

2022 年上海市黄浦区九年级二模数学试题

一、选择题

1. 下列根式中，与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{8}$ D. $\sqrt{12}$

【答案】C

【解析】

【分析】同类二次根式的概念：几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫做同类二次根式，据此判断即可.

【详解】解： $\because \sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ， $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 $\sqrt{8}$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查同类二次根式的概念，理解概念，注意是先要化成最简二次根式后再判断是解答的关键.

2. 下列运算中，计算结果正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $a^2 + a^3 = a^5$ C. $a^2 \div a^3 = a$ D. $(a^2)^3 = a^6$

【答案】D

【解析】

【分析】运用同底数幂相乘运算法则计算并判定 A；运用合并同类项运算法则计算并判定 B；运用同底数幂相除运算法则计算并判定 C；运用幂的乘方运算法则计算并判定 D.

【详解】解：A、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故此选项不符合题意；

B、 $a^2 + a^3$ 不是同类项不能合并，故此选项不符合题意；

C、 $a^2 \div a^3 = a^{-1} = \frac{1}{a}$ ，故此选项不符合题意；

D、 $(a^2)^3 = a^6$ ，故此选项符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查同底数幂相乘，同底数幂相除，合并同类项，幂的乘方，熟练掌握同底数幂相乘、同底数幂相除、合并同类项、幂的乘方的运算法则是解题的关键.

3. 我们经常将调查、收集得来的数据用各类统计图进行整理与表示. 下列统计图中，能直观反映数据变化趋势的是 ()

A. 条形图

B. 扇形图

C. 折线图

D. 频数分布直方图

【答案】C

【解析】

【分析】根据统计图的特点判定即可.

【详解】统计图中, 能直观反映数据变化趋势的是折线图,

故选: C.

【点睛】本题考查了统计图, 熟练掌握各统计图的特点是解题的关键.

4. 下列函数中, 当 $x > 0$ 时, y 值随 x 值增大而减小的是 ()

A. $y = \frac{2}{3}x$

B. $y = -x + 1$

C. $y = -\frac{2}{x}$

D. $y = x^2 + 1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据在一次函数 $y=kx+b$ 中, k 大于 0 时, y 随 x 增大而增大, k 小于 0 时, y 随 x 增大而减小; 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 中, k 大于 0 时, 函数图像在第一象限, y 随 x 增大而减小, k 小于 0 时, 函数图像在第三象限, y 随 x 增大而增大; 在二次函数 $y=ax^2+h$ 中, a 大于 0 时, 在对称轴左侧, y 随 x 增大而减小, 在对称轴右侧, y 随 x 增大而增大, 对每个选项进行判断.

【详解】A. $y = \frac{2}{3}x$, x 系数为 $\frac{2}{3}$ 大于 0, y 随 x 增大而增大, 与题意不符, 错误;

B. $y = -x + 1$, x 系数为 -1 小于 0, y 随 x 增大而减小, 与题意相符, 正确;

C. $y = -\frac{2}{x}$, 因为 $-2 < 0$, $x > 0$, 函数图像在第三象限, y 随 x 增大而增大, 与题意不符, 错误;

D. $y = x^2 + 1$, x^2 系数为 1 大于 0, 对称轴为 x 轴, 当 $x > 0$ 时, 函数图像在对称轴右侧, y 随 x 增大而增大, 与题意不符, 错误;

故选 B.

【点睛】本题考查了函数的图像及性质, 熟练掌握各种函数的图像及性质是解题关键.

5. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 根的情况是 ()

A. 有两个相等的实数根

B. 没有实数根

C. 有两个不相等的实数根

D. 根的情况无法确定

【答案】C

【解析】

【分析】根据根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 大于 0 时有两个不相等的实数根, 等于 0 时有两个相等的实数根, 小

于 0 时没有实数根进行判断.

【详解】因为 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 5 > 0$,

所以方程有两个不相等的实数根,

故选 C.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式, 解题的关键是熟练掌握根的判别式在不同的值时对应方程的根的情况.

6. 下列命题中, 真命题是 ()

A. 正六边形是轴对称图形但不是中心对称图形

B. 正六边形的每一个外角都等于中心角

C. 正六边形每条对角线都相等

D. 正六边形的边心距等于边长的一半

【答案】B

【解析】

【分析】根据正六边形的性质判定即可.

【详解】解: A、正六边形是轴对称图形但不是中心对称图形, 假命题, 故此选项不符合题意;

B、正六边形的每一个外角都等于中心角, 真命题, 故此选项符合题意;

C、正六边形每条对角线都相等, 假命题, 故此选项不符合题意;

D、正六边形的边心距等于边长的一半, 假命题, 故此选项不符合题意;

故选: B.

【点睛】本题考查判定命题真假, 熟练掌握正多边形的性质是解题的关键.

