

虹口区 2021 学年第二学期学生学习能力诊断测试

初三数学试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)

[下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.]

1. 3 的倒数是 ()

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据倒数的定义可知.

【详解】解：3 的倒数是 $\frac{1}{3}$,

故选：C

【点睛】主要考查倒数的定义，要求熟练掌握. 需要注意的是：

倒数的性质：负数的倒数还是负数，正数的倒数是正数，0 没有倒数.

倒数的定义：若两个数的乘积是 1，我们就称这两个数互为倒数.

2. 下列二次根式中，属于最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ B. $\sqrt{0.4}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{8}$

【答案】C

【解析】

【分析】先将各选项化简，再根据最简二次根式的概念进行判断即可.

【详解】A. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，不是最简二次根式，不符合题意；

B. $\sqrt{0.4} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ，不是最简二次根式，不符合题意；

C. $\sqrt{6}$ 是最简二次根式，符合题意；

D. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，不是最简二次根式，不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查了二次根式的化简和最简二次根式，即最简二次根式的被开方数不含分母且不含能开得

尽方的因数或因式，熟练掌握知识点是解题的关键.

3. 二次函数 $y = -(x-1)^2 + 3$ 图象的顶点坐标是 ()

- A. $(-1, 3)$ B. $(1, 3)$ C. $(-1, -3)$ D. $(1, -3)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次函数顶点式即可得出顶点坐标.

【详解】解: $\because$ 二次函数的解析为 $y = -(x-1)^2 + 3$,

$\therefore$ 二次函数图像顶点坐标为 $(1, 3)$.

故选 B.

【点睛】本题主要考查二次函数的性质，掌握二次函数的顶点式是解题的关键，即在 $y = a(x-h)^2 + k$ 中，对称轴为 $x=h$ ，顶点坐标为 (h, k) .

4. 甲、乙两人某次射击练习命中环数情况如下表，下列说法中正确的是 ()

甲	6	2	7	8	7
乙	3	2	8	8	7

- A. 平均数相同 B. 中位数相同 C. 众数相同 D. 方差相同

【答案】B

【解析】

【分析】利用平均数、中位数、众数、方差的定义分别计算，即可得出答案.

【详解】解: $\because$ 甲的平均数 $= \frac{6+2+7+8+7}{5} = 6$, 乙的平均数 $= \frac{3+2+8+8+7}{5} = 5.6$,

$\therefore$ 甲、乙的平均数不同,

故 A 不符合题意;

$\because$ 甲的命中环数按从小到大排列为 2, 6, 7, 7, 8,

$\therefore$ 甲的中位数是 7,

$\because$ 乙的命中环数按从小到大排列为 2, 3, 7, 8, 8,

$\therefore$ 乙的中位数是 7,

$\therefore$ 甲、乙的中位数相同,

故 B 符合题意;

∴甲的众数是 7，乙的众数是 8，

∴甲、乙的众数不同，

故 C 不符合题意；

$$\therefore \text{甲的方差} = \frac{1}{5} \left[(6-6)^2 + (2-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (7-6)^2 \right] = 4.4,$$

$$\text{乙的方差} = \frac{1}{5} \left[(3-5.6)^2 + (2-5.6)^2 + (8-5.6)^2 + (8-5.6)^2 + (7-5.6)^2 \right] = 6.64,$$

∴甲、乙的方差不同，

故 D 不符合题意；

故选 B.

【点睛】此题主要考查了平均数、中位数、众数、方差的定义，正确掌握相关定义是解题关键.

5. 下列命题中，假命题是 ()

A. 有一组邻边相等的平行四边形是菱形

B. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形

C. 对角线平分一组对角的平行四边形是菱形

D. 有一组对角相等的平行四边形是菱形

【答案】D

【解析】

【分析】根据菱形的判定方法，逐项判断即可.

