

2023 学年第一学期九年级质量调研数学样卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)

1. 如果抛物线 $y = (k-1)x^2 + 2$ 的开口向下，那么 k 的取值范围是 ()

- A. $k > 0$ B. $k < 0$ C. $k > 1$ D. $k < 1$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查二次函数的性质，根据抛物线开口向下，得到 $k-1 < 0$ ，求解即可。

【详解】解：由题意，得： $k-1 < 0$ ，

$$\therefore k < 1;$$

故选 D.

2. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴是直线 $x = -2$ ，那么下列等式成立的是 ()

- A. $b = 2a$ B. $b = -2a$ C. $b = 4a$ D. $b = -4a$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次函数的性质. 根据二次函数的对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$ ，进行求解后，判断即可.

【详解】解： $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴是直线 $x = -2$ ，

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -2,$$

$$\therefore b = 4a.$$

故选：C.

3. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 3$ ， $AB = 5$ ，那么下列结论正确的是 ()

- A. $\sin A = \frac{3}{5}$ B. $\cos A = \frac{3}{5}$ C. $\tan A = \frac{3}{5}$ D. $\cos A = \frac{3}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查求锐角三角函数值. 根据勾股定理求出 AC 的长，利用锐角三角函数的定义，逐一进行判断即可. 熟记锐角三角函数的定义，是解题的关键.

【详解】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $BC = 3$ ， $AB = 5$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 4,$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}, \quad \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}, \quad \cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3};$$

故选 A.

4. 一架飞机在离地面 6000 米的上空测得某一建筑物底部的俯角为 30° , 此时这架飞机与这一建筑物底部之间的距离是 ()

- A. 6000 米 B. 12000 米 C. $6000\sqrt{3}$ 米 D. $12000\sqrt{3}$ 米

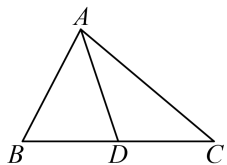
【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形的实际应用. 由题意可知, 在直角三角形中, 已知角的对边求斜边, 可以用正弦函数来计算.

【详解】 解: 由题意, 得: 这架飞机与这一建筑物底部之间的距离是 $6000 \div \sin 30^\circ = 12000$ 米;
故选 B.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 BC 的中点, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AD}$ 等于 ()



A. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

B. $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

C. $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

D. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了向量的线性运算, 根据 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ 、 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 、 $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ 即可求解.

【详解】 解: $\because \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, 点 D 是边 BC 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

故选: D

6. 下列命题是真命题的是 ()

- A. 有一个角是 36° 的两个等腰三角形相似
B. 有一个角是 45° 的两个等腰三角形相似
C. 有一个角是 60° 的两个等腰三角形相似
D. 有一个角是钝角的两个等腰三角形相似

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定方法，根据有两组对应角相等的两个三角形相似，进行判断即可.

【详解】解：A、36度的两个角一个是顶角，一个是底角时，两个等腰三角形不相似，选项为假命题；

B、45度的两个角一个是顶角，一个是底角时，两个等腰三角形不相似，选项为假命题；

C、有一个角是 60° 的两个等腰三角形均为等边三角形，相似，为真命题；

D、有一个角是钝角，且钝角的度数相等的两个等腰三角形相似，选项为假命题；

故选C.

二、填空题：(本大题共12题，每题4分，满分48分)

7. 如果函数 $y = (k-1)x^2 + kx - 1$ (k 是常数)是二次函数，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \neq 1$

【解析】

【分析】根据：“形如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，这样的函数叫做二次函数”，得到 $k-1 \neq 0$ ，即可.

【详解】解：由题意，得： $k-1 \neq 0$ ，

$\therefore k \neq 1$ ；

故答案为： $k \neq 1$.

8. 将抛物线 $y = 3 + x - 2x^2$ 向下平移2个单位，那么平移后抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = -2x^2 + x + 1$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数图象的平移，根据“上下移动，纵坐标相加减，左右移动横坐标相加减”进行求解即可.

【详解】解：将抛物线 $y = 3 + x - 2x^2$ 向下平移2个单位，那么平移后抛物线的表达式是

$$y = 3 + x - 2x^2 - 2 = -2x^2 + x + 1,$$

故答案为： $y = -2x^2 + x + 1$.

9. 如果抛物线 $y = x^2 + c$ 经过两点 $A(2,1)$ 和 $B(1,b)$ ，那么 b 的值是_____.

