

2023-2024 学年宝山区第一学期期末考试九年级数学试卷

试卷满分 150 分.考试时间 100 分钟.

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分) 下列各题的四个选项中，有且只有只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上

1. 下列各组中的四条线段成比例的是 ()

A. 2cm, 3cm, 4cm, 5cm

B. 2cm, 3cm, 4cm, 6cm

C. 1cm, 2cm, 3cm, 2cm

D. 3cm, 2cm, 6cm, 3cm

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了比例线段：对于四条线段 a 、 b 、 c 、 d ，如果其中两条线段的比（即它们的长度比）与另两条线段的比相等，如 $a:b=c:d$ (即 $ad=bc$)，我们就说这四条线段是成比例线段，简称比例线段. 根据比例线段的定义对各选项进行判断.

【详解】 解：A. 由于 $2:3 \neq 4:5$ ，则 2cm, 3cm, 4cm, 5cm 不成比例，所以 A 选项不符合题意；

B. 由于 $2:3 = 4:6$ ，则 2cm, 3cm, 4cm, 6cm 成比例，所以 B 选项符合题意；

C. 由于 $1:2 \neq 2:3$ ，则 1cm, 2cm, 3cm, 2cm 不成比例，所以 C 选项不符合题意；

D. 由于 $2:3 \neq 3:6$ ，则 3cm, 2cm, 6cm, 3cm 不成比例，所以 D 选项不符合题意.

故选：B.

2. 若线段 $AB=2$ ，点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，则 AP 的长为 ()

A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C. $3-\sqrt{5}$

D. $\sqrt{5}-1$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据黄金分割的定义即可解答.

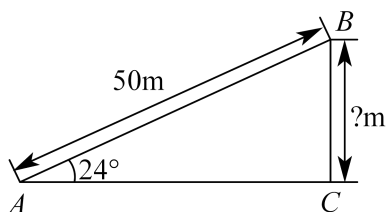
【详解】 解：∵ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \sqrt{5}-1,$$

故选：D.

【点睛】 此题考查了黄金分割，应该熟记黄金分割的公式：较长线段=原线段长的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 倍，熟练掌握上述知识点是解答本题的关键.

3. 许多大型商场购物中心为了引导人流前往目标楼层，会考虑使用“飞梯”（可以跨楼层抵达的超高超长的自动扶梯）。上海大悦城的“飞梯”从3层直达7层，“飞梯”的截面如图， AB 的长为50米， AB 与 AC 的夹角为 24° ，则高 BC 是（ ）



- A. $50\sin 24^\circ$ 米 B. $50\cos 24^\circ$ 米 C. $\frac{50}{\sin 24^\circ}$ 米 D. $\frac{50}{\cos 24^\circ}$ 米

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形的应用，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答。根据图形和锐角三角函数，可以表示出 BC 的值。

【详解】解： $\because \angle BCA = 90^\circ, AB = 50\text{m}, \angle A = 24^\circ$,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{50},$$

$$\therefore BC = 50 \sin A = 50 \sin 24^\circ \text{ 米},$$

故选：A.

4. 在四边形 $ABCD$ 中，如果 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ，那么 $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}|$ 四边形 $ABCD$ 是（ ）

- A. 矩形 B. 菱形 C. 正方形 D. 等腰梯形

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了向量计算，四边形形状的判定，正确进行向量化简是解题的关键。

$$\text{【详解】} \because \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC},$$

$$\therefore AD \parallel BC, AD = \frac{2}{3}BC,$$

对边平行，但不相等，

故四边形 $ABCD$ 是梯形；

$$\therefore |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}|,$$

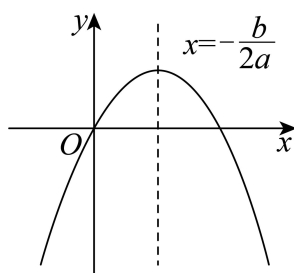
$$\therefore |\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{AC}|,$$

故对角线 $AC = DB$,

故四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

故选: D.

5. 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象所示, 则一次函数 $y = ax + b$ 的图象一定不经过 ()



A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】 C

【解析】

【分析】 由二次函数的图象得出 $a < 0$, $b > 0$, 从而即可判断一次函数 $y = ax + b$ 的图象经过一、二、四象限, 得到答案, 本题考查了二次函数与一次函数的图象与系数的关系, 根据二次函数的图象得出 $a < 0$, $b > 0$, 采用数形结合的方法是解此题的关键.

【详解】 解: $\because$ 抛物线开口向下,

$\therefore a < 0$,

$\because$ 抛物线对称轴在 y 轴右边,

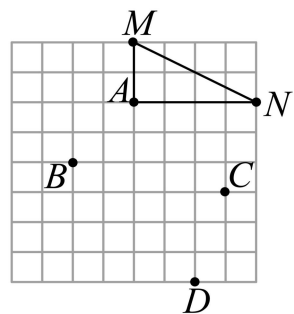
$\therefore -\frac{b}{2a} > 0$,

$\therefore b > 0$,

$\therefore$ 一次函数 $y = ax + b$ 的图象经过一、二、四象限, 不经过第三象限,

故选: C.