二、填空题

7. 5 的倒数是_____.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】试题分析: 因为数 a ($a \neq 0$) 的倒数是 $\frac{1}{a}$, 所以 5 的倒数是 $\frac{1}{5}$

考点: 倒数

【详解】

8. 如果分式 $\frac{2x}{x+3}$ 有意义, 那么 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq -3$

【解析】

【详解】试题分析：分式有意义的条件是分母不为零，故 $x+3 \neq 0$ ，解得 $x \neq -3$ 。

考点：分式有意义的条件。

9. 方程 $\sqrt{x+2}=1$ 的解是_____。

【答案】 $x=-1$

【解析】

【分析】将方程两边平方转化成整式方程求解，再检验即可得出原方程的解。

【详解】解：两边平方得： $x+2=1$ ，

$\therefore x=-1$ ，

经检验： $x=-1$ 是原方程的根，

$\therefore$ 原方程的解为： $x=-1$ ，

故答案为： $x=-1$ 。

【点睛】本题考查解无理方程，解无理方程的基本思想是将它转化成有理方程求解，注意要验根。

10. 不等式组 $\begin{cases} x+1>0 \\ x-4<2 \end{cases}$ 的解集是_____。

【答案】 $-1<x<6$

【解析】

【分析】先分别求出不等式组中每个不等式解集，再确定出公共解集即可。

【详解】解： $\begin{cases} x+1>0 \text{ ①} \\ x-4<2 \text{ ②} \end{cases}$ ，

解①得： $x>-1$ ，

解②得： $x<6$ ，

$\therefore -1<x<6$ 。

故答案为： $-1<x<6$ 。

【点睛】本题考查解不等式组，掌握确定不等式组解集的原则“大大较大，小小取较小，大小小大中间找，大大小小无处找”是解题的关键。

11. 将抛物线 $y=x^2+x+1$ 向下平移 1 个单位，所得新的抛物线的表达式是_____。

【答案】 $y=x^2+x$

【解析】

【分析】根据向下平移，纵坐标相减，即可得到答案。

【详解】解：∵抛物线 $y=x^2+x+1$ 向下平移 1 个单位，

∴抛物线的解析式为 $y=x^2+x+1-1$ ，即 $y=x^2+x$ 。

故答案为： $y=x^2+x$ 。

【点睛】本题考查了二次函数的图象与几何变换，向下平移 $|a|$ 个单位长度纵坐标要减 $|a|$ 。

12. 一副 52 张的扑克牌（无大王、小王），从中任意抽出一张，抽到红桃 K 的概率是_____。

【答案】 $\frac{1}{52}$

【解析】

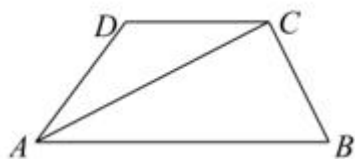
【分析】根据概率公式即可求解。

【详解】解：一副 52 张的扑克牌（无大王、小王），从中任意抽出一张，抽到红桃 K 的概率是 $\frac{1}{52}$ 。

故答案为： $\frac{1}{52}$ 。

【点睛】本题考查了根据概率公式求概率，掌握概率公式是解题的关键。概率 = 所求情况数与总情况数之比。

13. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2CD$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ，请用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC} =$ ()



【答案】 $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】先求出 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{b}$ ，再根据 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$ 求解即可。

【详解】解：∵ $AB = 2CD$ ，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB,$$

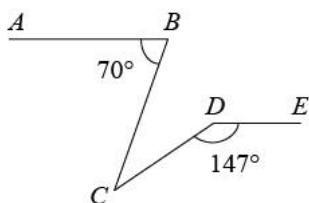
$$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

故答案为： $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ 。

【点睛】本题考查向量的线性运算，熟练掌握向量和的线性运算是解题的关键。

14. 如图，已知 $AB \parallel DE$ ，如果 $\angle ABC = 70^\circ$ ， $\angle CDE = 147^\circ$ ，那么 $\angle BCD =$ _____°。

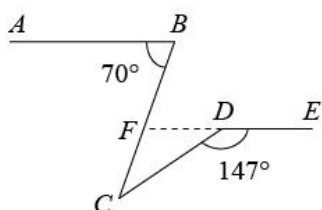


【答案】 37

【解析】

【分析】延长 ED 交 BC 于点 F ，根据两直线平行内错角相等证明 $\angle B = \angle BFD$ ，通过邻补角性质求出 $\angle CDF$ ，再利用三角形外角的性质即可求出 $\angle BCD$ 。

【详解】延长 ED ，交 BC 于点 F ，如图，



$\because AB \parallel DE$,

$\therefore \angle BFD = \angle B = 70^\circ$,

$\because \angle CDE$ 与 $\angle CDF$ 互为邻补角，

$\therefore \angle CDF = 180^\circ - \angle CDE = 180^\circ - 147^\circ = 33^\circ$,

$\because \angle BFD = \angle BCD + \angle CDF$,

$\therefore \angle BCD = \angle BFD - \angle CDF = 70^\circ - 33^\circ = 37^\circ$,

故答案为：37.

【点睛】本题考查了平行线的性质、邻补角、三角形外角等知识，熟练掌握相关概念灵活运用是解题关键.

15. 一辆汽车，新车购买价 20 万元，第一年使用后折旧 20%，以后该车的年折旧率有所变化，但它在第二、三年的年折旧率相同. 已知在第三年年末，这辆车折旧后价值 11.56 万元，如果设这辆车第二、三年的年折旧率为 x ，那么根据题意，列出的方程为_____.

【答案】 $20(1 - 20\%)(1 - x)^2 = 11.56$.

【解析】

【分析】设这辆车第二、三年的年折旧率为 x ，则第二年这车后的价格为 $20(1 - 20\%)(1 - x)$ 元，第三年折旧后的而价格为 $20(1 - 20\%)(1 - x)^2$ 元，与第三年折旧后的价格为 11.56 万元建立方程.

【详解】设这辆车第二、三年的年折旧率为 x ，有题意，得

$20(1 - 20\%)(1 - x)^2 = 11.56$.