【答案】-2

【解析】

【分析】本题考查待定系数法求函数解析式. 将点A的坐标代入解析式求出 c 的值，再把点B的坐标代入，

求出 b 的值即可.

【详解】解: 把 $A(2,1)$, 代入 $y = x^2 + c$, 得: $c = -3$,

$$\therefore y = x^2 - 3,$$

把 $B(1,b)$, 代入 $y = x^2 - 3$, 得: $b = -2$;

故答案为: -2 .

10. 二次函数 $y = -x^2 - 2x + m$ 图像的最高点的横坐标是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的最值, 将二次函数解析式化为顶点式, 由此即可得出答案, 熟练掌握二次函数的性质是解此题的关键.

【详解】解: $\because y = -x^2 - 2x + m = -(x^2 + 2x) + m = -(x+1)^2 + m + 1$,

$\therefore$ 二次函数 $y = -x^2 - 2x + m$ 图像的最高点的横坐标是 -1 ,

故答案为: -1 .

11. 如果 $5a = 3b$ (a 、 b 都不等于零), 那么 $\frac{a-b}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{2}{5}$ 或 -0.4

【解析】

【分析】 此题考查比例的性质, 用同一未知数正确表示出 a 和 b 是解题关键. 利用已知把 a 和 b 用同一未知数表示, 进而计算得出答案.

【详解】解: $\because 5a = 3b$,

$\therefore$ 可设 $a = 3k$, 则 $b = 5k$,

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{3k-5k}{5k} = -\frac{2}{5}.$$

故答案为: $-\frac{2}{5}$.

12. 已知点 P 是线段 AB 的一个黄金分割点, 且 $AB = 4\text{cm}$, $AP < BP$, 那么 $BP = \underline{\hspace{2cm}} \text{cm}$.

【答案】 $(2\sqrt{5}-2)$ 或 $(-2+2\sqrt{5})$

【解析】

【分析】 本题考查了黄金分割, 熟练掌握黄金分割的定义是解题的关键. 利用黄金分割的定义进行计算, 即可解答.

【详解】解：∵点 P 是线段 AB 的一个黄金分割点，且 $AB = 4\text{cm}$ ， $AP < BP$ ，

$$\therefore BP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 4 = (2\sqrt{5}-2)\text{cm},$$

故答案为： $(2\sqrt{5}-2)$

13. 如果向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{x}$ 满足关系式 $3\vec{a} - (\vec{x} - 2\vec{b}) = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ ，那么 $\vec{x} =$ _____（用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示）。

【答案】 $\vec{a} + 5\vec{b}$

【解析】

【分析】本题考查了平面向量，熟练掌握平面向量的运算法则是解题的关键。根据平面向量的运算法则求解即可。

【详解】解：∵ $3\vec{a} - (\vec{x} - 2\vec{b}) = 2\vec{a} - 3\vec{b}$

$$\therefore 3\vec{a} - \vec{x} + 2\vec{b} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\therefore \vec{a} + 5\vec{b} = \vec{x}$$

$$\therefore \vec{x} = \vec{a} + 5\vec{b}$$

故答案为： $\vec{a} + 5\vec{b}$

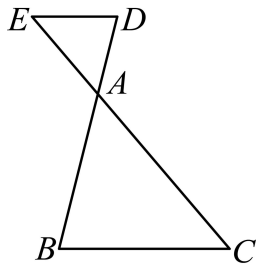
14. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 BA 、 CA 的延长线上， $AD:AB = 1:2$ ， $AC = 4$ ，那么当 $AE =$ _____ 时， $DE \parallel BC$ 。

【答案】 2

【解析】

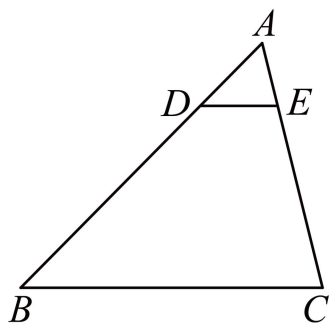
【分析】本题考查平行线分线段成比例。根据如果一条直线截三角形的两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边进行求解即可。

【详解】解：由题意，当 $AD:AB = AE:AC = 1:2$ ，即： $AE = \frac{1}{2}AC = 2$ 时， $DE \parallel BC$ ；



故答案为： 2.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 BA 、 CA 上, $DE \parallel BC$, $\frac{S_{\triangle DEA}}{S_{\text{四边形}BCED}} = \frac{1}{8}$, $BC = 9$, 那么 $DE = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 3

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定和性质, 根据 $\frac{S_{\triangle DEA}}{S_{\text{四边形}BCED}} = \frac{1}{8}$, 得到 $\frac{S_{\triangle DEA}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{9}$, 证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 进而得到 $DE : BC = 1 : 3$, 即可得解.