【详解】解：A. 有一组邻边相等的平行四边形是菱形，故 A 是真命题，不符合题意；

B. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形，故 B 是真命题，不符合题意；

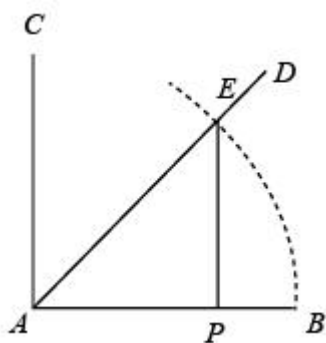
C. 对角线平分一组对角的平行四边形是菱形，故 C 是真命题，不符合题意；

D. 有一组对角相等的平行四边形仍是平行四边形，故 D 是假命题，符合题意.

故选 D.

【点睛】本题主要考查了菱形的判定方法，理解菱形的判定方法是解题关键.

6. 已知线段 AB ，按如下步骤作图：①作射线 AC ，使 $AC \perp AB$ ；②作 $\angle BAC$ 的平分线 AD ；③以点 A 为圆心， AB 长为半径作弧，交 AD 于点 E ；④过点 E 作 $EP \perp AB$ 于点 P ，则 $AP:AB = ()$



A. $1:\sqrt{5}$

B. $1:2$

C. $1:\sqrt{3}$

D. $1:\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意易得 $\angle BAD=45^\circ$ ， $AB=AE$ ，进而可得 $\triangle APE$ 是等腰直角三角形，然后根据等腰直角三角形的性质可求解.

【详解】解： $\because AC \perp AB$ ，

$$\therefore \angle CAB = 90^\circ,$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore \angle BAD = 45^\circ,$$

$\because EP \perp AB$ ，

$\therefore \triangle APE$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore AP = PE,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AP^2 + PE^2} = \sqrt{2}AP,$$

$$\because AB = AE,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}AP,$$

$$\therefore AP : AB = 1 : \sqrt{2};$$

故选 D.

【点睛】本题主要考查等腰直角三角形的性质与判定、勾股定理及角平分线的定义，熟练掌握等腰直角三角形的性质与判定、勾股定理及角平分线的定义是解题的关键.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

[请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. 计算： $a \cdot a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 a^3

【解析】

【详解】试题分析：根据同底数幂的乘法性质，底数不变，指数相加，可直接结算， $a \cdot a^2 = a^{1+2} = a^3$.

考点：同底数幂的乘法

8. 分解因式： $m^2 + 4m + 4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(m+2)^2$

【解析】

【分析】 直接利用完全平方公式分解因式得出答案.

【详解】 解: $m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2$,

故答案为 $(m+2)^2$.

【点睛】 此题主要考查了公式法分解因式, 正确应用完全平方公式是解题关键.

9. 方程 $\sqrt{2-x} = x$ 的解是_____

【答案】 $x=1$

【解析】

【分析】 左右两边同时乘方得到 $2-x = x^2$, 解一元二次方程并验根即可.

【详解】 $\sqrt{2-x} = x$,

$$2-x = x^2,$$

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$(x+2)(x-1) = 0,$$

解得: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$,

$$\because 2-x \geq 0,$$

$$\therefore x \leq 2,$$

$$\therefore x=1,$$

故答案为: $x=1$.

【点睛】 此题考查解无理方程, 需将方程两边同时平方, 把它化为有理方程求出方程的解, 注意验根.

10. 函数 $y = \sqrt{3-x}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \leq 3$

【解析】

【详解】 分析: 二次根式有意义, 被开方数为非负数, 即 $3-x \geq 0$, 解不等式即可.

解答: 解: 依题意, 得 $3-x \geq 0$,

解得 $x \leq 3$.

故答案为 $x \leq 3$.

11. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 k 的值是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个相等的实数根, 即 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 代入即可求 k 值.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4k = 0,$$

解得 $k = 1$,

故答案为: 1

【点睛】 此题主要考查一元二次方程的根的判别式, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: ①当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; ②当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; ③当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根. 上述结论反过来也成立.

12. 已知点 $A(x_1, y_1)$ 、点 $B(x_2, y_2)$ 在双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上, 如果 $0 < x_1 < x_2$, 那么 y_1 _____ y_2 .

【答案】 >

【解析】

【分析】 反比例函数 $y = \frac{3}{x}$, 根据在同一个象限内, y 随 x 的增大而增减小即可得答案.