故答案是： $20(1 - 20\%)(1 - x)^2 = 11.56$.

【点睛】一道折旧率问题，考查了列一元二次方程解实际问题的运用，解答本题时设出折旧率，表示出第三年的折旧后价格并运用价格为 11.56 万元建立方程是关键.

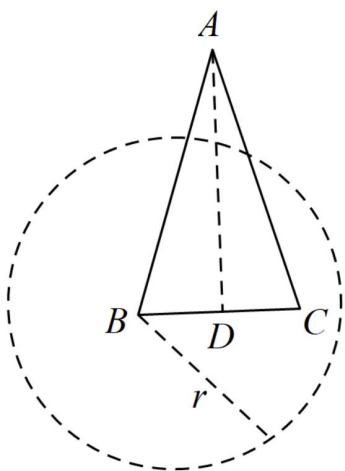
16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $BC=10$, $\cot B = \frac{5}{12}$, 如果顶点 C 在 $\odot B$ 内, 顶点 A 在 $\odot B$ 外, 那么 $\odot B$ 的半径 r 的取值范围是_____.

【答案】 $10 < r < 13$

【解析】

【分析】过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D , 则 $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$, 解 $Rt\triangle ABD$, 求出 AD 长, 从而求出 AB 长, 再根据点与圆的位置关系求解即可.

【详解】解: 如图, 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ,



$$\because AB=AC, AD \perp BC,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 10 = 5, \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \cot B = \frac{BD}{AD} = \frac{5}{12}, \text{ 即 } \frac{5}{AD} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore AD = 12,$$

$$\text{由勾股定理, 得 } AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13,$$

$$\because \text{顶点 } C \text{ 在 } \odot B \text{ 内, 顶点 } A \text{ 在 } \odot B \text{ 外,}$$

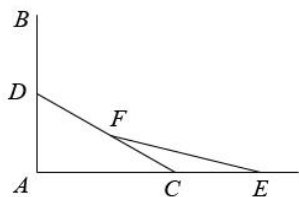
$$\therefore 10 < r < 13.$$

故答案为: $10 < r < 13$.

【点睛】本题考查等腰三角形的性质, 解直角三角形, 点与圆的位置关系, 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D , 构造直角三角形是解题的关键.

17. 如图, 已知三根长度相等的木棍, 现将木棍 AB 垂直立于水平的地面上, 把木棍 CD 斜钉在木棍 AB 上,

点 D 是木棍 AB 的中点，再把木棍 EF 斜钉在木棍 CD 上，点 F 是木棍 CD 的中点，如果 A 、 C 、 E 在一条直线上，那么 $\frac{AC}{AE}$ 的值为_____.



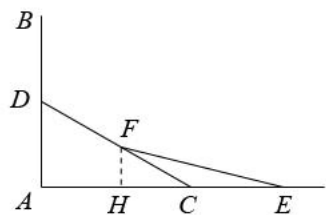
【答案】 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

【分析】如图，过 F 作 $FH \perp AC$ 于 H ，设 $AD = BD = x$ ，则

$AB = CD = EF = 2x$, $AD = BD = DF = CF = x$, 再证明 $\angle ACD = 30^\circ$ ，再利用含 30° 的直角三角形的性质与勾股定理求解 AC ， AE ，从而可得答案.

【详解】解：如图，过 F 作 $FH \perp AC$ 于 H ，



由题意可得： $AB = CD = EF$, $AD = BD$, $DF = CF$,

设 $AD = BD = x$,

则 $AB = CD = EF = 2x$, $AD = BD = DF = CF = x$,

$\because AB \perp AE$,

$$\therefore \sin \angle ACD = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle ACD = 30^\circ,$$

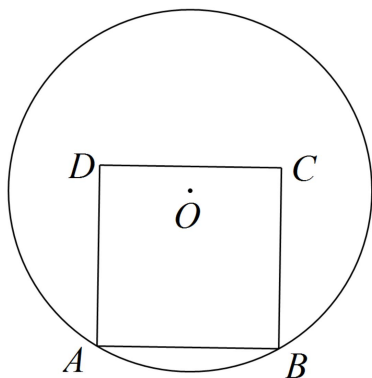
$$\therefore AE = AC + CE = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{15}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{15}}{2}x,$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{AC}{AE} &= \frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{15}}{2}x} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{15}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}, \\ &= \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

【点睛】本题考查的是锐角三角函数的应用，含 30° 的直角三角形的性质，勾股定理的应用，二次根式的除法运算，求解 $\angle ACD = 30^\circ$ 是解本题的关键.

18. 如图，已知边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 、 B 在半径与这个正方形边长相等的圆 O 上，顶点 C 、 D 在该圆内. 如果将正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转，当点 D 第一次落在圆上时，点 C 与点 C' 为对应点，那么 $\triangle ACC'$ 的面积 = _____.