【详解】解: $\because \frac{S_{\triangle DEA}}{S_{\text{四边形}BCED}} = \frac{1}{8}$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle DEA}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{9},$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

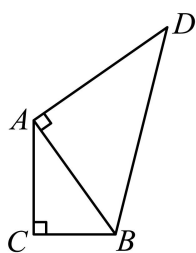
$\therefore$ 两个三角形的相似比为: $1 : 3$,

$$\therefore DE : BC = 1 : 3,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{3}BC = 3.$$

故答案为: 3.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $DA \perp AB$, 连接 BD , $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $AD = 2$, 那么 $\cos D = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{2}{7}\sqrt{7}$ ## $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

【解析】

【分析】 本题考查求角的余弦值. 勾股定理求出 AB, BD 的值, 再利用余弦等于邻边比斜边, 求解即可.

【详解】 解: $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3},$$

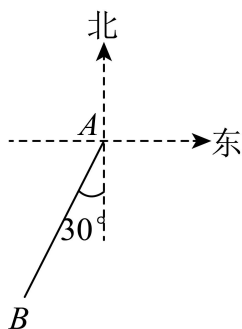
$$\because DA \perp AB, AD = 2,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore \cos D = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{7}\sqrt{7}.$$

故答案为: $\frac{2}{7}\sqrt{7}$.

17. 如图, 在港口 A 的南偏西 30° 方向有一座小岛 B, 一艘船以每小时 12 海里的速度从港口 A 出发, 沿正西方向行驶, 行了 30 分钟时这艘船在 C 处测得小岛 B 在船的正南方向, 那么小岛 B 与 C 处的距离 $BC =$ _____ 海里 (结果保留根号).

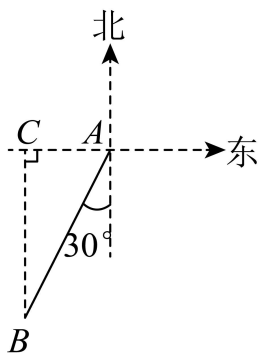


【答案】 $6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形的应用. 连接 BC , 由题意, $BC \perp AC$, 利用速度乘以时间求出 AC 的长, 利用锐角三角函数, 求出 BC 的长即可.

【详解】 解: 连接 BC 如图,

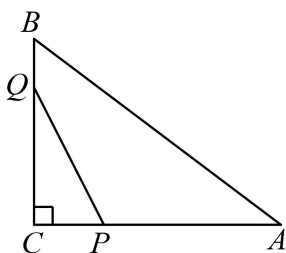


由题意，得： $BC \perp AC$, $\angle CAB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, $AC = 12 \times \frac{30}{60} = 6$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $BC = AC \cdot \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$;

故答案为： $6\sqrt{3}$.

18. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 25$ ， $AC = 20$ ， 点 P ， Q 分别在边 AC 、 BC 上， 且 $CP:BQ = 3:2$ ， 将 $\triangle PQC$ 沿直线 PQ 翻折， 翻折后点 C 落在点 C_1 处， 如果 $QC_1 \parallel AB$ ， 那么 $\cot \angle QPC_1 =$ _____.

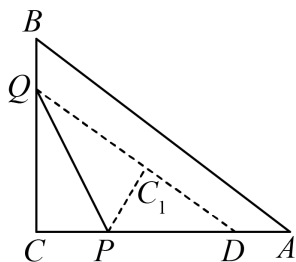


【答案】 $\frac{1}{2}$ ##0.5

【解析】

【分析】 本题考查折叠的性质， 解直角三角形， 勾股定理， 平行线的性质等， 延长 QC_1 交 AC 于点 D ， 先解 $\text{Rt}\triangle ABC$ ， 求出 $\sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$ ， $\tan \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$ ， 由折叠的性质可得 $PC_1 = PC$ ， $\angle QC_1P = \angle C = 90^\circ$ ， 设 $BQ = x$ ， 则 $PC_1 = PC = \frac{3}{2}x$ ， $CQ = BC - BQ = 15 - x$ ， 由 $QC_1 \parallel AB$ 推出 $\angle A = \angle C_1DP = \angle QDC$ ， 再解 $\text{Rt}\triangle PC_1D$ 和 $\text{Rt}\triangle PCQ$ 求出 x 的值， 进而即可求解.