6. 如图, 在正方形网格中, A 、 B 、 C 、 D 、 M 、 N 都是格点, 从 A 、 B 、 C 、 D 四个格点中选取三个构成一个与 $\triangle AMN$ 相似的三角形, 某同学得到两个三角形: ① $\triangle ABC$; ② $\triangle ABD$. 关于这两个三角形, 下列判断正确的是 ()



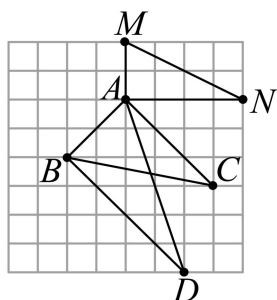
- A. 只有①是 B. 只有②是 C. ①和②都是 D. ①和②都不是

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了相似三角形的判定和勾股定理逆定理，先根据网格判定 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle ADB = 90^\circ$ ，然后用相似三角形的判定即可，解题的关键是熟练掌握勾股定理逆定理和相似三角形的判定

【详解】如图，连接 AB ， AC ， BC ， AD ， BD ，



在 $\text{Rt}\triangle AMC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AM = 1$ ， $AN = 1$ ，

由网格可知： $AB = 2\sqrt{2}$ ， $AC = 3\sqrt{2}$ ， $BC = \sqrt{26}$ ， $BD = 4\sqrt{2}$ ， $AD = 2\sqrt{10}$ ，

$$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2, \quad AB^2 + BD^2 = AD^2,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ, \quad \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AD}, \quad \frac{AM}{AN} \neq \frac{AB}{AC},$$

$\therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle AMN$ 相似， $\triangle ABC$ 与 $\triangle AMN$ 相似，

故选：B.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）请将结果直接填入答题纸的相应位置上

7. 已知线段 $a = 2$ ， $b = 4$ ，如果线段 c 是 a 和 b 的比例中项，那么 $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】此题考查了比例中项，根据比例中项的定义进行求解即可.

【详解】 $\because$ 线段 c 是 a 和 b 的比例中项，

$$\therefore c^2 = ab = 2 \times 4 = 8,$$

$$\therefore c = 2\sqrt{2}.$$

故答案为： $2\sqrt{2}$

8. 比例尺为1:100000的地图上, A 、 B 两地的距离为2cm, 那么 A 、 B 两地的实际距离为_____ km.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了比例线段, 主要利用了比例尺的定义, 计算时要注意单位之间的换算.

设 A 、 B 两地间的实际距离是 x cm, 根据比例尺的定义列式计算即可得解, 然后再化为千米即可.

【详解】 解: 设 A 、 B 两地间的实际距离是 x cm, 根据题意得:

$$2:x=1:100000,$$

$$\text{解得 } x=200000,$$

$$200000\text{cm}=2\text{km}.$$

故答案为: 2.

9. 计算: $\sin 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ =$ _____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查了特殊角的三角函数值的混合运算, 将特殊角的三角函数值代入, 即可求解.

$$\text{【详解】 解: } \sin 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

故答案为: 0.

10. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 图像上部分点的坐标 (x, y) 对应值如表所示, 那么该函数图像的对称轴是直线_____.

x	...	0	1	2	3	4	...
y	...	3	0	-1	0	3	...

【答案】 $x=2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的对称轴, 根据表格中纵坐标相等的数据和二次函数的性质, 可以得到该函数图像的对称轴.

【详解】 解: 由表格中的数据可得, $(0, 3)$ 和 $(4, 3)$ 关于对称轴对称,

$$\therefore \text{该函数图像的对称轴是直线 } x = \frac{0+4}{2} = 2, \text{ 即 } x=2,$$

故答案为: $x=2$.

11. 直径是 2 的圆, 当半径增加 x 时, 面积的增加值 s 与 x 之间的函数关系式是_____.

【答案】 $s = \pi x^2 + 2\pi x$

【解析】

【分析】 本题考查函数关系式, 掌握圆的面积公式是本题的关键.

根据“增加的面积=半径增加后的圆的面积-半径增加前的圆的面积”作答即可.

【详解】 解: 根据题意, 得 $s = \pi \left(x + \frac{2}{2} \right)^2 - \left(\frac{2}{2} \right)^2 \pi = \pi x^2 + 2\pi x$,

故答案为: $s = \pi x^2 + 2\pi x$.

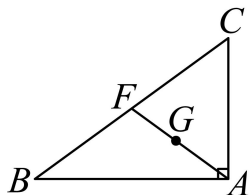
12. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 G 为重心, 连接 AG 并延长, 交 BC 于点 F , 如果 $BC = 6$, 那么 GF 的长是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了重心, 关键是掌握重心的性质. 因为 G 是重心, 连接 AG 并延长, 交 BC 于点 F , 可得 AF 是 BC 边的中线, $\frac{AG}{GF} = 2$, 即 $GF = \frac{1}{3}AF$, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AF = \frac{1}{2}BC$, 可得 GF .

【详解】 解: $\because$ 点 G 为重心, 连接 AG 并延长, 交 BC 于点 F ,



$\therefore AF$ 是 BC 边的中线,

$\because \angle BAC = 90^\circ$,

$$\therefore AF = \frac{1}{2}BC = 3,$$

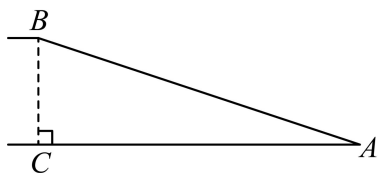
$\because$ 点 G 是重心,

$$\therefore \frac{AG}{GF} = 2,$$

$$\therefore GF = \frac{1}{3}AF = 1,$$

故答案为: 1.