【详解】 解: $\because k = 3 > 0$,

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象在一、三象限, 且在同一个象限内, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象上, 且 $0 < x_1 < x_2$,

$$\therefore y_1 > y_2,$$

故答案为: >.

【点睛】 本题考查反比例函数的增减性, 掌握 $k > 0$ 时, 在同一个象限内, y 随 x 的增大而减小是解题的关键.

13. 如果从 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 这 10 个数中任取一个数, 那么取到的数恰好是素数的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】 根据从 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 这 10 个数中任意选取一个数, 得出的数是素数的结果有 3 种, 再根据概率公式即可得出答案.

【详解】 解: $\because$ 从 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 这 10 个数中任取一个数, 那么取到的数恰好是素数的

有 2、3、5、7 共 3 个,

$\therefore$ 取到的数恰好是素数的概率 $= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

故答案为: $\frac{2}{5}$.

【点睛】 本题主要考查了概率公式, 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

14. 为了解某区九年级 3200 名学生中观看 2022 北京冬奥会开幕式的情况, 随机调查了其中 200 名学生, 结果有 150 名学生全程观看了开幕式, 请估计该区全程观看冬奥会开幕式的九年级学生人数约为_____.

【答案】 2400

【解析】

【分析】 用总人数乘以样本中观看冬奥会开幕式的九年级学生人数所占比例即可.

【详解】 估计该区全程观看冬奥会开幕式的九年级学生人数约为 $3200 \times \frac{150}{200} = 2400$ (人)

故答案为: 2400

【点睛】 本题考查用样本估计总体, 解答本题的关键是明确题意, 求出全程观看冬奥会开幕式的九年级学生人数.

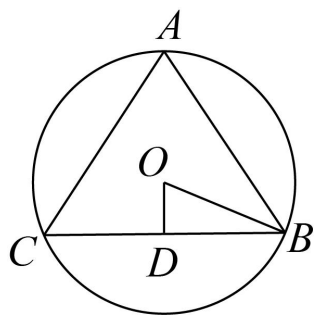
15. 如果正三角形的边心距是 2, 那么它的外接圆半径是_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 利用解直角三角形的知识即可求解.

【详解】 根据题意作图如下,



根据题意有: 在正 $\triangle ABC$ 中, 边心距 $OD=2$, OB 为正 $\triangle ABC$ 外接圆半径,

根据等边三角形的性质可知 $\angle OBD = \frac{1}{2} \angle ABD = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$, 且 $\angle ODB = 90^\circ$,

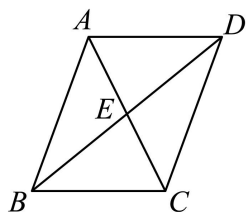
$\therefore$ 在 $Rt\triangle OBD$ 中, $OB = \frac{OD}{\sin \angle OBD} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4$,

即其外接圆半径 r 为 4,

故答案为: 4.

【点睛】 本题考查了边心距的含义、解直角三角形、正三角形的性质等知识，理解边心距的含义是解答本题的关键.

16. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于点 E ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{EB}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.



【答案】 $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】 根据平行四边形性质可得 $BE = \frac{1}{2}BD$ ，再用向量进行表示即可.

【详解】 $\because$ 平行四边形 $ABCD$

$$\therefore \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$$

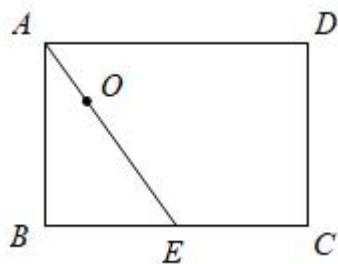
$$\therefore \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

故答案为: $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

【点睛】 本题考查平行四边形的性质、平面向量等知识，解题的关键是注意向量的方向，属于中考常考题型.

17. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ，点 E 是 BC 的中点，联结 AE ，点 O 是线段 AE 上一点， $\odot O$ 的半径为 1，如果 $\odot O$ 与矩形 $ABCD$ 的各边都没有公共点，那么线段 AO 长的取值范围是_____.