【详解】 解： 如图， 延长 QC_1 交 AC 于点 D ，



$\because \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 25$, $AC = 20$,

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15,$$

$$\therefore \sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}, \quad \tan \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4},$$

由折叠的性质可得 $PC_1 = PC$, $\angle QC_1P = \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DC_1P = 90^\circ,$$

$$\because CP : BQ = 3 : 2,$$

$$\therefore \text{设 } BQ = x, \text{ 则 } PC_1 = PC = \frac{3}{2}x, \quad CQ = BC - BQ = 15 - x,$$

$$\because QC_1 \parallel AB,$$

$$\therefore \angle A = \angle C_1DP = \angle QDC,$$

$$\therefore \sin \angle C_1DP = \sin \angle A = \frac{3}{5}, \quad \tan \angle QDC = \tan \angle A = \frac{3}{4},$$

$$\therefore PD = \frac{C_1P}{\sin \angle C_1DP} = \frac{\frac{3}{2}x}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}x,$$

$$\therefore PD = CP + PD = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x = 4x,$$

$$\because \tan \angle QDC = \frac{CQ}{PD} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{15-x}{4x} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore x = \frac{15}{4},$$

$$\therefore PC = \frac{3}{2} \times \frac{15}{4} = \frac{45}{8}, \quad CQ = 15 - \frac{15}{4} = \frac{45}{4},$$

$$\therefore \cot \angle QPC = \frac{PC}{CQ} = \frac{\frac{45}{8}}{\frac{45}{4}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \cot \angle QPC_1 = \cot \angle QPC = \frac{1}{2},$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $4(1 - \cos 30^\circ) + \frac{2 \sin 60^\circ}{2 \tan 45^\circ - 3 \cot 60^\circ}$.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查特殊角的三角函数值的混合运算. 熟记特殊角的三角函数值, 是解题的关键.

【详解】 解: $4(1 - \cos 30^\circ) + \frac{2 \sin 60^\circ}{2 \tan 45^\circ - 3 \cot 60^\circ}$

$$= 4\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \times 1 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

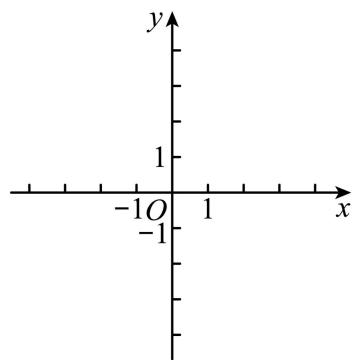
$$= 4 - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= 4 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$$

$$= 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3$$

$$= 7.$$

20. 已知平面直角坐标系 xOy , 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$ 和 $B(0, -3)$ 两点.



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 如果将这个抛物线向右平移 k ($k > 0$) 个单位, 得到新抛物线经过点 B , 求 k 的值.

【答案】 (1) $y = x^2 + 2x - 3$

(2) $k = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的解析式求解以及二次函数的平移, 注意计算的准确性即可.

(1) 将点 $A(-3, 0)$ 和 $B(0, -3)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ 即可求解;

(2) 由 (1) 得 $y = (x + 1)^2 - 4$, 设平移后的抛物线表达式为 $y = (x + 1 - k)^2 - 4$, 将点 $B(0, -3)$ 代入即可求解.

【小问 1 详解】

解：将点 $A(-3,0)$ 和 $B(0,-3)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ 得：

$$\begin{cases} 9 - 3b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式是： $y = x^2 + 2x - 3$.

【小问 2 详解】

解：由 (1) 配方得： $y = (x+1)^2 - 4$

根据题意可设平移后的抛物线表达式为 $y = (x+1-k)^2 - 4$

$\because y = (x+1-k)^2 - 4$ 经过点 $B(0,-3)$;

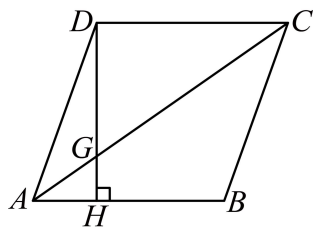
$$\therefore -3 = (1-k)^2 - 4$$

解得： $k_1 = 0$, $k_2 = 2$

$$\because k > 0$$

$$\therefore k = 2.$$

21. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 H 是边 AB 上一点，且 $BH = 2AH$ ，直线 DH 与 AC 相交于点 G .