13. 如图, 斜坡 AB , 坡顶 B 离地面的高度 BC 为 30m, 如果坡比 $i = 1:3$, 那么这个斜坡的长度 $AB =$ _____m.



【答案】 $30\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形的应用．熟练掌握，坡度等于铅直高度除以水平距离，是解题的关键．根据坡度等于铅直高度除以水平距离，可得 AC 的长，再由勾股定理，进行求解即可．

【详解】 $\because$ 坡顶 B 离地面的高度 BC 为 30m ，坡比 $i = 1:3$ ，

$$\therefore AC = BC \cdot \frac{1}{3} = 30 \div 3 = 90\text{m},$$

由勾股定理得

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{90^2 + 30^2} = 30\sqrt{10}\text{m}.$$

故答案为： $30\sqrt{10}$.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $BC = \sqrt{2}$ ， $AB = \sqrt{7}$ ， $AC = 3$ ，则 $\cos A =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{7}}{3}$

【解析】

【分析】 根据勾股定理的逆定理“如果三角形的三边长 a ， b ， c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，那么这个三角形是直角三角形”，判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形，再根据直角三角形中余弦的定义“角的邻边比斜边”，计算 $\cos A = \frac{AB}{AC}$ 即可．

【详解】 解： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，若 $BC = \sqrt{2}$ ， $AB = \sqrt{7}$ ， $AC = 3$ ，

$$\therefore BC^2 + AB^2 = AC^2 = 9,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，

$\therefore AC$ 是斜边， AC 所对的角是直角，即 $\angle B$ 是直角，

$$\therefore \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

故答案为： $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

【点睛】 本题考查了勾股定理的逆定理、求角的余弦值，掌握勾股定理的逆定理的运用和余弦的定义是解题的关键.

15. 如果二次函数 $y = a(x-2)^2$ ($a < 0$) 的图像上有两点那么 $\left(\frac{9}{4}, y_1\right)$ 和 $\left(\frac{7}{3}, y_2\right)$ 那么 y_1 _____ y_2 . (填

“>”、“=” 或 “<”)

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的性质，解题的关键是熟练掌握二次函数值的比较方法.

【详解】 解：二次函数 $y = a(x-2)^2$ 的对称轴为直线 $x = 2$ ， $a < 0$ ，

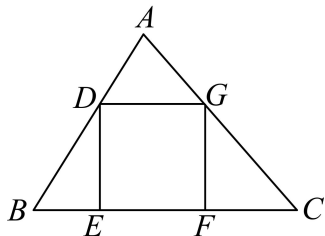
$\therefore$ 距离对称轴越远的点，函数值越小，

$$\because \frac{9}{4} - 2 < \frac{7}{3} - 2,$$

$$\therefore y_1 > y_2.$$

故答案为：>.

16. 如图，已知正方形 $DEFG$ 的边 EF 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，顶点 D 、 G 分别在边 AB 、 AC 上，如果 $BC = 6$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 12，那么 EF 的长为_____.



【答案】 2.4

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质、正方形的性质. 关键是由平行线得到相似三角形，利用相似三角形的性质列方程.

根据正方形的性质得出 $DG \parallel BC$ ，则 $\triangle ADG \sim \triangle ABC$ ，利用相似三角形对应边上高的比等于相似比，结合正方形的性质列方程求解即可.

【详解】 解：作 $AH \perp BC$ 于 H ，交 DG 于 P ，如图所示：

$$\because \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = 12, BC = 6,$$

$$\therefore AH = 4,$$

设正方形 $DEFG$ 的边长为 x .

由正方形 $DEFG$ 得, $DG \parallel EF$,

即 $DG \parallel BC$,

$\therefore AH \perp BC$,

$\therefore AP \perp DG$.

$\therefore DG \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{DG}{BC} = \frac{AP}{AH},$$

$\therefore PH \perp BC, DE \perp BC$,

$\therefore PH = ED, AP = AH - PH$,

$$\therefore \frac{DG}{BC} = \frac{AH - PH}{AH},$$

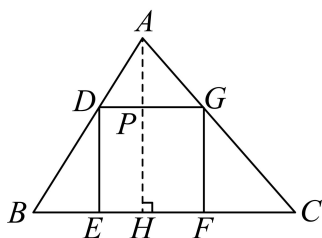
$\because BC = 6, AH = 4, DE = DG = x$,

$$\therefore \frac{x}{6} = \frac{4-x}{4},$$

解得 $x = 2.4$.

故正方 $DEFG$ 的边长为 2.4,

故答案为: 2.4.



17. 平面直角坐标系中, 在 x 轴上, 且到一条抛物线的顶点及该抛物线与 y 轴的交点的距离之和最小的点,

称为这条抛物线与 x 轴的“亲密点”, 那么抛物线 $y = 2x^2 + 4x + 5$ 与 x 轴的“亲密点”的坐标是_____.

【答案】 $\left(-\frac{5}{8}, 0\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的性质, 二次函数图象上点的坐标特征, 轴对称的性质, 求得抛物线的顶点坐标和与 y 轴的交点, 然后根据题意求得顶点关于 x 轴的对称点, 进一步求得过对称点和与 y 轴的交点的直线解析式, 即可求得“亲密点”的坐标.