【答案】 $\frac{5}{3} < OA < \frac{15}{4}$

【解析】

【分析】根据勾股定理得到 $AE=5$ ，分别求出当 $\odot O$ 与 AB 边相切、 $\odot O$ 与 BC 边相切时的 OA 值即可得到结论.

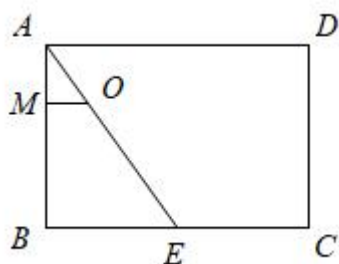
【详解】 $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $BC=6$ ，点 E 是 BC 的中点

$$\therefore BE=3,$$

$$\therefore AE=5,$$

当 $\odot O$ 与 AB 边相切时

设 $\odot O$ 与 AB 边相切于 M ，连接 OM ，



则 $OM \perp AB$ ，

$$\therefore OM \parallel BC,$$

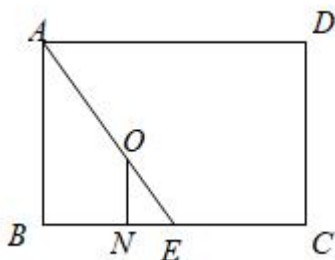
$$\therefore \frac{OM}{BE} = \frac{OA}{AE},$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{OA}{5},$$

$$\therefore OA = \frac{5}{3},$$

当 $\odot O$ 与 BC 边相切时

设 $\odot O$ 与 BC 边相切于 N ，连接 ON ，



则 $ON \perp BC$ ，

$$\therefore ON \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{ON}{AB} = \frac{OE}{AE},$$

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{OE}{5},$$

$$\therefore OE = \frac{5}{4},$$

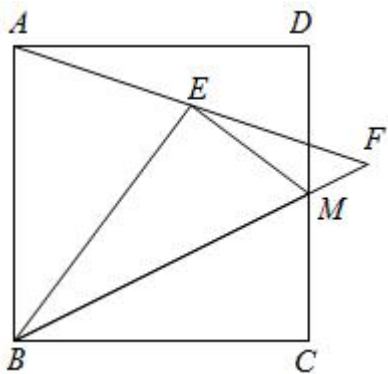
$$\therefore OA = AE - OE = \frac{15}{4},$$

$\therefore$ 如果圆 O 与矩形 $ABCD$ 的各边都没有公共点，那么线段 AO 长的取值范围是 $\frac{5}{3} < OA < \frac{15}{4}$,

故答案为: $\frac{5}{3} < OA < \frac{15}{4}$.

【点睛】 本题考查了直线与圆的位置关系，矩形的性质，平行线分线段成比例，正确的作出图形是解题的关键.

18. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 M 是边 CD 的中点，将 $\triangle BCM$ 沿直线 BM 翻折，使得点 C 落在同一平面内的点 E 处，联结 AE 并延长交射线 BM 于点 F ，那么 EF 的长为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】

【分析】 过 B 作 $BH \perp AF$ 于 H ，连接 EC 交 BM 于 G ，可证明 $\angle HBF = 45^\circ$ ，即可得到 $EF = \sqrt{2}EG$ ，利用面积法求出 EG 的长度即可.

【详解】 过 B 作 $BH \perp AF$ 于 H ，连接 EC 交 BM 于 G

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + (\pi)^0 + |\sqrt{2}-1| - 12^{\frac{1}{2}}$.

【答案】 $-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质, 零次幂的定义, 绝对值的性质依次化简, 最后运用实数的运算法则进行化简运算即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + (\pi)^0 + |\sqrt{2}-1| - 12^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})} + 1 + \sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$
$$= -\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查了二次根式的性质, 零次幂的定义, 绝对值的性质依次化简, 以及实数的运算, 熟练掌握以上知识进行正确的运算, 是解题的关键.

20. 解方程组: $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x^2-9y^2=0 \end{cases}$.

【答案】 $\begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 首先由 $2x-3y=3$ 可得, $9y^2 = (2x-3)^2$, 再把 $9y^2 = (2x-3)^2$ 代入另一个方程, 即可解得 x , 据此即可解得.