【答案】 $\frac{1}{2}$

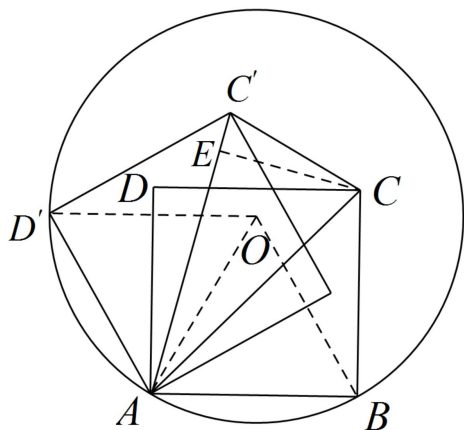
【解析】

【分析】设当点 D 第一次落在圆上时的点为 D' ，连接 OD' ， OA ， OB ，过点 C 作 $CE \perp AC'$ 于 E ，证 $\triangle OAB$ 是等边三角形，得 $\angle OAB = 60^\circ$ ，从而得 $\angle OAD = 30^\circ$ ，同理 $\angle OAD' = 60^\circ$ ，即可求得 $\angle DAD' = \angle OAD' - \angle OAD = 30^\circ$ ，

再由旋转可得： $\angle CAC' = \angle DAD' = 30^\circ$ ， $AC' = AC = \sqrt{2}$ ，所以 $CE = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，然后由 $S_{\triangle ACC'} = \frac{1}{2}AC' \cdot CE$

求解即可.

【详解】解：如图，设当点 D 第一次落在圆上时的点为 D' ，连接 OD' ， OA ， OB ，过点 C 作 $CE \perp AC'$ 于 E ，



$\because$ 正方形 $ABCD$, $AB=1$,

$\therefore \angle BAE=90^\circ$, $AC=\sqrt{2}$,

$\because OA=OB=AB=1$,

$\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形,

$\therefore \angle OAB=60^\circ$,

$\therefore \angle OAD=30^\circ$,

同理 $\angle OAD'=60^\circ$,

$\therefore \angle DAD'=\angle OAD'-\angle OAD=30^\circ$,

由旋转可得: $\angle CAC'=\angle DAD'=30^\circ$, $AC'=AC=\sqrt{2}$,

$\because CE \perp AC'$ 于 E ,

$\therefore CE=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore S_{\triangle ACC'}=\frac{1}{2}AC' \cdot CE=\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$,

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点睛】 本题考查正方形的性质, 旋转的性质, 等边三角形的判定与性质, 直角三角形的性质, 本题属中考常考题目, 难度不适中.

三、解答题

19. 计算: $|\sqrt{3}-2|+2022^0-(-\frac{1}{2})^{-1}+2\cos 30^\circ$.

【答案】 5

【解析】

【分析】 先化简绝对值, 计算零指数幂和负整数指数幂, 并把特殊角三角函数值代入, 最后计算加减即可.

【详解】解：原式 $= 2 - \sqrt{3} + 1 + 2 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= 2 - \sqrt{3} + 1 + 2 + \sqrt{3}$$

$$= 5.$$

【点睛】本题考查实数的混合运算，熟练掌握零指数幂与负整数指数幂运算法则和熟记特殊角的三角函数值是解题的关键.

20. 解方程: $\frac{4x}{x^2-9} = 1 + \frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+3}.$

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】因式分解 $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ ，确定最简公分母，化分式方程为整式方程求解

【详解】解：方程两边同乘以 $(x+3)(x-3)$ 得：

$$4x = x^2 - 9 + 2(x+3) - 2(x-3),$$

$$\text{整理得: } x^2 - 4x + 3 = 0,$$

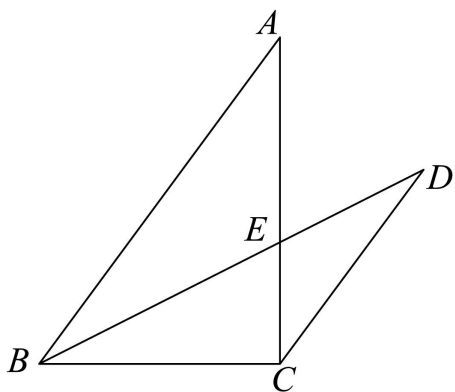
$$\text{解得: } x_1 = 1, \quad x_2 = 3,$$

经检验: $x_2 = 3$ 是原方程的增根,

所以, 原方程的解为 $x = 1$.

【点睛】本题考查了分式方程的解法, 通过因式分解确定最简公分母, 化成整式方程求解是解题的关键, 注意验根是防止出错的根本.

21. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, $BC = CD$, BD 、 AC 交于点 E .



(1) 求证: $AB \parallel CD$;

(2) 已知 $BC = 6$, $AB = 10$, 求 $\tan \angle EBC$ 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 由角平分线定义得, $\angle ABE = \angle CBE$. 再由等腰三角形性质得 $\angle CBE = \angle D$. 从而得出 $\angle ABE = \angle D$, 即可由平行线的判定定理得出结论;

(2) 先由勾股定理求出 $AC = 8$, 再证 $\triangle CDE \sim \triangle ABE$, 得 $\frac{CE}{AE} = \frac{CD}{AB}$, 代入即可求得 $CE = 3$, 然后由 $\tan \angle EBC = \frac{EC}{BC}$ 求解即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE.$$

