

上海市奉贤区 2023-2024 学年九年级上学期期末数学试题 (一模)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列函数中是二次函数的是 ()

- A. $y = 2x + 1$ B. $y = \frac{1}{2x}$ C. $y = x^2 + 2$ D. $y = \sqrt{x^2 + 2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的定义, 根据二次函数的定义逐项分析即可, 熟练掌握其定义是解决此题的关键.

【详解】A. $y = 2x + 1$ 是一次函数, 故不符合题意;

B. $y = \frac{1}{2x}$ 是反比例函数, 故不符合题意;

C. $y = x^2 + 2$ 是二次函数, 故符合题意;

D. $y = \sqrt{x^2 + 2}$ 不是二次函数, 故不符合题意;

故选: C.

2. 将抛物线 $y = x^2$ 向右平移 3 个单位长度得到的抛物线是 ()

- A. $y = x^2 + 3$ B. $y = x^2 - 3$ C. $y = (x - 3)^2$ D. $y = (x + 3)^2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据抛物线的平移规律: 上加下减, 左加右减解答即可.

【详解】解: 抛物线 $y = x^2$ 向右平移 3 个单位长度得到的抛物线是 $y = (x - 3)^2$.

故选: C

【点睛】本题考查了二次函数图象的平移, 理解平移规律是解题的关键.

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 5$, $\angle A = \alpha$, 那么 BC 的长是 ()

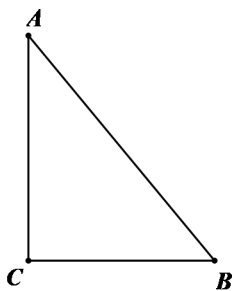
- A. $5 \tan \alpha$ B. $5 \cot \alpha$ C. $5 \sin \alpha$ D. $5 \cos \alpha$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了正切的定义, 正切等于对边比邻边, 先画出图形, 再根据正切三角函数的定义即可得.

【详解】由题意, 画出图形如下:

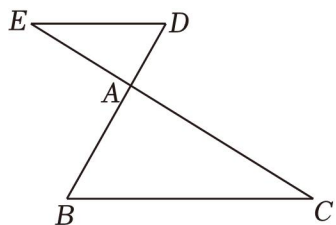


则 $\tan A = \frac{BC}{AC}$ ，即 $\tan \alpha = \frac{BC}{5}$ ，

解得 $BC = 5 \tan \alpha$ ，

故选：A.

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 的反向延长线上，已知 $AB = 2AD$ ，下列条件中能判定 $DE \parallel BC$ 的是（ ）



A. $\frac{AC}{AE} = \frac{1}{2}$

B. $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$

C. $\frac{AC}{EC} = \frac{2}{3}$

D. $\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定及性质，利用相似三角形的判定及性质逐一判断即可求解，熟练掌握相似三角形的判定及性质是解题的关键.

【详解】解： $\because AB = 2AD$ ， $\therefore \frac{AB}{AD} = 2$ ，

A、由 $\frac{AC}{AE} = \frac{1}{2}$ ，及 $\frac{AB}{AD} = 2$ 不能判定 $DE \parallel BC$ ，故不符合题意；

B、由 $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{AB}{AD} = 2$ 不能判定 $DE \parallel BC$ ，则错误，故不符合题意；

C、 $\therefore \frac{AC}{EC} = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{2}{1} = 2$ ，

$\therefore \frac{AB}{AD} = 2$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle ABC$ ，

$\therefore DE \parallel BC$ ，故符合题意；

D、由 $\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$ 、 $\frac{AB}{AD} = 2$ 不能判定 $DE \parallel BC$ ，故不符合题意

故选：C

5. 已知 $|\vec{a}| = 5$ ， $|\vec{b}| = 3$ ，且 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反，下列各式正确的是（ ）

- A. $\vec{b} = \frac{3}{5}\vec{a}$ B. $\vec{b} = -\frac{3}{5}\vec{a}$ C. $\vec{b} = \frac{5}{3}\vec{a}$ D. $\vec{b} = -\frac{5}{3}\vec{a}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平面向量的线性运算．由 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反，且 $|\vec{a}| = 5$ ， $|\vec{b}| = 3$ ，可得 $\vec{b}$ 和 $\vec{a}$ 的关系．

【详解】解： $\because |\vec{a}| = 5$ ， $|\vec{b}| = 3$ ，

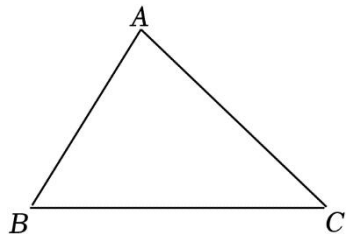
$$\therefore |\vec{b}| = \frac{3}{5}|\vec{a}|,$$

$\therefore \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反，

$$\therefore \vec{b} = -\frac{3}{5}\vec{a}.$$

故选：B.

6. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转，使得点 A 落在边 AC 上，点 A 、 C 的对应点分别为 D 、 E ，边 DE 交 BC 于点 F ，连接 CE ．下列两个三角形不一定相似的是（ ）



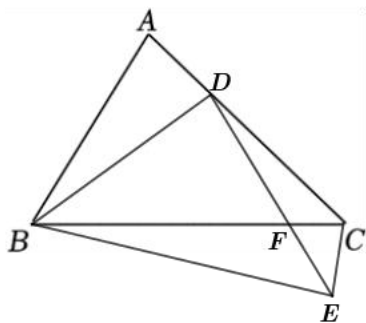
- A. $\triangle BAD$ 与 $\triangle BCE$ B. $\triangle BDF$ 与 $\triangle ECF$
C. $\triangle DCF$ 与 $\triangle BEF$ D. $\triangle DBF$ 与 $\triangle DEB$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定、旋转性质、等腰三角形的性质，根据旋转的性质和相似三角形的判定逐项判断即可．熟练掌握相似三角形的判定是解答的关键．

【详解】解：如图，



由旋转性质得 $AB = BD$ ， $BC = BE$ ， $\angle ABD = \angle CBE$ ， $\angle A = \angle BDE$ ， $\angle ACB = \angle DEB$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BE},$$

$\therefore \triangle BAD \sim \triangle BCE$ ，故选项 A 不符合题意；

$\therefore \angle ABD = \angle CBE$ ， $AB = BD$ ， $BC = BE$ ，

$\therefore \angle A = \angle ADB = \angle BCE = \angle BEC$ ，

$\therefore \angle BDF = \angle BCF$ ，又 $\angle DFB = \angle CFE$ ，

$\therefore \triangle BDF \sim \triangle ECF$ ，故选项 B 不符合题意；

$\therefore \angle DCF = \angle FEB$ ，又 $\angle DFC = \angle BFE$ ，

$\therefore \triangle DCF \sim \triangle BEF$ ，故选项 C 不符合题意；

根据题意，无法证明 $\triangle DBF$ 与 $\triangle DEB$ 相似，故选项 D 符合题意，

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 如果 $x:y=5:3$ ，那么 $\frac{x-y}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】根据 $x:y=5:3$ 得到 $x = \frac{5}{3}y$ ，把它代入后面的式子求出比值.

【详解】解： $\because x:y=5:3$ ，

$$\therefore 3x = 5y, \text{ 即 } x = \frac{5}{3}y,$$

$$\therefore \frac{x-y}{y} = \frac{\frac{5}{3}y-y}{y} = \frac{2}{3}.$$

故答案是： $\frac{2}{3}$.

【点睛】 本题主要考查了比例的性质，解题的关键是掌握比例基本的性质.

8. 计算: $3(2\vec{a} + \vec{b}) - 4\vec{a} =$ _____.

【答案】 $2\vec{a} + 3\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平面向量, 利用平面向量的定义与运算性质解答即可, 熟练掌握平面向量的运算性质是解题的关键.

【详解】 $3(2\vec{a} + \vec{b}) - 4\vec{a}$

$$= 6\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{a}$$

$$= 2\vec{a} + 3\vec{b};$$

故答案为: $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

9. 已知抛物线 $y = (a-2)x^2 - x$ 开口向上, 那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的性质, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

利用二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的性质: $a > 0$ 时, 抛物线开口向上, 列出不等式解答即可.

【详解】 解: $\because$ 抛物线 $y = (a-2)x^2 - x$ 开口向上,

$$\therefore a-2 > 0,$$

$$\therefore a > 2.$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是: } a > 2.$$

故答案为: $a > 2$.

10. 已知抛物线 $y = -2x^2 + 1$ 在对称轴左侧部分是_____。(填“上升”或“下降”)

【答案】 上升

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象的性质, 熟练掌握二次函数 $y = ax^2 + k$ 的性质是解答本题的关键. 根据性质解答即可.

【详解】 解: $\because y = -2x^2 + 1, a = -2 < 0,$

$\therefore$ 抛物线开口向下.

$\therefore$ 对称轴是直线 y 轴,

∴在对称轴左侧部分是上升的.

故答案为: 上升.

11. 如果 P 是线段 AB 的黄金分割点, $AB = 2\text{cm}$, 那么较长线段 AP 的长是_____ cm .

【答案】 $(-1 + \sqrt{5})$

【解析】

【分析】 本题考查了黄金分割的定义, 关键是明确黄金分割所涉及的线段的比.

根据黄金分割的定义解答.

【详解】 解: 设 $AP = x\text{cm}$,

根据题意列方程得, $x^2 = 2(2 - x)$,

即 $x^2 + 2x - 4 = 0$,

解得 $x_1 = -1 + \sqrt{5}, x_2 = -1 - \sqrt{5}$ (负值舍去).

故答案为: $(-1 + \sqrt{5})$.

12. 某人顺着坡度为 $1:\sqrt{3}$ 的斜坡滑雪, 下滑了 120 米, 那么高度下降了_____米.

【答案】 60

【解析】

【分析】 此题考查了解直角三角形的应用——坡度坡角问题, 设垂直高度, 表示出水平距离, 利用勾股定理求解即可, 解题的关键是掌握坡度坡角的定义.

【详解】 ∵坡度为 $1:\sqrt{3}$,

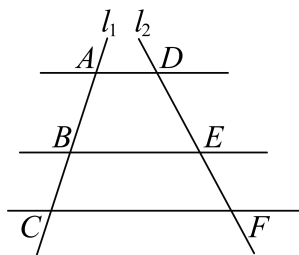
∴设高度下降了 $x (x > 0)$ 米, 则水平前进了 $\sqrt{3}x$ 米,

由勾股定理得: $x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 120^2$,

解得: $x = 60$,

故答案为: 60 .