【详解】 解: $\because y = 2x^2 + 4x + 5 = 2(x+1)^2 + 3$,

∴ 抛物线开口向上，顶点 P 为 $(-1, 3)$ ，

∴ 顶点关于 x 轴的对称点 Q 为 $(-1, -3)$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = 5$ ，

∴ 抛物线与 y 轴的交点 M 为 $(0, 5)$ ，

设直线 MQ 的解析式为 $y = kx + 5$ ，

代入 $(-1, -3)$ 得， $-3 = -k + 5$ ，

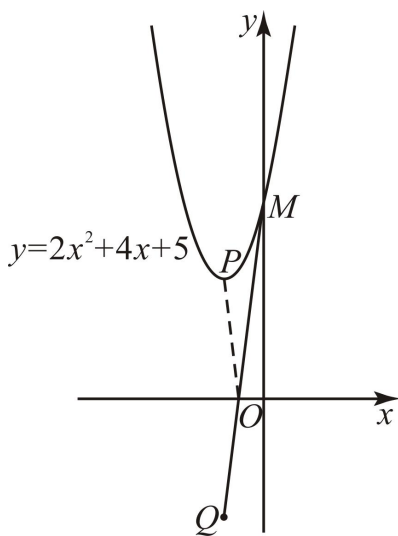
解得 $k = 8$ ，

∴ 直线 MQ 的解析式为 $y = 8x + 5$ ，

令 $y = 0$ ，则 $x = -\frac{5}{8}$

∴ 抛物线 $y = 2x^2 + 4x + 5$ 与 x 轴的“亲密点”的坐标是 $(-\frac{5}{8}, 0)$ ，

故答案为： $(-\frac{5}{8}, 0)$ 。



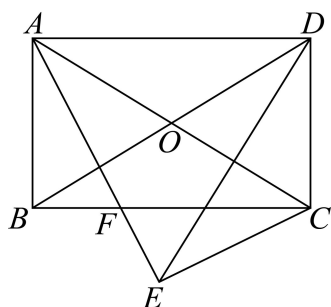
18. 已知 AC 和 BD 是矩形 $ABCD$ 的两条对角线，将 $\triangle ADC$ 沿直线 AC 翻折后，点 D 落在点 E 处，三角形 AEC 与矩形的重叠部分是三角形 ACF ，连接 DE ，如果 $AB = 6$ ， $BF = 2$ ，那么 $\angle BDE$ 的正切值是 _____。

【答案】 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】此题考查了折叠的性质、矩形的性质、解直角三角形，熟练掌握折叠的性质是解题的关键．分两种情况讨论，根据矩形的性质得出 $OA = OC = OB = OD, \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ，则 $\angle OAD = \angle ODA = \angle ACB$ ，根据折叠的性质得出 $AC \perp DE$ ， $\angle ADE = \angle AED, \angle ACD = \angle ACE$ ， $\angle ADC = \angle AEC = 90^\circ, \angle DAC = \angle EAC$ ，设 $\angle ODA = \alpha$ ，则 $\angle OAD = \angle ACB = \alpha, \angle EAC = \alpha$ ，根据直角三角形的性质及三角形外角性质推出 $\angle BDE = \angle BAF = 90^\circ - 2\alpha$ ，则 $\tan \angle BDE = \tan \angle BAF$ ，或 $\tan \angle BDE = \tan \angle BCF$ ，根据正切的定义求解即可．

【详解】解：如图， AC 交 BD 于点 O ， $AB = 6$ ， $BF = 2$ ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore OA = OC = OB = OD, \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle OAD = \angle ODA = \angle ACB$ ，

根据折叠的性质得， $AC \perp DE$ ， $\angle ADE = \angle AED, \angle ACD = \angle ACE$ ，

$\angle ADC = \angle AEC = 90^\circ, \angle DAC = \angle EAC$ ，

设 $\angle ODA = \alpha$ ，则 $\angle OAD = \angle ACB = \alpha, \angle EAC = \alpha$ ，

$\therefore \angle EFC = \angle EAC + \angle ACB = 2\alpha, \angle AED = 90^\circ - \angle EAC = 90^\circ - \alpha$ ，

$\therefore \angle BDE = \angle ABD - \angle ODA = 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$ ，

$\therefore \angle AFB = \angle EFC = 2\alpha$ ，

$\therefore \angle BAF = 90^\circ - \angle AFB = 90^\circ - 2\alpha$ ，

$\therefore \angle BDE = \angle BAF$ ，

$\therefore \tan \angle BDE = \tan \angle BAF$ ，

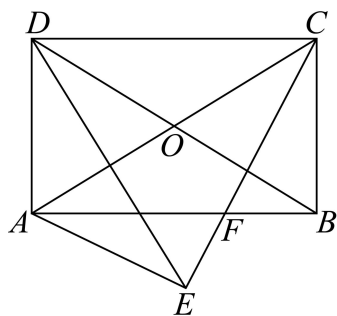
在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中，

$$\therefore \tan \angle BAF = \frac{BF}{AB} = \frac{1}{3}，$$

$$\therefore \tan \angle BDE = \frac{1}{3}，$$

即 $\angle BDE$ 的正切值是 $\frac{1}{3}$;