$$\because BC = CD,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle D.$$

$$\therefore \angle ABE = \angle D,$$

$$\therefore AB \parallel CD.$$

【小问 2 详解】

解: $\because \angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

$$\because BC = 6, AB = 10,$$

$$\therefore AC = 8.$$

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{CD}{AB}.$$

$$\because BC = CD,$$

$$\therefore CD = 6,$$

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{3}{5}.$$

$$\because AC = 8,$$

$$\therefore CE = 3.$$

$\therefore$ 在 $Rt \triangle BCE$ 中,

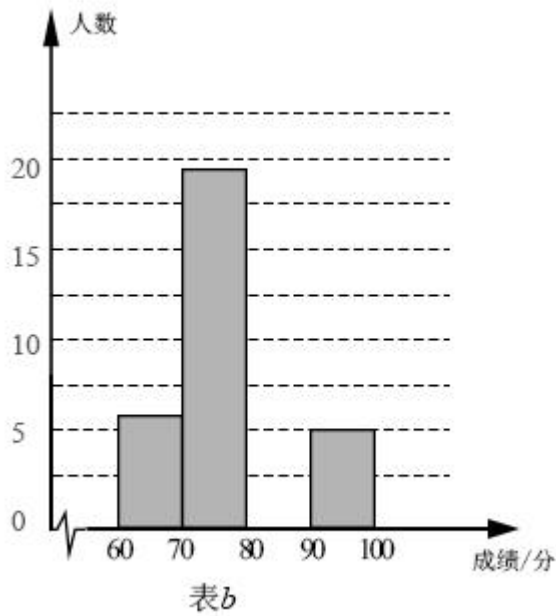
$$\tan \angle EBC = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{2}.$$

【点睛】 本题考查勾股定理，解直角三角形，相似三角形的判定和性质，熟练掌握解直角三角形和相似三角形的判定和性质是解题的关键.

22. 某校举办了首届“英语原创演讲比赛”，经选拔后有若干名学生参加决赛，根据测试成绩（成绩都不低于 60 分）绘制出如下两幅不完整的统计图表，请根据统计图表提供的信息完成下列各题.

表 a:

分数段	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
频数	6	19	m	5
频率	15%	n	25%	12. 5%



- (1) 参加决赛的学生有_____名，请将图 b 补充完整；
- (2) 表 a 中的 $m =$ _____， $n =$ _____；
- (3) 如果测试成绩不低于 80 分为优秀，那么本次测试的优秀率是_____.

【答案】 (1) 40，图见解析

(2) 10， 47.5%

(3) 37.5%

【解析】

【分析】 (1) 根据表 a 中 60-70 分段的频数除以频率即为参加决赛的学生总人数，再利用 80-90 分段的频率求出 m 的值，即可补充表 b；

(2) 在 (1) 问中已求出 m ，根据频率=频数/总数即可求出 n ;

(3) 先统计出 80 分以上人数之和，再除以总人数即可.

【小问 1 详解】

根据图 a 可知，分数 60-70 之间的人数有 6 人，频率为 15%，

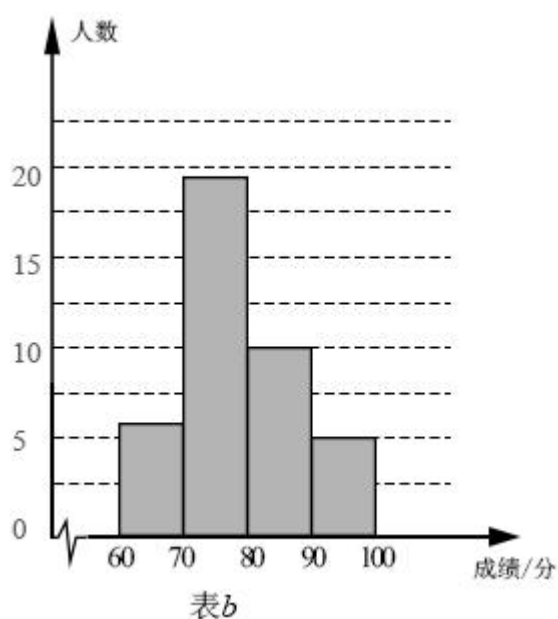
所以参加决赛的学生总数为 $6 \div 15\% = 40$ 人，

$\therefore$ 80-90 分段的频率为 25%，

$\therefore$ 80-90 分段的频数为 $40 \times 25\% = 10$ 人，

故答案为：40.

补充图 b 如下：



【小问 2 详解】

根据 (1) 问中已求出的 80-90 分段的频数 10 即为 m ,

从表 a 可知，70-80 分段人数为 19，

所以 $n = \frac{19}{40} \times 100\% = 47.5\%$ ，

故答案为：10；47.5%.

【小问 3 详解】

由表 a 可知，80 分以上人数有 $10+5=15$ 人，

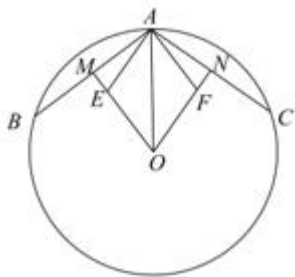
所以优秀率 $= \frac{15}{40} \times 100\% = 37.5\%$ ，

故答案为：37.5%.

【点睛】 本题考查直方图，熟练掌握频数、频率的算法及直方图的作法是解题的关键.

23. 如图，已知 A 、 B 、 C 是圆 O 上的三点， $AB=AC$ ， M 、 N 分别是 AB 、 AC 的中点， E 、 F 分别是 OM 、

ON上的点.



(1) 求证: $\angle AOM = \angle AON$;

(2) 如果 $AE \parallel ON$, $AF \parallel OM$, 求证: $OE \cdot OM = \frac{1}{2} AO^2$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据垂径定理的推论, 得出 $OM \perp AB$, $ON \perp AC$, 再证 $Rt\triangle AOM \cong Rt\triangle AON$ (HL), 即可得出结论;

(2) 连接 EF , 交 AO 于点 P . 先证四边形 $AEOF$ 是平行四边形, 再证四边形 $AEOF$ 是菱形, 根据菱形的性质得 $EF \perp AO$, $PO = \frac{1}{2} AO$. 然后证 $\triangle EPO \sim \triangle AMO$. 得 $\frac{OE}{AO} = \frac{OP}{OM}$, 代入即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because M, N$ 分别是 AB, AC 的中点, OM, ON 过圆心,

$\therefore OM \perp AB$, $ON \perp AC$.