13. 如图, 已知 $AD \parallel BE \parallel CF$, 它们依次交直线 l_1 于点 A 、 B 、 C , 交直线 l_2 于点 D 、 E 、 F , 已知 $AB:AC = 3:5$, $DF = 10$, 那么 EF 的长为_____.



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查的是平行线分线段成比例定理，根据平行线分线段成比例定理列出比例式，代入已知数据计算即可，灵活运用定理、找准对应关系是解题的关键.

【详解】 $\because AD \parallel BE \parallel CF$, $AB: AC = 3:5$,

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore DF = 10,$$

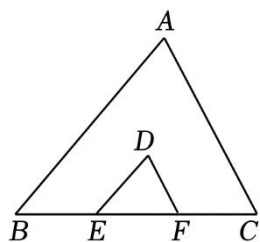
$$\therefore \frac{DE}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore DE = 6,$$

$$\therefore EF = 10 - 6 = 4.$$

故答案为: 4.

14. 如图，已知 $\triangle ABC$ 的周长为15，点 E 、 F 是边 BC 的三等分点， $DE \parallel AB$ ， $DF \parallel AC$ ，那么 $\triangle DEF$ 的周长是_____.



【答案】 5

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质，平行线的性质，利用平行线的性质和相似三角形的判定与性质解答即可，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 点 E 、 F 是边 BC 的三等分点,

$$\therefore EF = \frac{1}{3} BC,$$

$$\therefore DE \parallel AB, DF \parallel AC,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle B, \angle DFE = \angle C,$$

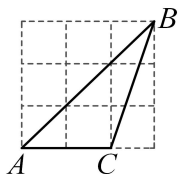
$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \triangle DEF \text{ 的周长} : \triangle ABC \text{ 的周长} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \triangle DEF \text{ 的周长} = \frac{1}{3} \times 15 = 5.$$

故答案为：5.

15. 如图，已知 $\triangle ABC$ 在边长为 1 个单位的方格纸中，三角形的顶点在小正方形顶点位置，那么 $\angle ABC$ 的正切值为_____.

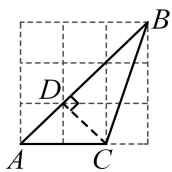


【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理及三角形函数的性质等知识点，构建合适的直角三角形即可解决问题，构造出合适的直角三角形是解题的关键.

【详解】 连接 CD ，如图所示，



易得 $\triangle BCD$ 是直角三角形，

由勾股定理得，

$$CD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad BD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中，

$$\tan \angle ABC = \frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

16. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 45^\circ$ ， $\cos \angle B = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ($\angle B$ 是锐角)， $BC = \sqrt{5}$ ， 那么 AB 的长为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】本题主要考查了解直角三角形，勾股定理，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D ，先解 $\text{Rt}\triangle DBC$ 得到 $BD = 1$ ，即可利用勾股定理求出 $CD = 2$ ，再解 $\text{Rt}\triangle ADC$ 求出 $AD = 2$ ，则 $AB = AD + BD = 3$ 。

【详解】解：如图所示，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D ，

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle DBC \text{ 中, } \cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad BC = \sqrt{5},$$

$$\therefore BD = 1,$$

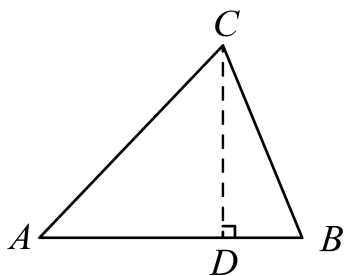
$$\therefore CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 2,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADC \text{ 中, } \tan A = \frac{CD}{AD} = 1,$$

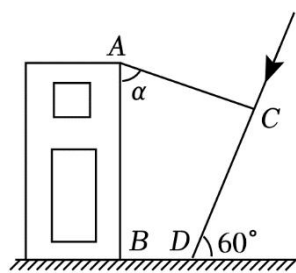
$$\therefore AD = 2,$$

$$\therefore AB = AD + BD = 3,$$

故答案为：3。



17. 如图是某幢房屋及其屋外遮阳篷，已知遮阳篷的固定点 A 距离地面 4 米(即 $AB = 4$ 米)，遮阳篷的宽度 AC 为 2.6 米，遮阳篷与房屋墙壁的夹角 α 的余弦值为 $\frac{5}{13}$ ，当太阳光与地面的夹角为 60° 时，遮阳篷在地面上的阴影宽度 BD 为_____米。

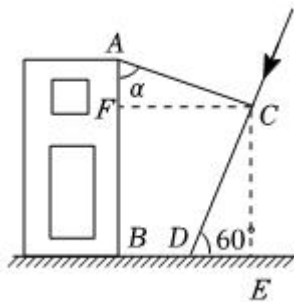


【答案】 $(2.4 - \sqrt{3})$

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形的应用，先作 $CF \perp AB$ 于点 F ，作 $CE \perp BD$ ，交 BD 的延长线于点 E ，然后根据锐角三角函数和勾股定理，可以求得 BE 和 DE 的值，从而可以求得 BD 的值。