【详解】 解: 由方程 $2x-3y=3$ 得, $9y^2 = (2x-3)^2$,

把 $9y^2 = (2x-3)^2$ 代入方程 $x^2 - 9y^2 = 0$,

得 $x^2 - (2x-3)^2 = 0$,

整理得, $x^2 - 4x + 3 = 0$,

解得 $x=1$ 或 $x=3$,

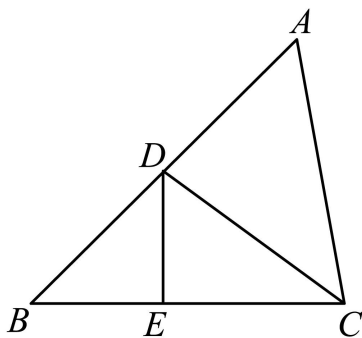
把 $x=1$ 代入 $2x-3y=3$, 解得 $y=-\frac{1}{3}$,

把 $x=3$ 代入 $2x-3y=3$, 解得 $y=1$,

所以, 原方程组的解为 $\begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$.

【点睛】 本题考查了二元二次方程组的解法, 熟练掌握和运用二元二次方程组的解法是解决本题的关键.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=45^\circ$, CD 是 AB 边上的中线, 过点 D 作 $DE \perp BC$, 垂足为点 E , 若 $CD=5$, $\sin \angle BCD = \frac{3}{5}$.



(1) 求 BC 的长;

(2) 求 $\angle ACB$ 的正切值.

【答案】 (1) 7 (2) 6

【解析】

【分析】 (1) 由 $CD=5$, $\sin \angle BCD = \frac{3}{5}$ 求得 DE 的长, 再用勾股定理求出 CE 的长, 由 $\angle B=45^\circ$ 求得 BE 的长, 最后求出 BC 的长;

(2) 过点 A 作 $AH \perp BC$, 垂足为点 H , 由在 $Rt\triangle DEB$ 中 $\angle B=45^\circ$, $DE=3$, 可得 $BD=3\sqrt{2}$, 在 $Rt\triangle ABH$ 中 $\angle B=45^\circ$, $AB=6\sqrt{2}$, $BH=AH=6$, 再求出 CH 的长, 最后求出 $\angle ACB$ 的正切值.

【小问 1 详解】

$\because DE \perp BC$,

$\therefore \angle DEB = \angle DEC = 90^\circ$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle DEC$ 中, $CD=5$, $\sin \angle BCD = \frac{3}{5}$,

$\therefore \frac{DE}{5} = \frac{3}{5}$,

$\therefore DE=3$,

$$\therefore CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

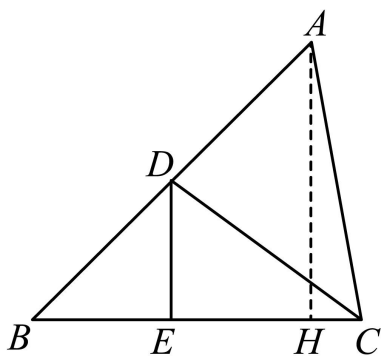
$\therefore$ 在 $Rt\triangle DEB$ 中, $\angle B = 45^\circ$, $DE=3$,

$$\therefore BE=DE=3,$$

$$\therefore BC=BE+CE=3+4=7;$$

【小问 2 详解】

如图, 过点为 A 作 $AH \perp BC$, 垂足为点 H ,



$\therefore$ 在 $Rt\triangle DEB$ 中, $\angle B = 45^\circ$, $DE=3$,

$$\therefore BD=3\sqrt{2},$$

$\therefore CD$ 是 AB 边上的中线,

$$\therefore AB=2BD=6\sqrt{2},$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABH$ 中, $\angle B = 45^\circ$, $AB=6\sqrt{2}$,

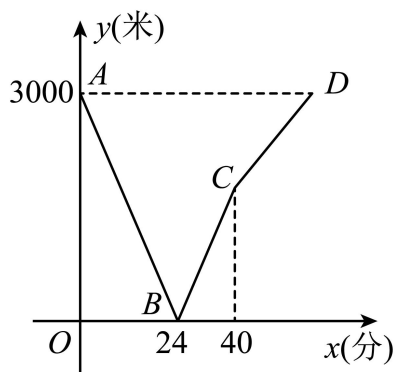
$$\therefore BH = AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 6,$$

$$\therefore CH = BC - BH = 7 - 6 = 1,$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AH}{CH} = \frac{6}{1} = 6.$$

【点睛】 本题考查了解直角三角形, 正确的作出辅助线构造直角三角形是解题的关键.