如图, AC 交 BD 于点 O , $AB = 6$, $BF = 2$,



同理得 $\angle BDE = \angle BCF$,

$$\therefore AF = AB - BF = 4,$$

$$\because \angle BAC = \angle DCA, \angle ACE = \angle DCA,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BAC,$$

$$\therefore CF = AF = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle CBF$ 中, $CF = 4$, $BF = 2$,

$$\therefore BC = \sqrt{CF^2 - BF^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \tan \angle BDE = \tan \angle BCF,$$

$$\therefore \tan \angle BAF = \frac{BF}{BC} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \tan \angle BDE = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

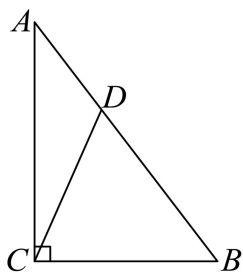
即 $\angle BDE$ 的正切值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

综上, $\angle BDE$ 的正切值是 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

故答案为: $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin B = \frac{4}{5}$, $AB = 10$, 点 D 是 AB 边上一点, 且 $BC = BD$.



- (1) 求 BD 的长;
 (2) 求 $\angle ACD$ 的余切值.

【答案】 (1) 6 (2) 2

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形，熟知三角函数的定义并构造出合适的直角三角形是解题的关键.

- (1) 根据 $\angle B$ 的正弦值，求出 AC 的长，再利用勾股定理求出 BC 即可解决问题.
 (2) 过点 D 作 AC 的垂线，在所构造的直角三角形中，求出 $\angle ACD$ 的邻边和对边即可解决问题.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\sin B = \frac{AC}{AB}$,

又 $\because \sin B = \frac{4}{5}$, $AB = 10$,

$\therefore AC = 8$,

$\because \angle C = 90^\circ$,

$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$\therefore BC = 6$,

$\because BC = BD$,

$\therefore BD = 6$.

【小问 2 详解】

过点 D 作 AC 的垂线，垂足为 E ，由 $AB = 10, BD = 6$ 得, $AD = 4$.

$\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle AED \sim \triangle ACB$,

$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$,

即 $\frac{AE}{8} = \frac{4}{10} = \frac{DE}{6}$,

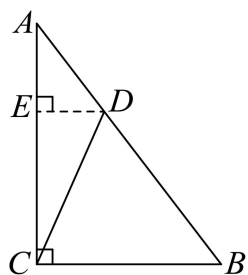
得 $AE = 3.2, DE = 2.4$,

$\therefore CE = 8 - 3.2 = 4.8$.

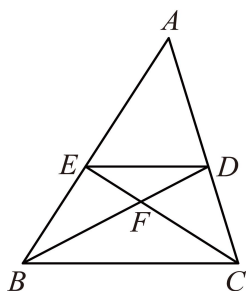
在 $Rt\triangle CDE$ 中,

$$\cot \angle ACD = \frac{CE}{DE} = \frac{4.8}{2.4} = 2.$$

$\therefore \angle ACD$ 的余切值为 2.



20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=5$, $BC=4$, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D , $DE \parallel BC$ 交 AB 于点 E .



(1) 求 DE 的长;

(2) 连结 CE 交 BD 于点 F , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的线性组合表示向量 $\overrightarrow{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\overrightarrow{BF} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】(1) $\frac{20}{9}$;

(2) $\vec{b} - \vec{a}$, $\frac{9}{14}\vec{b} - \frac{9}{14}\vec{a}$.

【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形的判定及性质, 相似三角形的判定及性质, 平面向量.

(1) 根据平行线的性质和角平分线的定义得到 $DE = BE$, 设 $DE = BE = x$, 根据 $\triangle AED \sim \triangle ABC$ 得到 $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB}$, 分别代入即可解答;

(2) 根据平面向量三角形减法法则得出 $\overrightarrow{BD}$, 根据 $\triangle DEF \sim \triangle BCF$ 可求得 BF 与 BD 的关系, 即可求解.

【小问 1 详解】

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$,

$\because DE \parallel BC$,

$\therefore \angle CBD = \angle EDB$,

$\therefore \angle ABD = \angle EDB$,

$$\therefore DE = BE,$$

设 $DE = BE = x$, 则 $AE = AB - BE = 5 - x$,

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB}, \quad \text{即} \frac{x}{4} = \frac{5-x}{5},$$

$$\text{解得 } x = \frac{20}{9},$$

$$\therefore DE = \frac{20}{9}.$$

【小问 2 详解】

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \frac{DF}{BF} = \frac{DE}{CB} = \frac{\frac{20}{9}}{4} = \frac{5}{9},$$

$$\therefore DF = \frac{5}{9}BF,$$

$$\therefore BD = BF + DF = BF + \frac{5}{9}BF = \frac{14}{9}BF, \quad \text{即 } BF = \frac{9}{14}BD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \frac{9}{14}\overrightarrow{BD} = \frac{9}{14}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{9}{14}\vec{b} - \frac{9}{14}\vec{a}.$$

故答案为: $\vec{b} - \vec{a}, \quad \frac{9}{14}\vec{b} - \frac{9}{14}\vec{a}$

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图像经过点 $A(1, 0)$ 和 $B(0, 3)$.

(1) 求该二次函数的表达式;

(2) 如果点 $E(4, m)$ 在该函数图像上, 求 $\triangle ABE$ 的面积.

