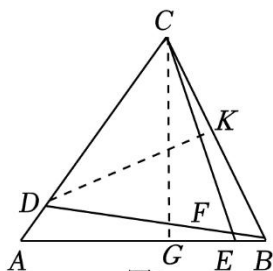


图3

当 $CF = DF$ 时, $\angle CDF = \angle ACF$,

$$\therefore \angle ACF = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle CBD,$$

$$\therefore CD = BC = 2\sqrt{5},$$

作 $CG \perp AB$ 于 G , 作 $DK \perp BC$ 于 K ,

$$\therefore \angle DKC = \angle CGB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle DCK \cong \triangle CBG (\text{AAS}),$$

$$\therefore CK = BG = 2, \quad DK = CG = 4,$$

$$\therefore BK = BC - CK = 2\sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore BD = \sqrt{DK^2 + BK^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt{40 - 8\sqrt{5}},$$

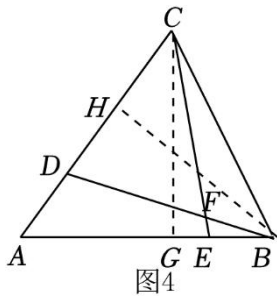
$$\text{由 (1) 知: } CD^2 = DF \cdot BD,$$

$$\therefore DF = \frac{(2\sqrt{5})^2}{\sqrt{40 - 8\sqrt{5}}} = \frac{20}{\sqrt{40 - 8\sqrt{5}}},$$

$$\therefore BF = BD - DF = \sqrt{40 - 8\sqrt{5}} - \frac{20}{\sqrt{40 - 8\sqrt{5}}} = \frac{20 - 8\sqrt{5}}{\sqrt{40 - 8\sqrt{5}}},$$

$$\therefore DF : BF = 5 + 2\sqrt{5};$$

如图 4,



$$\text{当 } CD = CF \text{ 时, } \angle CDF = \angle CFD = \angle BCD,$$

$$\therefore BD = BC = 2\sqrt{5},$$

作 $BH \perp AC$ 于 H ,

$$\therefore CD = 2DH = 2CH, \quad BH = CG = 4, \quad DH = BG = 2,$$

$$\therefore CD = 4,$$

$$\text{由 (1) 知: } CD^2 = DF \cdot BD,$$

$$\therefore 4^2 = 2\sqrt{5} \cdot DF,$$

$$\therefore DF = \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore BF = BD - DF = 2\sqrt{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore DF : FB = 4 : 1 = 4,$$

综上所述： $DF : FB = 5 + 2\sqrt{5}$ 或 4.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的判定和性质及分类，相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定性质，解直角三角形等知识，解决问题的关键是理清线段之间的关系.