【详解】解：作 $CF \perp AB$ 于点 F ，作 $CE \perp BD$ ，交 BD 的延长线于点 E ，如图，



由已知可得, $AC = 2.6$ 米, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\angle AFC = 90^\circ$, $AB = 4$ 米,

$$\therefore AF = AC \cdot \cos \alpha = 2.6 \times \frac{5}{13} = 1$$

$$\therefore CF = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \sqrt{2.6^2 - 1^2} = 2.4 \text{ (米)}, \quad BF = AB - AF = 4 - 1 = 3 \text{ (米)},$$

$$\therefore CE = BF = 3 \text{ 米}, \quad CF = BE = 2.4 \text{ 米},$$

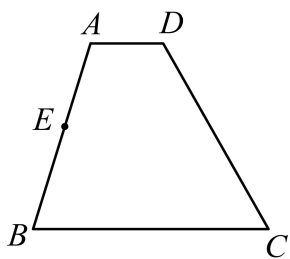
$$\because \angle CDE = 60^\circ, \quad \angle CED = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = \frac{CE}{\tan 60^\circ} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore BD = BE - DE = (2.4 - \sqrt{3}) \text{ (米)}$$

故答案为: $(2.4 - \sqrt{3})$.

18. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 3AD$, 点 E 是 AB 中点, 如果点 F 在 DC 上, 线段 EF 把梯形分成面积相等的两个部分, 那么 $\frac{DF}{DC} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{3}{4}$ ## 0.75

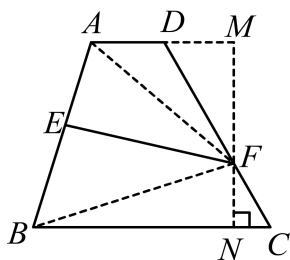
【解析】

【分析】 本题考查梯形, 相似三角形的判定和性质, 三角形的面积, 关键是由三角形的面积公式得到 $FM = 3FN$, 证明 $FDM \sim FCN$, 即可求解.

连接 AF, BF , 过 F 作 $MN \perp BC$ 交 BC 于 N , 交 AD 延长线于 M , 由 $AD \parallel BC$, 得到 $MN \perp AD$, 由点 E 是 AB 中点, 得到 $\triangle FAE$ 的面积 = FBE 的面积, 由线段 EF 把梯形分成面积相等的两个部分, 得到 $\triangle ADF$ 的面积 = $\triangle BCF$ 的面积, 由三角形面积公式得到 $FM = 3FN$, 由 $FDM \sim FCN$, 得到

$$\frac{FD}{FC} = \frac{MF}{NF} = 3, \text{ 即可求出 } \frac{DF}{DC} = \frac{3}{4}.$$

【详解】解：连接 AF, BF ，过 F 作 $MN \perp BC$ 交 BC 于 N ，交 AD 延长线于 M ，



$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore MN \perp AD,$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 是 } AB \text{ 中点},$$

$$\therefore \triangle FAE \text{ 的面积} = \triangle FBE \text{ 的面积},$$

$$\therefore \text{线段 } EF \text{ 把梯形分成面积相等的两个部分},$$

$$\therefore \triangle ADF \text{ 的面积} = \triangle BCF \text{ 的面积},$$

$$\therefore \frac{1}{2} AD \cdot FM = \frac{1}{2} BC \cdot FN,$$

$$\therefore BC = 3AD,$$

$$\therefore FM = 3FN,$$

$$\therefore DM \parallel CN,$$

$$\therefore \triangle FDM \sim \triangle FCN,$$

$$\therefore \frac{FD}{FC} = \frac{MF}{NF} = 3,$$

$$\therefore \frac{DF}{DC} = \frac{3}{4},$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{4}.$$

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } \frac{\tan 45^\circ}{2 \sin 60^\circ - 2 \cos 60^\circ} - |\cot 30^\circ - 1|.$$

$$\text{【答案】 } \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

【解析】

【分析】本题考查了实数的运算，原式利用特殊角的三角函数值计算即可求出值，熟练掌握运算法则和特殊角的三角函数值是解本题的关键.

$$\begin{aligned}
& \text{【详解】} \frac{\tan 45^\circ}{2 \sin 60^\circ - 2 \cos 60^\circ} - |\cot 30^\circ - 1| \\
&= \frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2}} - |\sqrt{3} - 1| \\
&= \frac{1}{\sqrt{3} - 1} - (\sqrt{3} - 1) \\
&= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} - \sqrt{3} + 1 \\
&= \frac{3 - \sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

20. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(3, 0)$, $B(0, -3)$.

- (1) 求抛物线表达式并写出顶点坐标;
- (2) 联结 AB , 与该抛物线的对称轴交于点 P , 求点 P 的坐标.

【答案】(1) 抛物线表达式为 $y = x^2 - 2x - 3$; 顶点坐标为 $(1, -4)$;

(2) $P(1, -2)$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的图象与性质, 一次函数的图象与性质.

- (1) 利用待定系数法和配方法解答即可;
- (2) 利用待定系数法求得直线 AB 的解析式, 令 $x = 1$, 求得 y 值, 则结论可得.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(3, 0)$, $B(0, -3)$,

$$\therefore \begin{cases} 9 + 3b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线表达式为 $y = x^2 - 2x - 3$;

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(1, -4)$;

【小问 2 详解】

解：设直线 AB 的解析式为 $y = kx + n$,

$$\therefore \begin{cases} 3k + n = 0 \\ n = -3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = 1 \\ n = -3 \end{cases},$$

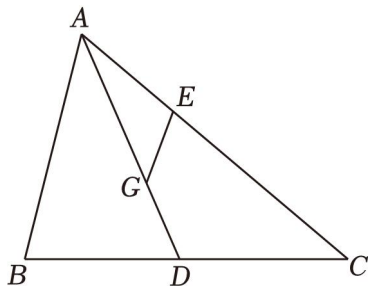
$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = x - 3$.