【答案】(1) $y = x^2 - 4x + 3$

(2) 6

【解析】

【分析】本题主要考查了利用待定系数法求二次函数的解析式, 解题关键是熟练掌握利用待定系数法求二次函数的解析式;

- (1) 把 A, B 两点坐标代入二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 得关于 b, c 的二元一次方程组, 解方程组求出 b, c 即可;
- (2) 先令 $x = 4$, 从而求出 $B(0, 3)$, 再把 $E(4, m)$ 代入二次函数 $y = x^2 - 4x + 3$ 得 E 点坐标, 可知 $BE \parallel x$ 轴, 最后根据 $\triangle ABE$ 的面积, 列出算式进行计算即可.

【小问 1 详解】

解: 由图像经过点 $B(0, 3)$, 可知 $c = 3$,

再由图像经过点 $A(1, 0)$, 可得 $1^2 + b + 3 = 0$, 解得 $b = -4$,

所以, 该二次函数的表达式为 $y = x^2 - 4x + 3$;

【小问 2 详解】

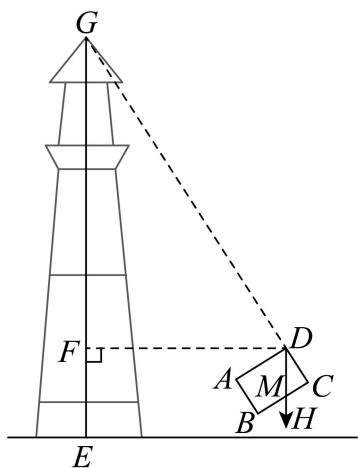
把 $x = 4$ 代入 $y = x^2 - 4x + 3$, 得 $y = 3$,

由 $B(0, 3)$ 、 $E(4, 3)$ 可知 $BE \parallel x$ 轴,

于是 $BE = 4$, BE 边上的高为 3,

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot (4 - 0) \cdot 3 = 6.$$

22. 综合实践活动中, 某小组利用木板和铅锤自制了一个简易测高仪测量塔高, 测高仪 $ABCD$ 为矩形, $CD = 30\text{cm}$, 顶点 D 处挂了一个铅锤 H , 图是测量塔高的示意图, 测高仪上的点 C 、 D 与塔顶 G 在一条直线上, 铅垂线 DH 交 BC 于点 M , 经测量, 点 D 距地面 1.9m , 到塔 EG 的距离 $DF = 13\text{m}$, $CM = 20\text{cm}$, 求塔 EG 的高度 (结果精确到 1m).



【答案】塔 EG 的高度约为 21m .

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的应用, 解题的关键是证明三角形相似.

证明 $GFD \sim DCM$, 然后根据相似三角形的性质列出比例式解答即可.

【详解】解： $\because \angle FDM = 90^\circ$,

$$\therefore \angle GDF + \angle CDM = 90^\circ,$$

$$\because \angle GFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GDF + \angle DGF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDM = \angle DGF,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle C = \angle GFD = 90^\circ,$$

$$\therefore GFD \sim DCM,$$

$$\therefore \frac{GF}{CD} = \frac{DF}{CM},$$

$$\because CD = 30\text{cm}, DF = 13\text{m}, CM = 20\text{cm},$$

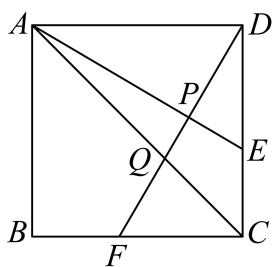
$$\therefore \frac{GF}{30} = \frac{13}{20},$$

解得 $GF = 19.5$,

$$\therefore EG = 19.5 + 1.9 = 21.4(\text{m}) \approx 21(\text{m}),$$

答：塔 EG 的高度约为 21 米.

23. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 CD 、 BC 上，且 $CE = BF$ ， DF 分别交 AE 、 AC 于点 P 、 Q .



(1) 求证： $AE \perp DF$ ；

$$(2) \quad AQ \cdot BF = \sqrt{2}PQ \cdot DF.$$

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，正确地作出辅助线是解题的关键.

(1) 根据正方形的性质得到 $BC = CD$, $\angle ADE = \angle DCF$, 根据全等三角形的性质得到 $\angle DAE = \angle CDF$, 即可得到结论;

(2) 如图, 过 E 作 $EH \perp AC$ 于 H , 得到 $CH = EH = \frac{\sqrt{2}}{2} CE = \frac{\sqrt{2}}{2} BF$, 根据相似三角形的判定和性质即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore BC = CD, \angle ADE = \angle DCF, \angle ACD = 45^\circ, ,$$

$$\therefore CE = BF, ,$$

$$\therefore DE = CF, ,$$

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle DCF$ 中,

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADE = \angle DCF, \\ DE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCF (SAS),$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CDF, ,$$

$$\therefore \angle ADP + \angle CDF = 90^\circ, ,$$

$$\therefore \angle ADP + \angle DAP = 90^\circ, ,$$

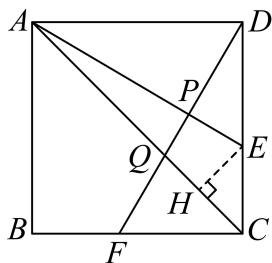
$$\therefore \angle APD = 90^\circ, ,$$

$$\therefore AE \perp DF;$$

【小问 2 详解】

如图, 过 E 作 $EH \perp AC$ 于 H ,

$$\text{故 } \angle ACE = \angle HEC = 45^\circ, ,$$



则 $\triangle CEH$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CH = EH = \frac{\sqrt{2}}{2} CE = \frac{\sqrt{2}}{2} BF, ,$$