又 $\because AB = AC$,

$\therefore AM = AN$.

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AOM$ 和 $Rt\triangle AON$ 中,

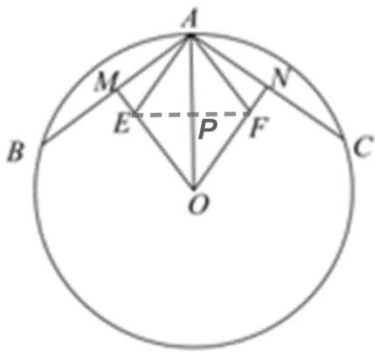
$$\begin{cases} AM = AN \\ OA = OA \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle AOM \cong Rt\triangle AON$ (HL),

$\therefore \angle AOM = \angle AON$.

【小问 2 详解】

解: 连接 EF , 交 AO 于点 P .



$$\because AE \parallel ON, AF \parallel OM,$$

$\therefore$ 四边形 $AEOF$ 是平行四边形.

$$\because AE \parallel ON,$$

$$\therefore \angle EAO = \angle AON,$$

$$\because \angle AOM = \angle AON,$$

$$\therefore \angle AOM = \angle EAO.$$

$$\therefore AE = EO,$$

$\therefore$ 四边形 $AEOF$ 是菱形.

$$\therefore EF \perp AO, PO = \frac{1}{2} AO.$$

$$\because OM \perp AB,$$

$$\therefore \angle EPO = \angle AMO = 90^\circ.$$

$$\because \angle AOM = \angle AOM,$$

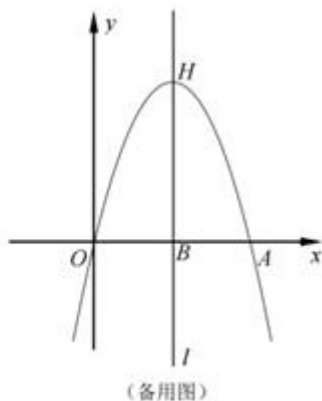
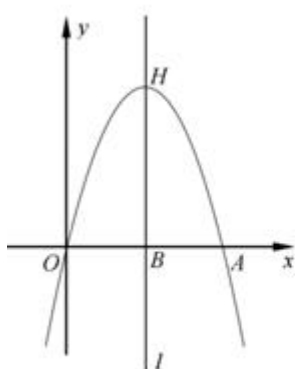
$$\therefore \triangle EPO \sim \triangle AMO.$$

$$\therefore \frac{OE}{AO} = \frac{OP}{OM},$$

$$\therefore OE \cdot OM = AO \cdot OP = \frac{1}{2} AO^2, \text{ 即 } OE \cdot OM = \frac{1}{2} AO^2.$$

【点睛】 本题考查垂径定理的推论，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，平行四边形的判定，菱形的判定与性质，证四边形 $AEOF$ 是菱形是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过点 $A (4, 0)$ ，顶点为 $H (2, 4)$ ，对称轴 l 与 x 轴交于点 B ，点 C 、 P 是抛物线上的点，且都在第一象限内.



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 当点 C 位于对称轴左侧, $\angle CHB = \angle CAO$, 求点 C 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 已知点 P 位于对称轴的右侧, 过点 P 作 $PQ \parallel CH$, 交对称轴 l 于点 Q , 且

$S_{\triangle POQ} : S_{\triangle PAQ} = 1:5$, 求直线 PQ 的表达式.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 4x$

(2) $C(1, 3)$

(3) $y = x - \frac{2}{3}$ 或 $y = x + 1$

【解析】

【分析】 (1) 根据题意将抛物线表达式设为顶点式, 将 A 、 H 坐标代入即可求出;

(2) 过点 C 向对称轴和 x 轴作垂线, 设 C 点坐标为 $(m, -m^2 + 4m)$, 根据角度相等, 所以正切值相等, 分别在两个直角三角形中构造线段等比例关系, 以 m 表示各线段长度, 代入等比例式中, 求出 m 即可;

(3) 分别作 OM 、 AN 垂直于 PQ , OM 、 AN 即为两个三角形的高, 因为底 PQ 相同, 所以两三角形面积比等于 OM 与 AN 的比, 延长 PQ 交 x 轴于点 D , 则 $OM \parallel AN$, 得到三角形相似, 继而得到 OM 与 AN 的比等于 OD 与 AD 的比, 从而求出 D 点坐标, 因为 $PQ \parallel CH$, 先求出 CH 表达式为 $y = x + 2$, 则可将 PQ 的表达式设为 $y = x + h$ 形式, 将 D 点坐标代入即可求出表达式.

【小问 1 详解】

$\because$ 抛物线经过点 $A(4, 0)$, 顶点为 $H(2, 4)$,

$\therefore$ 设 $y = a(x - 2)^2 + 4$,

$\therefore a(4 - 2)^2 + 4 = 0$,

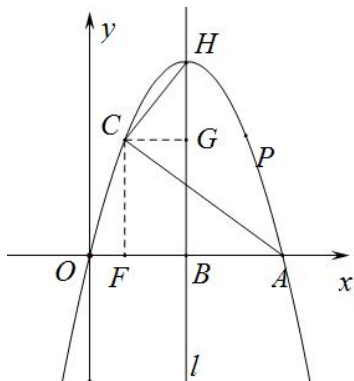
解得: $a = -1$,

$$\therefore y = -(x-2)^2 + 4 = -x^2 + 4x,$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 4x$.