$\because AB$ 与该抛物线的对称轴交于点 P , 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $y = 1 - 3 = -2$.

$\therefore P(1, -2)$.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 联结 AG 并延长交 BC 于点 D .



(1) 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AD} =$ _____ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示);

(2) 已知 $AD = 6$, $AC = 8$, 点 E 在边 AC 上, 且 $\angle AGE = \angle C$, 求 AE 的长.

【答案】(1) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

(2) 3;

【解析】

【分析】 本题主要考查了平面向量, 三角形的重心, 相似三角形的判定与性质,

(1) 利用平面向量的定义解答即可;

(2) 利用三角形的重心的定义和相似三角形的判定与性质解答即可.

【小问 1 详解】

解: $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心, 联结 AG 并延长交 BC 于点 D ,

$\therefore AD$ 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线,

即点 D 为 BC 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b},$$

故答案为: $\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$.

【小问2 详解】

$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore AG = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \times 6 = 4.$$

$\because \angle AGE = \angle C, \angle GAE = \angle CAD,$

$\therefore \triangle GAE \sim \triangle CAD,$

$$\therefore \frac{AE}{AG} = \frac{AD}{AC}$$

$$\therefore \frac{AE}{4} = \frac{6}{8}$$

$$\therefore AE = 3$$

22. 如图 1, 某小组通过实验探究凸透镜成像的规律, 他们依次在光具座上垂直放置发光物箭头、凸透镜和光屏, 并调整到合适的高度. 如图 2, 主光轴 l 垂直于凸透镜 MN , 且经过凸透镜光心 O , 将长度为 8 厘米的发光物箭头 AB 进行移动, 使物距 OC 为 32 厘米, 光线 AO 、 BO 传播方向不变, 移动光屏, 直到光屏上呈现一个清晰的像 $A'B'$, 此时测得像距 OD 为 12.8 厘米.

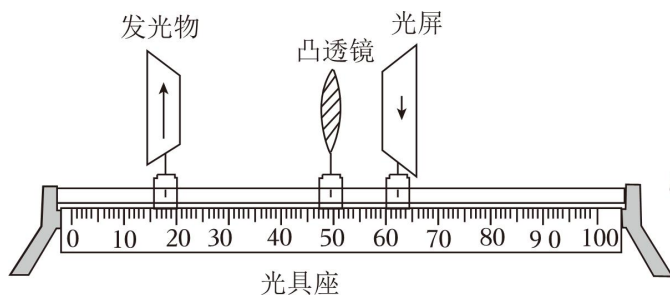


图1

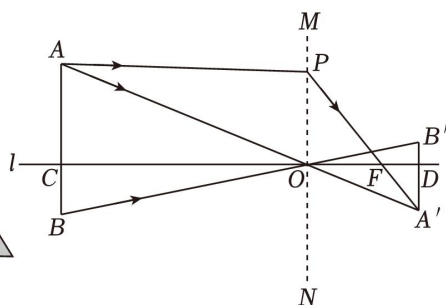


图2

(1) 求像 $A'B'$ 的长度.

(2) 已知光线 AP 平行于主光轴 l , 经过凸透镜 MN 折射后通过焦点 F , 求凸透镜焦距 OF 的长.

【答案】(1) 3.2 厘米

(2) $\frac{64}{7}$ 厘米.

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的应用, 平行四边形的判定与性质等知识点,

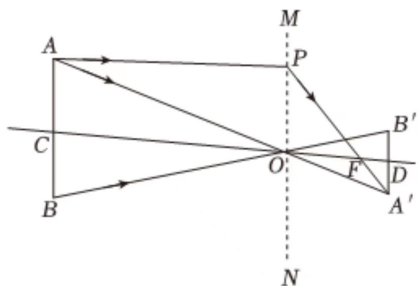
(1) 利用相似三角形的判定与性质，通过证明 $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$ 与 $\triangle OAC \sim \triangle OA'D$ 解答即可；

(2) 过点 A' 作 $A'E \parallel OD$ 交 MN 于点 E ，利用平行四边形的判定与性质和相似三角形的判定与性质解答即可；

熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

【小问 1 详解】

由题意得： $AB \parallel MN \parallel A'B'$ ， $OC = 32\text{cm}$, $OD = 12.8\text{cm}$, $AB = 8\text{cm}$ ，



$$\because AB \parallel A'B',$$

$$\therefore \triangle OAB \sim \triangle OA'B',$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'},$$

$$\because AB \parallel A'B',$$

$$\therefore \triangle OAC \sim \triangle OA'D,$$

$$\therefore \frac{OA}{OA'} = \frac{OC}{OD},$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{OC}{OD},$$

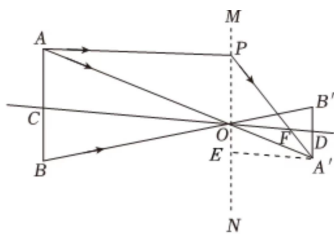
$$\therefore \frac{8}{A'B'} = \frac{32}{12.8},$$

$$\therefore A'B' = 3.2.$$

$\therefore$ 像 $A'B'$ 的长度 3.2 厘米.