(1) 求 $\frac{AG}{AC}$ 的值;

(2) 如果 $DH \perp AB$, $\cos \angle BCD = \frac{1}{3}$, $AD = 9$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

【答案】(1) $\frac{1}{4}$

(2) $54\sqrt{2}$

【解析】

【分析】此题考查了相似三角形的判定与性质、平行四边形的性质等知识，熟练运用相似三角形的判定与性质、平行四边形的性质是解题的关键.

(1) 根据平行四边形的性质得到 $AB = CD = 3AH$, $AB \parallel CD$, 根据相似三角形的判定与性质得到

$\frac{AG}{CG} = \frac{AH}{AD} = \frac{1}{3}$, 根据比例的性质求解即可;

(2) 根据平行四边形的性质得出 $\angle DAH = \angle BCD$, 则 $\cos \angle DAH = \cos \angle BCD = \frac{1}{3}$, 根据锐角三角函数定义求出 $AH = 3$, 则 $AB = 9$, 根据勾股定理求出 $DH = 6\sqrt{2}$, 根据平行四边形的面积公式求解即可.

【小问 1 详解】

$$\because BH = 2AH,$$

$$\therefore AB = AH + BH = 3AH,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore CD = 3AH,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle AGH \sim \triangle CGD,$$

$$\therefore \frac{AG}{CG} = \frac{AH}{AD} = \frac{AH}{3AH} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{AG}{AC} = \frac{AG}{AG + CG} = \frac{1}{1 + 3} = \frac{1}{4};$$

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle DAH = \angle BCD,$$

$$\therefore \cos \angle DAH = \cos \angle BCD = \frac{1}{3},$$

$$\because DH \perp AB,$$

$$\therefore \cos \angle DAH = \frac{AH}{AD},$$

$$\because AD = 9,$$

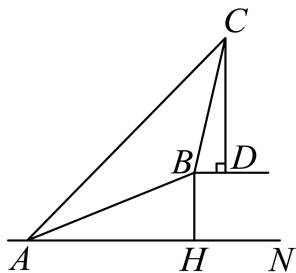
$$\therefore \frac{AH}{9} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AH = 3,$$

$$\therefore AB = 3AH = 9, DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 的面积} = AB \cdot DH = 9 \times 6\sqrt{2} = 54\sqrt{2}.$$

22. 如图, 小山的顶部是一块平地, 在这块平地上有一座古塔 CD . 小山斜坡 AB 的坡度为 $i = 1:2.4$, 坡长 AB 为 39 米, 在小山的坡底 A 处测得该塔的塔顶 C 的仰角为 45° , 在坡顶 B 处测得该塔的塔顶 C 的仰角为 74° .



(1) 求坡顶 B 到地面 AH 的距离 BH 的长;

(2) 求古塔 CD 的高度 (结果精确到 1 米).

(参考数据: $\sin 74^\circ \approx 0.96$, $\cos 74^\circ \approx 0.28$, $\tan 74^\circ \approx 3.49$, $\cot 74^\circ \approx 0.29$)

【答案】 (1) 15 米 (2) 古塔 CD 的高度约为 30 米.

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形的应用.

(1) 根据坡度得到 $\frac{BH}{AH} = \frac{5}{12}$, 设 $BH = 5x$, 则 $AH = 12x$, 勾股定理求出 x 的值即可;

(2) 延长 CD 交 AN 于点 G , 得到 $CG \perp AN$, 四边形 $BHGD$ 为矩形, 在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, 得到 $BD = \frac{CD}{\tan \angle CBD} = HG$, 列出算式, 求解即可.

解题的关键是构造直角三角形, 掌握锐角三角函数的定义.

【小问 1 详解】

由题意, 得 $\angle AHB = 90^\circ$, $i = BH : AH = 1 : 2.4$

$$\therefore \frac{BH}{AH} = \frac{5}{12},$$

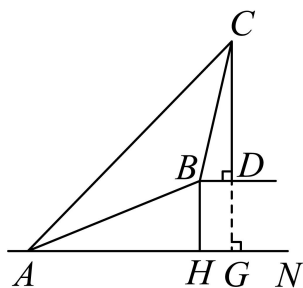


图 8

设 $BH = 5x$, 则 $AH = 12x$

$$\therefore AH^2 + BH^2 = AB^2$$

$$\therefore AB = 13x$$

$$\because AB = 39$$

$$\therefore x = 3$$

$$\therefore BH = 5x = 15 \text{ (米)}$$

答：坡顶 B 到地面 AH 的距离 BH 的长为 15 米

【小问 2 详解】

延长 CD 交 AN 于点 G ，则 $CG \perp AN$ ，四边形 $BHGD$ 为矩形.