22. 浦江边某条健身步道的甲、乙两处相距 3000 米, 小杰和小丽分别从甲、乙两处同时出发, 匀速相向而行. 小杰的运动速度较快, 当到达乙处后, 随即停止运动, 而小丽则继续向甲处运动, 到达后也停止运动. 在以上过程中, 小杰和小丽之间的距离 y (米) 与运动时间 x (分) 之间的函数关系, 如图中折线 $AB-BC-CD$ 所示.



- (1) 小杰和小丽从出发到相遇需要_____分钟；
- (2) 当 $0 \leq x \leq 24$ 时，求 y 关于 x 的函数解析式（不需写出定义域）；
- (3) 当小杰到达乙处时，求小丽距离甲处还有多少米.

【答案】 (1) 24 (2) $y = -125x + 3000$

(3) 小丽距离甲处还有 1000 米

【解析】

【分析】 (1) 由图可知，点 B 代表小杰和小丽相遇，此时，时间是 24 分钟；

(2) 利用待定系数法，即可求得 y 关于 x 的函数解析式；

(3) 先算出小杰的速度，再算出小丽的速度，即可求解.

【小问 1 详解】

解：由图可知，点 B 代表小杰和小丽相遇，

$\therefore$ 此时，时间是 24 分钟，

$\therefore$ 小杰和小丽从出发到相遇需要 24 分钟，

故答案为：24；

【小问 2 详解】

解：由图可知，当 $0 \leq x \leq 24$ 时， y 关于 x 的图象经过 $(0, 3000)$ ， $(24, 0)$ ，设 y 关于 x 的函数解析式为 $y = kx + b$ ，

$$\therefore \begin{cases} 3000 = 0 + b \\ 0 = 24k + b \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -125 \\ b = 3000 \end{cases},$$

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y = -125x + 3000$ ；

【小问 3 详解】

解：由 (1) 可知，小杰和小丽从出发到相遇需要 24 分钟，

$$\therefore v_{\text{小杰}} + v_{\text{小丽}} = \frac{3000}{24} = 125 \text{ (米/分)},$$

由图可知，小杰到达乙地的时间是 40 分，

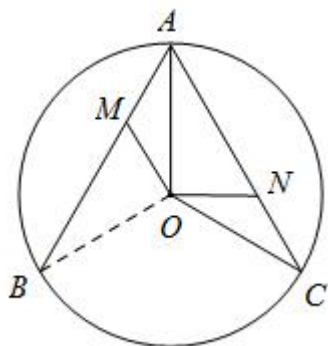
$$\therefore v_{\text{小杰}} = \frac{3000}{40} = 75 \text{ (米/分)},$$

$$\therefore v_{\text{小丽}} = 125 - 75 = 50 \text{ (米/分)},$$

$\therefore$ 当小杰到达乙处时，求小丽距离甲处还有 $3000 - 40 \times 50 = 1000$ (米)。

【点睛】 本题主要考查了待定系数法求一次函数的表达式，以及一次函数与行程问题的综合应用。

23. 已知: 如图, AB 、 AC 是 $\odot O$ 的两条弦, $AB = AC$, 点 M 、 N 分别在弦 AB 、 AC 上, 且 $AM = CN$, $AM < AN$, 联结 OM 、 ON 。



(1) 求证: $OM = ON$;

(2) 当 $\angle BAC$ 为锐角时, 如果 $AO^2 = AM \cdot AC$, 求证: 四边形 $AMON$ 为等腰梯形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 证明 $\triangle AOM \cong \triangle CON$ 即可;

(2) 由 $AO^2 = AM \cdot AC$ 可得 $\triangle AOM \sim \triangle ACO$, 可得 $OM = ON = AM$, 再证明 $OM \parallel AC$ 即可.