【小问 2 详解】

分别过点 C 作 $CG \perp HB$, $CF \perp x$ 轴, 垂足为点 G 、 F ,



设 $C(m, -m^2 + 4m)$,

则: $CG = 2 - m$, $HG = 4 - (-m^2 + 4m) = m^2 - 4m + 4$, $CF = -m^2 + 4m$, $AF = 4 - m$,

$\therefore \angle CHB = \angle CAO$,

$\therefore \tan \angle CHB = \tan \angle CAO$,

$$\therefore \frac{CG}{HG} = \frac{CF}{AF}.$$

$$\therefore \frac{2-m}{m^2-4m+4} = \frac{-m^2+4m}{4-m},$$

解得 $m = 1$,

经检验, $m=1$ 是方程的解,

则 $-m^2 + 4m = 3$,

$\therefore C$ 点坐标为 $(1, 3)$.

【小问 3 详解】

延长 PQ 交 x 轴于点 D . 分别过点 O 、 A 作直线 PQ 的垂线, 垂足分别为点 M 、 N .

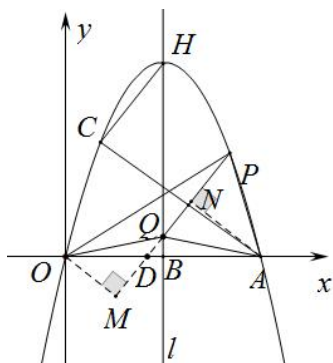
$\therefore$ 点 C 坐标为 $(1, 3)$, 点 H 坐标为 $(2, 4)$,

$\therefore$ 设直线 CH 的表达式为 $y = kx + b$, 将 C 、 H 坐标代入得 $\begin{cases} k + b = 3 \\ 2k + b = 4 \end{cases}$,

解得 $k = 1, b = 2$,

∴ 直线 CH 表达式为: $y = x + 2$,

① 当 $\triangle POQ$ 、 $\triangle PAQ$ 在直线 PQ 的两侧时,



$$\because S_{\triangle POQ} : S_{\triangle PAQ} = 1 : 5,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle POQ}}{S_{\triangle PAQ}} = \frac{\frac{1}{2}PQ \cdot OM}{\frac{1}{2}PQ \cdot AN} = \frac{OM}{AN} = \frac{1}{5}.$$

$$\because OM \perp PQ, AN \perp PQ,$$

$$\therefore OM \parallel AN,$$

$$\therefore \triangle ODM \sim \triangle ADN,$$

$$\therefore \frac{OM}{AN} = \frac{OD}{AD},$$

$$\therefore \frac{OM}{AN} = \frac{OD}{AD} = \frac{1}{5},$$

$$\because AO = 4,$$

$$\therefore OD = \frac{1}{6}AO = \frac{2}{3},$$

$$\therefore D \text{ 点坐标为 } \left(\frac{2}{3}, 0\right).$$

$$\text{又} \because PQ \parallel CH,$$

$$\therefore \text{设直线 } PQ \text{ 的表达式为 } y = x + h,$$

$$\text{将 } D \text{ 点坐标代入得 } 0 = \frac{2}{3} + h,$$

$$\text{解得 } h = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore PQ \text{ 表达式为 } y = x - \frac{2}{3};$$

②当 $\triangle POQ$ 、 $\triangle PAQ$ 在直线 PQ 的同侧时,

$$\because OM \parallel AN,$$

$$\therefore \triangle ODM \sim \triangle ADN,$$

$$\therefore \frac{OM}{AN} = \frac{OD}{AD}, \quad AD = AO + OD$$

$$\therefore \frac{OD}{AN} = \frac{OD}{4 + OD} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore OD = 1,$$

$$\therefore \text{此时 } D \text{ 点坐标为 } (-1, 0),$$

$$\therefore \text{设直线 } PQ \text{ 的表达式为 } y = x + h',$$

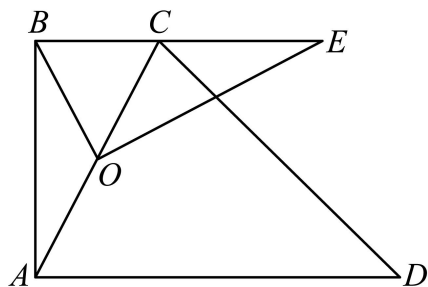
$$\text{将 } (-1, 0) \text{ 代入解得 } h' = 1,$$

$$\therefore \text{直线 } PQ \text{ 的表达式为 } y = x + 1$$

综上所述, 满足条件的直线 PQ 的表达式为 $y = x - \frac{2}{3}$ 或 $y = x + 1$.

【点睛】 本题考查了二次函数的动点问题, 需熟练掌握二次函数数形结合的综合应用.

25. 已知: 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC:AD = 1:3$, O 是 AC 的中点, 过点 O 作 $OE \perp OB$, 交 BC 的延长线于点 E .