$$\because \angle APQ = \angle AHE = 90^\circ, \angle PAQ = \angle HAE,$$

$$\therefore APQ \sim AHE,$$

$$\therefore \frac{AE}{AQ} = \frac{EH}{PQ},$$

$$\therefore AE \cdot PQ = AQ \cdot EH,$$

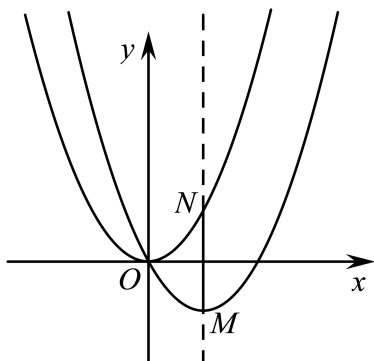
由 (1) 知, $\triangle ADE \cong \triangle DCF$,

$$\therefore AE = DF,$$

$$\therefore DF \cdot PQ = AQ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} BF,$$

$$\text{即 } AQ \cdot BF = \sqrt{2} PQ \cdot DF.$$

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 将抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 平移, 使平移后的抛物线仍经过原点 O , 新抛物线的顶点为 M (点 M 在第四象限), 对称轴与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 交于点 N , 且 $MN = 4$.



(1) 求平移后抛物线的表达式;

(2) 如果点 N 平移后的对应点是点 P , 判断以点 O 、 M 、 N 、 P 为顶点的四边形的形状, 并说明理由;

(3) 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上的点 A 平移后的对应点是点 B , $BC \perp MN$, 垂足为点 C , 如果 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 求点 A 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$;

(2) 是正方形, 理由见解析;

(3) $(4, 8)$ 、 $(2\sqrt{2}, 4)$ 、 $(-2\sqrt{2}, 4)$ 、 $(2, 2)$.

【解析】

【分析】 (1) 由题意得, 平移后的抛物线表达式为: $y = \frac{1}{2}x^2 + bx$, 得到点 M 、 N 的坐标, 进而求解;

(2) 由题意得到 $O(0,0)$, $M(2,-2)$, $N(2,2)$, $P(4,0)$, 证明四边形 $OMPN$ 是平行四边形, 由 $MN = OP = 4$, 得到四边形 $OMPN$ 是矩形, 由 $NO = NP = 2\sqrt{2}$, 即可得出结论;

(3) 当 $AB = CA$ 时, 列出等式即可求解; 当 $AB = BC$ 或 $AC = BC$ 时, 同理可解.

【小问 1 详解】

解: 由题意得, 平移后的抛物线表达式为: $y = \frac{1}{2}x^2 + bx$,

则点 M 的坐标为: $\left(-b, -\frac{1}{2}b^2\right)$,

当 $x = -b$ 时, $y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}b^2$, 即点 $N\left(-b, \frac{1}{2}b^2\right)$,

则 $MN = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}b^2 = 4$,

解得: $b = 2$ (舍去) 或 $b = -2$,

则平移后的抛物线表达式为: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$;

【小问 2 详解】

解: 四边形 $OMPN$ 是正方形,

根据题意可得 $O(0,0)$, $M(2,-2)$, $N(2,2)$, $P(4,0)$,

记 MN 与 OP 交于点 G , 则 $G(2,0)$,

$\therefore OG = GP = 2$, $MG = NP = 2$, $MN = OP = 4$, $NO = NP = 2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 四边形 $OMPN$ 是平行四边形,

$\therefore MN = OP = 4$,

$\therefore$ 四边形 $OMPN$ 是矩形,

$\therefore NO = NP = 2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 四边形 $OMPN$ 是正方形;

【小问 3 详解】

解: 设 $A\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$, $B\left(a+2, \frac{1}{2}a^2-2\right)$, $C\left(2, \frac{1}{2}a^2-2\right)$,

可得 $AB = 2\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{(a-2)^2 + 2^2}$, $BC = \sqrt{a^2}$,

① $AB = AC$, $2\sqrt{2} = \sqrt{(a-2)^2 + 2^2}$, 即 $a^2 - 4a = 0$,

解得 $a_1 = 4$, $a_1 = 0$ (舍去 0),

$\therefore A(4, 8)$;

$$\textcircled{2} AB = BC, \quad 2\sqrt{2} = \sqrt{a^2},$$

解得 $a_1 = 2\sqrt{2}$, $a_1 = -2\sqrt{2}$,

$\therefore A(2\sqrt{2}, 4)$ 或 $A(-2\sqrt{2}, 4)$;

$$\textcircled{3} AC = BC, \quad \sqrt{(a-2)^2 + 2^2} = \sqrt{a^2},$$

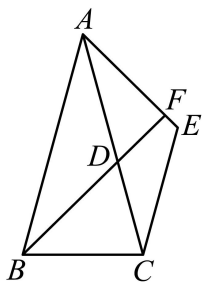
解得 $a = 2$,

$\therefore A(2, 2)$;

综上, 点 A 的坐标是 $(4, 8)$ 、 $(2\sqrt{2}, 4)$ 、 $(-2\sqrt{2}, 4)$ 、 $(2, 2)$.