$$\therefore BD = HG, \quad BH = DG = 15,$$

$$\because \angle CAG = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACG = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAG = \angle ACG,$$

$$\therefore CG = AG,$$

$$\therefore AH + HG = CD + DG;$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDC \text{ 中, } \tan \angle CBD = \frac{CD}{BD},$$

$$\therefore BD = \frac{CD}{\tan \angle CBD} = HG,$$

$$\because \angle CBD = 74^\circ, \quad AH = 36,$$

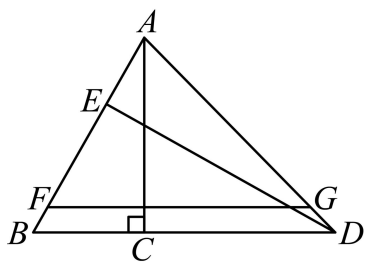
$$\therefore 36 + \frac{CD}{\tan 74^\circ} = CD + 15,$$

$$\because \tan 74^\circ \approx 3.49,$$

$$\therefore CD \approx 30 \text{ (米)}.$$

答：古搭 CD 的高度约为 30 米.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 是 BC 延长线上一点，点 E 是斜边 AB 上一点，且 $BC \cdot BD = BE \cdot BA$.



(1) 求证： $AB \perp ED$ ；

(2) 连接 AD ，在 AB 上取一点 F ，使 $AF = AC$ ，过点 F 作 $FG \parallel BC$ 交 AD 于点 G 。求证， $FG = DE$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

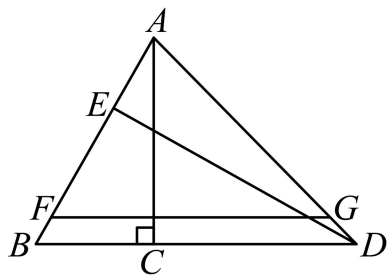
【分析】(1) 证明 $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ ，得到 $\angle DEB = 90^\circ$ ，即可；

(2) 由 $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ ，推出 $\frac{DE}{DB} = \frac{AC}{AB}$ ，证明 $\triangle AFG \sim \triangle ABD$ ，得到 $\frac{FG}{DB} = \frac{AF}{AB}$ ，推出 $\frac{DE}{DB} = \frac{FG}{DB}$ ，即可。

本题考查相似三角形的判定和性质，证明 $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ 是解题的关键。

【小问 1 详解】

证明： $\because BC \cdot BD = BE \cdot BA$ ，



$$\therefore \frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD},$$

$$\because \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBE,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DEB,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ,$$

$$\therefore AB \perp ED;$$

【小问 2 详解】

由 (1) 得 $\triangle ABC \sim \triangle DBE$

$$\therefore \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE} \quad \text{即} \quad \frac{DE}{DB} = \frac{AC}{AB},$$

$$\because FG \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AFG \sim \triangle ABD,$$

$$\therefore \frac{FG}{DB} = \frac{AF}{AB},$$

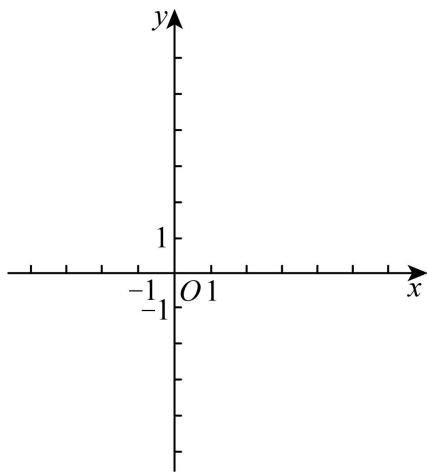
$$\because AF = AC,$$

$$\therefore \frac{DE}{DB} = \frac{FG}{DB},$$

$$\therefore FG = DE.$$

24. 定义：对于抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a 、 b 、 c 是常数， $a \neq 0$)，若 $b^2 = ac$ ，则称该抛物线是黄金抛

物线，已知平面直角坐标系 xOy ，抛物线 $y = x^2 - 2x + k$ 是黄金抛物线，与 y 轴交于点 A ，顶点为 D 。



(1) 求此黄金抛物线的表达式及 D 点坐标;

(2) 点 $B(2, b)$ 在这个黄金抛物线上.

①点 $C\left(c, -\frac{1}{2}\right)$ 在这个黄金抛物线的对称轴上, 求 $\angle OBC$ 的正弦值.