【小问 2 详解】

过点 A' 作 $A'E \parallel OD$ 交 MN 于点 E ，如图，



$$\therefore A'E \parallel OD, \quad MN \parallel A'B',$$

$\therefore$ 四边形 $A'EOD$ 为平行四边形,

$$\therefore A'E = OD = 12.8\text{cm}, OE = A'D.$$

同理: 四边形 $ACOP$ 为平行四边形,

$$\therefore AP = OC = 32\text{cm},$$

$$\therefore AP \parallel CD, A'E \parallel OD,$$

$$\therefore AP \parallel A'E,$$

$$\therefore \triangle APO \sim \triangle A'EO,$$

$$\therefore \frac{PO}{OE} = \frac{AP}{A'E} = \frac{32}{12.8} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{PO}{A'D} = \frac{5}{2}.$$

$$\therefore MN \parallel A'B',$$

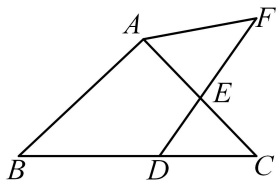
$$\therefore \triangle POF \sim \triangle A'DF,$$

$$\therefore \frac{PO}{A'D} = \frac{OF}{DF} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore OF = \frac{5}{7}OD = \frac{64}{7} \text{ (厘米)}.$$

$\therefore$ 凸透镜焦距 OF 的长为 $\frac{64}{7}$ 厘米.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 在边 BC 上, 已知 $\angle AFD = \angle B$, 边 DF 交 AC 于点 E .



(1) 求证: $AF \cdot CE = CD \cdot FE$;

(2) 连接 AD , 如果 $\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{DF}$, 求证: $AD^2 = AE \cdot AC$.

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】本题主要考查了等腰三角形的性质, 相似三角形的判定与性质, 熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

(1) 利用等腰三角形的性质和相似三角形的判定与性质解答即可;

(2) 利用相似三角形的判定与性质解答即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\because \angle AFD = \angle B,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle ACB.$$

$$\because \angle AEF = \angle DEC,$$

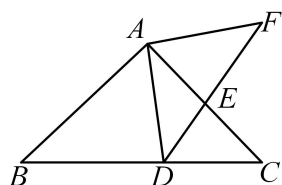
$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle DEC,$$

$$\therefore \frac{AF}{DC} = \frac{FE}{CE},$$

$$\therefore AF \cdot CE = CD \cdot FE;$$

【小问 2 详解】

$$\because \frac{AB}{AF} = \frac{BC}{DF}, \angle AFD = \angle B,$$



$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AFD,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ADF,$$

$$\because \angle DAC = \angle EAD,$$

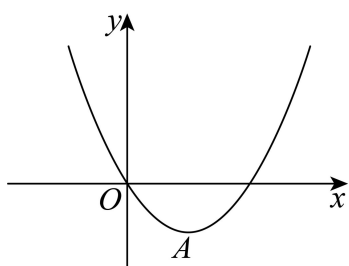
$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle AED,$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD},$$

$$\therefore AD^2 = AE \cdot AC.$$

24. 在平面直角坐标系中, 如果两条抛物线关于直线 $x = m$ 对称, 那么我们把一条抛物线称为另一条抛物线关于直线 $x = m$ 的镜像抛物线.

(1) 如图, 已知抛物线 $y = x^2 - 2x$ 顶点为 A .



①求该抛物线关于 y 轴的镜像抛物线的表达式;

②已知该抛物线关于直线 $x=m$ 的镜像抛物线的顶点为 B , 如果 $\tan \angle OBA = \frac{1}{4}$ ($\angle OBA$ 是锐角), 求 m 的值.

(2) 已知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$ ($b > 0$) 的顶点为 C , 它的一条镜像抛物线的顶点为 D , 这两条抛物线的交点为 $E(2, 1)$. 如果 $\triangle CDE$ 是直角三角形, 求该抛物线的表达式.

【答案】 (1) ① $y = x^2 + 2x$; ② $-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{5}{2}$

(2) $y = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 3$

【解析】

【分析】 (1) ①由 $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, 可得 $A(1, -1)$, 则该抛物线关于 y 轴的镜像抛物线的顶点为 $A(-1, -1)$, 然后求镜像抛物线的表达式即可; ②当 $x=m$ 在点 A 左侧时, 该抛物线关于直线 $x=m$ 的镜像抛物线的顶点为 $B(2m-1, -1)$, 如图 1-1, 连接 AB 交 y 轴于点 E , 则 $OE=1$, 由 $\tan \angle OBA = \frac{1}{4}$, 可得 $BE = -2m+1=4$, 计算求解即可; 如图 1-2, 当 $x=m$ 在点 A 右侧时, 同理可得, $2m-1=4$, 计算求解即可;

(2) 如图 2, 由题意知, 若 $\triangle CDE$ 是直角三角形, 则 $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形, 则 $EH = CH = DH$, 设 $EH = CH = DH = t$, 由 $E(2, 1)$, 可得 $C(2-t, 1-t)$, 即抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{4}(x-2+t)^2 + 1-t$, 将 $E(2, 1)$ 代入得, $1 = \frac{1}{4}(2-2+t)^2 + 1-t$, 求出满足要求的 t , 进而可得抛物线的表达式.