【小问 1 详解】

$\because AB$ 、 AC 是 $\odot O$ 的两条弦, $AB = AC$,

$$\therefore \angle OAB = \angle OAC = \angle OCA$$

在 $\triangle AOM$ 和 $\triangle CON$ 中

$$\begin{cases} OA = OC \\ \angle OAM = \angle OCN \\ AM = CN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOM \cong \triangle CON \quad (\text{SAS})$$

$$\therefore OM = ON;$$

【小问2详解】

$$\because AO^2 = AM \cdot AC$$

$$\therefore \frac{AO}{AM} = \frac{AC}{AO}$$

$$\because \angle OAB = \angle OAC$$

$$\therefore \triangle AOM \sim \triangle ACO$$

$$\therefore \angle AOM = \angle ACO$$

$$\because \angle OAB = \angle OAC = \angle OCA$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OAC = \angle OCA = \angle AOM$$

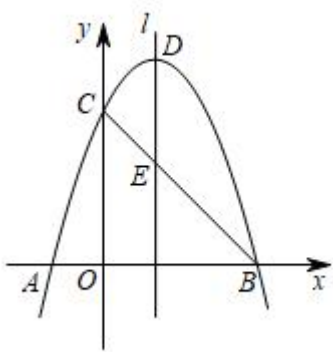
$$\therefore AM = MO, OM \parallel AC$$

$$\therefore AM = MO = ON$$

$\therefore$ 四边形 $AMON$ 为等腰梯形.

【点睛】 本题考查圆的弧弦关系、全等三角形的证明、等腰梯形、相似三角形的性质与判定，解题的关键是由弦 $AB = AC$ 得到 $\angle OAB = \angle OAC = \angle OCA$.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 6$ 与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ 和点 $B(6, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D , 连接 BC 交抛物线的对称轴 l 于点 E .



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 连接 CD 、 BD , 点 P 是射线 DE 上的一点, 如果 $S_{\triangle PDB} = S_{\triangle CDB}$, 求点 P 的坐标;

(3) 点 M 是线段 BE 上的一点, 点 N 是对称轴 l 右侧抛物线上的一点, 如果 $\triangle EMN$ 是以 EM 为腰的等腰直角三角形, 求点 M 的坐标.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

(2) $(2, 2)$

(3) $(4, 2)$ 或 $(2 + \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2})$

【解析】

【分析】(1) 由抛物线 $y = ax^2 + bx + 6$ ，得抛物线过点 $(0, 6)$ ，设抛物线解析式 $y = a(x+2)(x-6)$ ，将 $(0, 6)$ 代入上述解析式，求得 a 的值，整理化简即可。

(2) 由 (1) 中条件求得抛物线顶点坐标及 C 点坐标，再算得 $S_{\triangle CDB}$ ，设点 P 在射线 DE 上，连接 PB ，设 DP 交 x 轴于点 F ，设 $P(2, p)$ ，则 $S_{\triangle PDB} = \frac{1}{2} \times DP \times BF = \frac{1}{2} \times 4(8-p)$ ，令 $S_{\triangle CDB} = S_{\triangle PDB}$ ，解得关于 p 的方程即可得到点 P 的坐标。

(3) 由直线 BC 解析式为 $y = -x + 6$ ，设 $M(m, -m+6)$ ，其中 $2 \leq m \leq 6$ ，同理，设 $N\left(n, -\frac{1}{2}n^2 + 2n + 6\right)$ ，其中 $n \geq 2$ ，分两种情况分别讨论，求解即可。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 6$ ，

∴ 抛物线过点 $(0, 6)$ 。

∴ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 6$ 与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ 和点 $B(6, 0)$ ，