②在射线 AB 上是否存在点 P , 使以点 P 、 A 、 D 所组成的三角形与 $\triangle AOD$ 相似, 且相似比不为 1. 若存在, 请求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x + 4$, $(1, 3)$

(2) ① $\frac{\sqrt{17}}{17}$, ②存在, $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$

【解析】

【分析】 (1) 根据黄金抛物线的定义, 列出方程求出 k 值, 进而求出顶点 D 的坐标即可;

(2) ①将点 $B(2, b)$ 代入解析式, 求出 b 的值, 求出对称轴, 得到 c 的值, 进而求出 OB, OC, BC 的长, 勾股定理逆定理, 得到 $\angle BOC = 90^\circ$, 利用正弦的定义, 求解即可;

②分 $\triangle AOD \sim \triangle ADP$ 和 $\triangle AOD \sim \triangle APD$, 两种情况进行讨论求解即可.

本题考查二次函数的综合应用, 相似三角形的判定和性质. 利用数形结合, 分类讨论的思想, 进行求解, 是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = x^2 - 2x + k$ 是黄金抛物线,

$$\therefore (-2)^2 = 1 \times k$$

$$\therefore k = 4,$$

$$\therefore \text{所求抛物线的表达式为 } y = x^2 - 2x + 4,$$

配方得: $y = (x-1)^2 + 3$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1, 3)$;

【小问 2 详解】

①由 (1) 得: 抛物线 $y = x^2 - 2x + 4$ 的对称轴是直线 $x = 1$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$,

$\because$ 点 $B(2, b)$ 在这个黄金抛物线 $y = x^2 - 2x + 4$ 上,

$\therefore 4 - 4 + 4 = b$,

$\therefore b = 4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(2, 4)$,

$$\therefore OC = \sqrt{(1-0)^2 + \left(-\frac{1}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$OB = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$BC = \sqrt{(1-2)^2 + \left(-\frac{1}{2}-4\right)^2} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2},$$

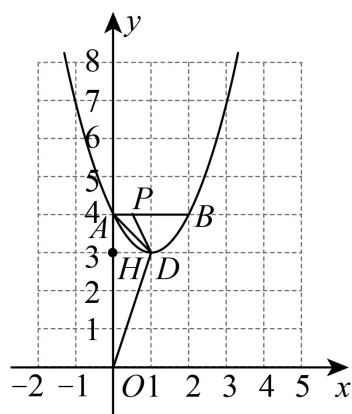
$$\therefore OC^2 + OB^2 = BC^2,$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \sin \angle OBC = \frac{OC}{BC} = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

②存在

过点 D 作 $DH \perp OA$, 垂足为 H



$\because$ 抛物线 $y = x^2 - 2x + 4$ 与 y 轴交于点 A ,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(0, 4)$,

$\because$ 点 B 的坐标为 $(2, 4)$,

$\therefore AB \perp OA$,

$\therefore \angle BAO = 90^\circ$,

$\because$ 点 D 的坐标为 $(1, 3)$,

$\therefore AH = HD = 1$,

$\therefore \angle OAD = 45^\circ$,

$\therefore \angle DAP = 45^\circ$,

$\therefore \angle OAD = \angle DAP$,

要使以点 P 、 A 、 D 所组成的三角形与 $\triangle AOD$ 相似, 有两种情况

第一种: $\angle ADO = \angle ADP$,

又 $AD = AD$, $\angle ODA = \angle DAP$,

$\therefore \triangle AOD$ 与 $\triangle APD$ 全等, 相似比为 1, 不合题意, 舍去;

第二种: $\angle ADO = \angle APD$,

$\therefore \angle OAD = \angle DAP$,

$\therefore \triangle ODA \sim \triangle DPA$,

$$\therefore \frac{AD}{AP} = \frac{AO}{AD},$$

$$\therefore AD^2 = AP \cdot AO,$$

$$\because AD = \sqrt{2}, \quad AO = 4,$$

$$\therefore AP = \frac{1}{2},$$

$\because$ 点 P 在射线 AB 上,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

25. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 中, $\angle ACB = \angle CAD = 90^\circ$, $BC = 16$, $CD = 15$, $DA = 9$.