【小问 1 详解】

①解: $\because y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$,

$\therefore A(1, -1)$,

$\therefore$ 该抛物线关于 y 轴的镜像抛物线的顶点为 $A(-1, -1)$,

$\therefore$ 该抛物线关于 y 轴的镜像抛物线的表达式为 $y = (x+1)^2 - 1$, 即 $y = x^2 + 2x$;

②当 $x=m$ 在点 A 左侧时,

$\therefore A(1, -1)$, 该抛物线关于直线 $x=m$ 的镜像抛物线的顶点为 B ,

$\therefore B(2m-1, -1)$,

如图 1-1, 连接 AB 交 y 轴于点 E , 则 $OE=1$,

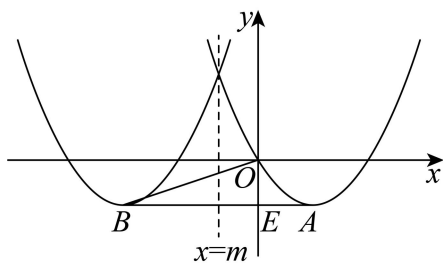


图 1-1

$$\therefore \tan \angle OBA = \frac{1}{4},$$

$$\therefore BE = -2m + 1 = 4,$$

$$\text{解得, } m = -\frac{3}{2};$$

如图 1-2, 当 $x = m$ 在点 A 右侧时,

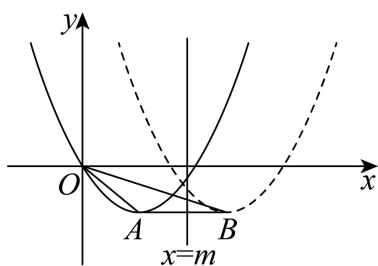


图 1-2

$$\text{同理可得, } 2m - 1 = 4,$$

$$\text{解得, } m = \frac{5}{2};$$

综上所述, m 的值为 $-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{5}{2}$;

【小问 2 详解】

解: 如图 2,

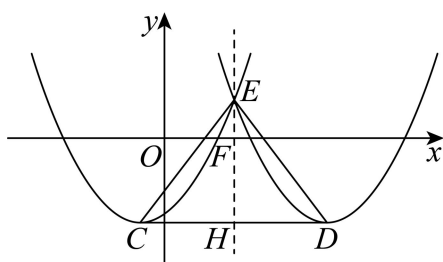


图 2

由题意知, 若 $\triangle CDE$ 是直角三角形, 则 $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形, 则 $EH = CH = DH$,

设 $EH = CH = DH = t$,

$$\therefore E(2, 1),$$

$$\therefore C(2-t, 1-t),$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为 } y = \frac{1}{4}(x-2+t)^2 + 1-t,$$

$$\text{将 } E(2,1) \text{ 代入 } y = \frac{1}{4}(x-2+t)^2 + 1-t \text{ 得, } 1 = \frac{1}{4}(2-2+t)^2 + 1-t,$$

解得, $t=4$ 或 $t=0$ (舍去),

$$\therefore \text{抛物线的表达式为 } y = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 3.$$

【点睛】本题考查了二次函数解析式, 轴对称的性质, 等腰三角形的判定与性质, 正切等知识, 熟练掌握二次函数解析式, 轴对称的性质, 等腰三角形的判定与性质, 正切是解题的关键.

25. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $AD = 6$, $AB = 4$, $BC > AD$, $\angle ADC$ 的平分线交边 BC 于点 E , 点 F 在线段 DE 上, 射线 CF 与梯形 $ABCD$ 的边相交于点 G .

(1) 如图 1, 如果点 G 与 A 重合, 当 $\tan \angle BCD = \frac{4}{3}$ 时, 求 BE 的长;

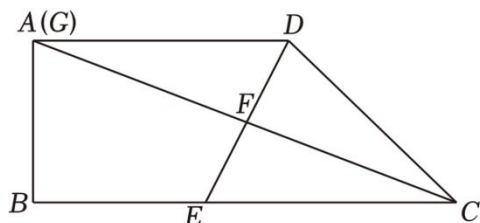


图1

(2) 如图 2, 如果点 G 在边 AD 上, 联结 BG , 当 $DG = 4$, 且 $CGB \sim BAG$ 时, 求 $\sin \angle BCD$ 的值;

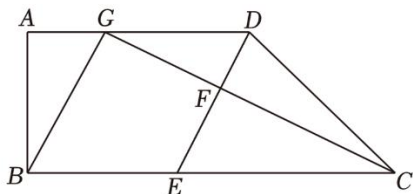


图2

(3) 当 F 是 DE 中点, 且 $AG = 1$ 时, 求 CD 的长.