【点睛】 本题考查的是二次函数综合运用, 涉及到正方形的性质、图象的平移, 等腰三角形存在问题等, 分类求解是解题的关键.

25. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 1$, D 是边 AC 上一点, 且 $BD = AD$, 过点 C 作 $CE \parallel AB$, 并截取 $CE = AD$, 射线 AE 与 BD 的延长线交于点 F .



(1) 求证: $AF^2 = DF \cdot BF$;

(2) 设 $AD = x$, $DF = y$, 求 y 与 x 的函数关系式;

(3) 如果 $\triangle ADF$ 是直角三角形, 求 DF 的长.

【答案】 (1) 见解析;

$$(2) \quad y = \frac{x^3}{1-x^2};$$

$$(3) \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【解析】

【分析】 (1) 先证明 $\triangle ABD \cong \triangle AEC$, 得出 $\angle 3 = \angle 4$, 进而证明 $\triangle ABF \sim \triangle ADF$, 根据相似三角形的

性质，即可得证；

(2) 过点 D 作 $DG \parallel AB$ ，交 AE 于点 G ，证明 $\triangle ADG \sim \triangle ACE$ ，得出 $DG = x^2$ ， $\triangle FDG \sim \triangle FBA$ ，

根据相似三角形的性质得出比例式，即可得出函数关系式；

(3) 由 $\angle DAF = \angle ABD \neq 90^\circ$ ，分两种情况分别讨论， $\angle AFD = 90^\circ$ ， $\angle ADF = 90^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中，根据三角函数的定义，即可求解。

【小问 1 详解】

证明： $\because CE \parallel AB$ ，

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

又 $\because AB = AC$ ， $CE = AD$ ，

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AEC,$$

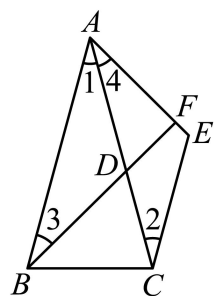
$$\therefore \angle 3 = \angle 4,$$

又 $\because \angle AFB = \angle AFD$ ，

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle ADF,$$

$$\therefore \frac{AF}{DF} = \frac{BF}{AF},$$

$$\therefore AF^2 = DF \cdot BF$$



【小问 2 详解】

解：过点 D 作 $DG \parallel AB$ ，交 AE 于点 G

又 $\because CE \parallel AB$ ，

$$\therefore DG \parallel CE,$$

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ACE$$

$$\therefore \frac{DG}{CE} = \frac{AD}{AC},$$

由 $AD = x$ ， $AC = 1$ ，则 $CE = x$ ， $CD = 1 - x$ ，

$$\therefore DG = x^2,$$

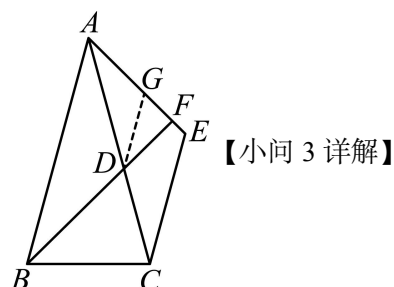
$$\because DG \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle FDG \sim \triangle FBA$$

$$\therefore \frac{DG}{AB} = \frac{DF}{BF},$$

$$\therefore \frac{x^2}{1} = \frac{y}{x+y},$$

$$\therefore y = \frac{x^3}{1-x^2}.$$



$$\textcircled{1} \angle DAF = \angle ABD \neq 90^\circ,$$

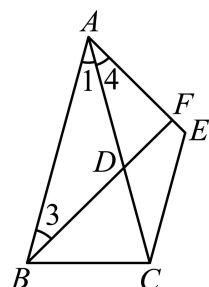
$$\textcircled{2} \text{如果 } \angle AFD = 90^\circ,$$

$$\text{由 } \angle 1 = \angle 3 = \angle 4, \angle 1 + \angle 3 + \angle 4 = 90^\circ, \text{ 可得 } \angle 3 = \angle 4 = 30^\circ$$

$$\text{设 } DF = m, \text{ 则 } AD = BD = 2m,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABF \text{ 中, } \cos \angle 3 = \frac{BF}{AB},$$

$$\therefore \frac{m+2m}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad m = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$



$$\textcircled{3} \text{如果 } \angle ADF = 90^\circ,$$

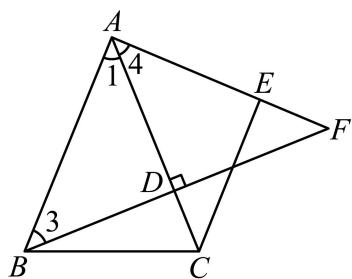
$$\text{由 } \angle 1 = \angle 3 = \angle 4, \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ, \text{ 可得 } \angle 3 = \angle 4 = 45^\circ,$$

$$\text{设 } DF = m, \quad AD = BD = m,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABF \text{ 中, } \cos \angle 3 = \frac{AB}{BF},$$

$$\therefore \frac{1}{m+m} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{所以, 当 } \triangle ADF \text{ 是直角三角形时, } DF \text{ 的长为 } \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



【点睛】 本题考查了三角函数的定义，相似三角形的性质与判定，全等三角形的性质，列函数关系式，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.