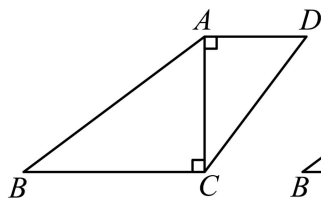


图1

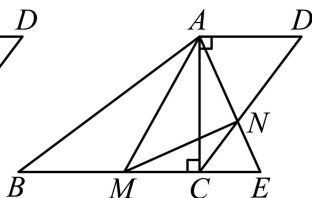
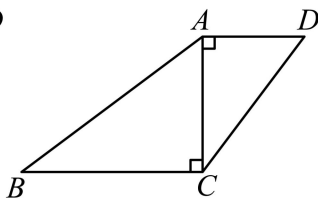


图2



备用图

(1) 求证: $\angle B = \angle ACD$;

(2) 已知点 M 在边 BC 上一点 (与点 B 不重合), 且 $\angle MAN = \angle BAC$, AN 交 CD 于点 N , 交 BC 的延长线于点 E .

①如图 2, 设 $BM = x$, $CE = y$, 求 y 与 x 的函数关系式, 并写出定义域;

②当 $\triangle CEN$ 是等腰三角形时, 求 BM 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) ① $y = \frac{9x}{25-x}$, 定义域: $0 < x \leq 16$; ② 10 或 7 或 12.5.

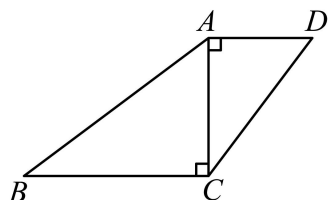
【解析】

【分析】(1) 由勾股定理得 $AC = 12$, 再证 $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DA}$, 然后证 $\triangle ABC \sim \triangle DCA$, 即可得出结论;

(2) ①证 $\triangle ABM \sim \triangle ACN$, 得 $CN = \frac{3}{5}BM = \frac{3}{5}x$, 则 $DN = CD - CN = 15 - \frac{3}{5}x$, 然后证 $\triangle CEN \sim \triangle DAN$, 得 $\frac{CE}{DA} = \frac{CN}{DN}$, 即可得出结论; ②当 $\triangle CEN$ 是等腰三角形时, $\triangle DAN$ 也是等腰三角形, 分三种情况, 当 $CN = CE$ 时; 当 $EC = EN$ 时; 当 $NE = NC$ 时, 分别求出 CN 的长, 即可解决问题.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ACB = \angle CAD = 90^\circ$



$\therefore \triangle ACB$ 与 $\triangle CAD$ 都是直角三角形

在 $\text{Rt}\triangle CAD$ 中, $AC^2 + DA^2 = CD^2$

$\because CD = 15$, $DA = 9$,

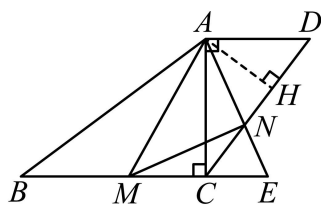
$\therefore AC = 12$,

$\therefore \tan \angle ACD = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{4}$,

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $BC = 16$,

$\therefore \tan \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$,

$\therefore \tan \angle B = \tan \angle ACD$,



$$\cos D = \frac{AD}{CD} = \frac{DH}{AD},$$

$$\therefore DH = \frac{27}{5}, \quad DN = \frac{54}{5}, \quad \text{则 } \frac{3}{5}x + \frac{54}{5} = 15, \quad \text{解得: } x = 7,$$

第三种：当 $NE = NC$ 时，

$$\therefore \angle NCE = \angle NEC,$$

$$\because \angle ACE = 90^\circ, \quad \angle CAE + \angle AEC = 90^\circ, \quad \angle ACN + \angle NCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAN = \angle ACN,$$

$$\therefore NC = NE = NA,$$

$\because \triangle ACD$ 是直角三角形，

同理可得 $NC = ND$ ，

$$\therefore NC = NE = NA = ND,$$

所以 $2NC = CD$ ，即 $2 \times \frac{3}{5}x = 15$ ，

则解得， $x = 12.5$ ，

综上所述：当 $\triangle CEN$ 是等腰三角形时，

名师教学 - 务实课程 - 注重教辅



电子版资料 小学 初中 高中

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：



扫描二维码逛本店

ONLINE EDUCATION

为您的课程，我们一直在努力

最新资料请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com

BM 的长为 10 或 7 或 12.5.

【点睛】本题是三角形综合题，考查了相似三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、勾股定理、平行线的判定与性质、三角形面积以及分类讨论等知识，本题综合性强，熟练掌握勾股定理和等腰三角形的性质，证明三角形相似是解题的关键，属于中考常考题型.