(1) 当 $BC = EC$ 时, 求证: $AB = OE$;

(2) 设 $BC = a$, 用含 a 的代数式表示线段 BE 的长, 并写出 a 的取值范围;

(3) 联结 OD 、 DE , 当 $\triangle DOE$ 是以 DE 为直角边的直角三角形时, 求 BC 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $BE = \frac{a^2 + 36}{2a} (0 < a < 6)$

(3) BC 的长为 $2\sqrt{3}$ 或 $\frac{6}{5}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) $\triangle ABC \cong \triangle EOB$ 即可得出结论;

(2) 证 $\triangle ABC \sim \triangle EOB$, 得 $\frac{BC}{OB} = \frac{AC}{BE}$, 由勾股定理求出 $AC = \sqrt{a^2 + 36}$, 再代入比例式即可求解;

(3) 分两种情况: ①当 $\angle OED = 90^\circ$ 时, ②当 $\angle ODE = 90^\circ$ 时, 分别求解即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ABC = 90^\circ$, O 是 AC 的中点,

$$\therefore BO = CO, \quad \angle OBC = \angle OCB.$$

$$\because OE \perp OB,$$

$$\therefore \angle BOE = 90^\circ.$$

$$\because BC = EC,$$

$$\therefore CO = BC,$$

$$\therefore BO = BC.$$

$$\because \angle ABC = \angle BOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EOB,$$

$$\therefore AB = EO.$$

【小问 2 详解】

解: $\because \angle OBC = \angle OCB, \quad \angle ABC = \angle BOE,$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EOB.$$

$$\therefore \frac{BC}{OB} = \frac{AC}{BE}.$$

$$\because BC = a, \quad AB = 6,$$

$$\therefore AC = \sqrt{a^2 + 36},$$

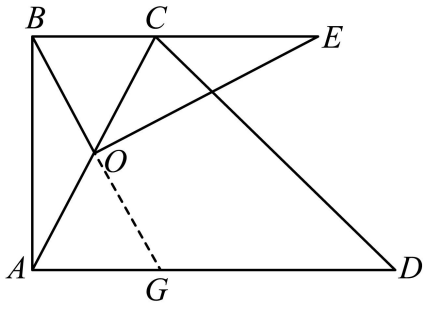
$$\therefore \frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 36}} = \frac{\sqrt{a^2 + 36}}{BE}.$$

$$\therefore BE = \frac{a^2 + 36}{2a} (0 < a < 6).$$

【小问 3 详解】

解: 设 $BC = a$, 则 $AD = 3a$.

①当 $\angle OED = 90^\circ$ 时, 延长 BO 交 AD 于点 G , 如图,



$$\because \angle BOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOE = \angle OED,$$

$$\therefore BG \parallel ED.$$

$$\because BE \parallel AD,$$

$\therefore$ 四边形 $BGDE$ 是平行四边形,

$$\therefore BE = GD.$$

$$\because BC \parallel AD,$$

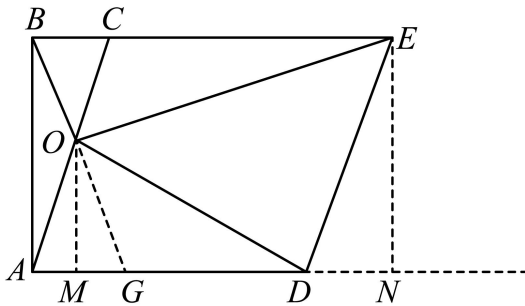
$$\therefore \frac{BC}{AG} = \frac{CO}{AO},$$

$$\therefore BC = AG = a.$$

$$\therefore \frac{a^2 + 36}{2a} = 3a - a,$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3} \text{ (负根舍)}.$$

②当 $\angle ODE = 90^\circ$ 时, 分别过点 O 、 E 作 $OM \perp AD$, $EN \perp AD$, 垂足分别为点 M 、 N , 延长 BO 交 AD 于点 G , 如图,



由 $\angle ABC = 90^\circ$ 及 $BC \parallel AD$ 知, 四边形 $ABEN$ 是矩形,

$$\therefore EN = AB = 6, \quad AN = BE.$$

$$\because BC \parallel AD,$$

$$\therefore \frac{BC}{AG} = \frac{CO}{AO} = \frac{OB}{OG},$$

$$\because OA=OC,$$

$$\therefore OB=OG=\frac{1}{2}BG, \quad AG=BC.$$

$$\therefore \angle OMD = \angle DNE, \quad \angle MOD = \angle EDN,$$

$$\therefore \triangle OMD \sim \triangle DNE,$$

$$\therefore \frac{OM}{DN} = \frac{MD}{EN}.$$

$$\because AB \parallel OM,$$

$$\therefore \frac{OM}{AB} = \frac{MG}{AG} = \frac{OG}{BG} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore MG = AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a, \quad OM = \frac{1}{2}AB = 3,$$

$$\therefore MD = \frac{5}{2}a,$$

$$\because DN = AN - AD = \frac{a^2 + 36}{2a} - 3a,$$

$$\therefore \frac{3}{\frac{a^2 + 36}{2a} - 3a} = \frac{\frac{5}{2}a}{6},$$

$$\therefore a = \frac{6}{5}\sqrt{3} \text{ 或 } -\frac{6}{5}\sqrt{3} \text{ (负根舍)}.$$

综上所述满足条件的 BC 的长为 $2\sqrt{3}$ 或 $\frac{6}{5}\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，直角三角形的性质，平行四边形的判定与性质，矩形的判定与性质，熟练掌握相关性质及运用是解题的关键.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能