【答案】 25. 4 26. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

27. CD 的长为 5 或 $9 + \sqrt{7}$

【解析】

【分析】(1) 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H , 利用直角梯形的性质, 矩形的判定与性质求得 DH , 利用直角三角形的边角关系定理求得 CH , 利用勾股定理求得 CD , 利用角平分线的定义和平行线的性质得到 $CD = CE$, 则 $BE = BC - CE$;

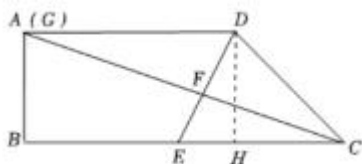
(2) 过点 D 作 $DM \perp BC$ 于点 M , 利用(1)的结论, 勾股定理和相似三角形的判定与性质求得 BC, CM ,

再利用等腰直角三角形的判定与特殊角的三角函数值解答即可；

(3) 利用分类讨论的方法分两种情况讨论解答：①当点 G 在 AD 上时，利用等腰三角形的三线合一的性质，全等三角形的判定与性质解答即可；②当点 G 在 AB 上时，连接 DG, GE ，延长 DG, CG 交于点 N ，利用勾股定理求得 BE ，利用相似三角形的判定与性质求得 AN ，再利用全等三角形的判定与性质解答即可。

【小问 1 详解】

解：过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H ，如图，



$$\because AD \parallel BC, \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\because DH \perp BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABHD$ 为矩形，

$$\therefore DH = AB = 4, BH = AD = 6,$$

$$\because \tan \angle BCD = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \frac{DH}{CH} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore CH = 3,$$

$$\therefore CD = \sqrt{CH^2 + DH^2} = 5,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DEC,$$

$$\because \angle ADE = \angle CDE,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle CED,$$

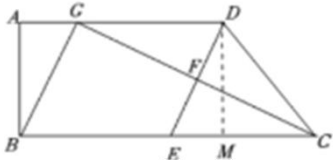
$$\therefore CE = CD = 5,$$

$$\therefore BC = BH + CH = 9,$$

$$\therefore BE = BC - CE = 9 - 5 = 4;$$

【小问 2 详解】

过点 D 作 $DM \perp BC$ 于点 M ，如图，



由 (1) 知: $AD = BM = 6, DM = AB = 4, CD = CE$,

$$\therefore DG = 4, AD = 6,$$

$$\therefore AG = 2,$$

$$\therefore BG = \sqrt{AB^2 + AG^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \triangle CGB \sim \triangle BAG,$$

$$\therefore \angle BAG = \angle CGB = 90^\circ, \frac{BG}{AG} = \frac{BC}{BG},$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{5}}{2} = \frac{BC}{2\sqrt{5}},$$

$$\therefore BC = 10,$$

$$\therefore CM = BC - BM = 4,$$

$$\therefore DM = CM = 4,$$

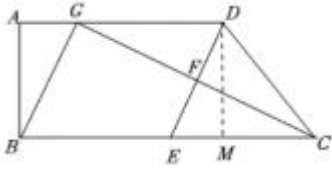
$\therefore \triangle DMC$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle BCD = \angle CDM = 45^\circ,$$

$$\therefore \sin \angle BCD = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

【小问 3 详解】

①当点 G 在 AD 上时, 如图,



由 (1) 知: $CD = CE$,

$\therefore F$ 是 DE 中点,

$$\therefore CF \perp DE,$$

在 $\triangle DGF$ 和 $\triangle DCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle GDF = \angle CDF \\ DF = DF \\ \angle DFG = \angle DFC = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DGF \cong \triangle DCF (ASA),$$

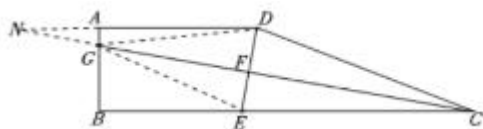
$$\therefore DG = DC,$$

$$\because AG = 1, AD = 6,$$

$$\therefore DG = 5,$$

$$\therefore CD = DG = 5;$$

②当点 G 在 AB 上时, 连接 DG, GE , 延长 DG , CG 交于点 N , 如图,



由 (1) 知: $CD = CE$,

$\therefore F$ 是 DE 中点,

$\therefore CF \perp DE$,

$\therefore CG$ 为 DE 的垂直平分线,

$\therefore GD = GE$,

$$\therefore GD^2 = GE^2,$$

$$\therefore AG^2 + AD^2 = BG^2 + BE^2,$$

$$\therefore 1^2 + 6^2 = 3^2 + BE^2,$$

$$\therefore BE = 2\sqrt{7},$$

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle ANG \sim \triangle BCG$,

$$\therefore \frac{AG}{BG} = \frac{AN}{BC},$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{AN}{BC},$$

在 $\triangle DNF$ 和 $\triangle DCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle NDF = \angle CDF \\ DF = DF \\ \angle NFD = \angle CFD = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DNF \cong \triangle DCF (AAS),$$

$$\therefore CD = ND,$$

$$\text{设 } CD = x,$$

$$\text{则 } BC = CE + BE = x + 2\sqrt{7}, \quad AN = DN - DA = CD - DA = x - 6,$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{x-6}{x+2\sqrt{7}},$$

$$\therefore x = 9 + \sqrt{7},$$

$$\therefore CD = 9 + \sqrt{7},$$

综 上 , CD 的 长 为 5 或

名师教学 - 务实课程 - 注重教辅

淘宝搜索店铺：优尖升教育
客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：

ONLINE EDUCATION
为您的课程，我们一直在努力

最新资讯请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版
淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com

$$9 + \sqrt{7}.$$

【点睛】本题主要考查了直角梯形的性质，平行线的性质，矩形的判定与性质，直角三角形的性质，直角三角形的边角关系定理，勾股定理，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，角平分线的定义，等腰三角形的判定与性质，过梯形的上底的一点作高线是解决此类问题常添加的辅助线.