∴ 设抛物线 $y = a(x+2)(x-6)$ ，

∴ 抛物线过点 $(0, 6)$ ，

∴ 将点 $(0, 6)$ 代入 $y = a(x+2)(x-6)$ 中，

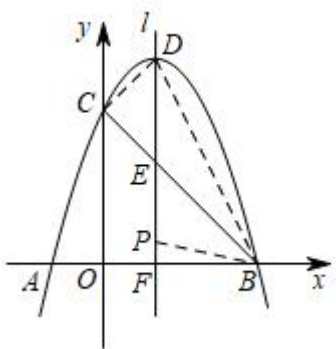
得 $6 = a(0+2)(0-6)$ ，解得 $a = -\frac{1}{2}$ ，

故抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}(x+2)(x-6)$ ，

∴ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ 。

【小问 2 详解】

解：连接 CD 、 BD ，设点 P 在射线 DE 上，连接 PB ，设 DP 交 x 轴于点 F ，



$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ ，与 y 轴交于点 C ，顶点为 D ，

$\therefore C(0, 6)$ ， $D(2, 8)$ 。

$\therefore C(0, 6)$ ， $B(6, 0)$ ，

$\therefore$ 直线 BC 为： $y = -x + 6$ ，

$\therefore BC$ 交抛物线的对称轴 l 于点 E ，

$\therefore E(2, 4)$ ，

$\therefore D(2, 8)$ ， $E(2, 4)$ ，

$\therefore DE = 4$ ，

$\therefore S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2} \times DE \times (x_B - x_C) = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$ 。

$\therefore S_{\triangle CDB} = S_{\triangle PDB}$ ，

$\therefore S_{\triangle PDB} = 12$ 。

设 $P(2, p)$ ，

$\therefore D(2, 8)$ ，点 P 在射线 DE 上，

$\therefore DP = 8 - p$ ，

$\therefore DP$ 交 x 轴于点 F ，

$\therefore F(2, 0)$ ，

$\therefore B(6, 0)$ ， $F(2, 0)$ ，

$\therefore BF = 4$ ，

$$\therefore DP = 8 - p,$$

$$\therefore S_{\triangle PDB} = \frac{1}{2} \times DP \times BF = \frac{1}{2} \times 4(8 - p) = 16 - 2p,$$

$$\therefore S_{\triangle PDB} = 12,$$

$$\therefore 16 - 2p = 12, \text{ 解得 } p = 2,$$

故 P 点坐标 $(2, 2)$.

【小问 3 详解】

解: $\because$ 直线 BC 为: $y = -x + 6$, $E(2, 4)$,

又 $\because$ 点 M 是线段 BE 上的一点,

$\therefore$ 设 $M(m, -m + 6)$, 其中 $2 \leq m \leq 6$,

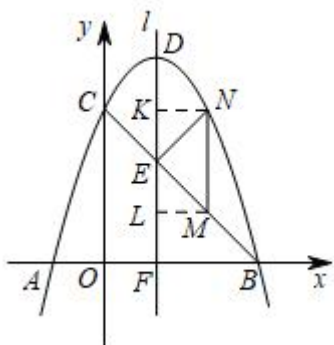
又 $\because y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$, 点 N 是对称轴 l 右侧抛物线上的一点,

$\therefore$ 设 $N\left(n, -\frac{1}{2}n^2 + 2n + 6\right)$, 其中 $n \geq 2$.

$\because \triangle EMN$ 是以 EM 为腰的等腰直角三角形,

$\therefore$ 分两种情况进行讨论:

①如图 1, 当 $\angle MEN = 90^\circ$, $EM = EN$ 时, 过点 N 作 $NK \perp DE$ 于点 K , 过点 M 作 $ML \perp DE$ 于点 L ,



$$\therefore \angle MEN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NEK + \angle MEL = 90^\circ,$$

$$\because ML \perp DE,$$

$$\therefore \angle EML + \angle MEL = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NEK + \angle MEL = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NEK = \angle EML.$$

$$\because NK \perp DE, \quad ML \perp DE,$$

$$\therefore \angle NKE = \angle ELM = 90^\circ,$$

$\because \triangle EMN$ 是以 EM 为腰的等腰直角三角形,

$$\therefore EN = EM,$$

$$\therefore \triangle NEK \cong \triangle EML,$$

$$\therefore KN = EL, \quad KE = LM.$$

$$\because M(m, -m+6), \quad N\left(n, -\frac{1}{2}n^2 + 2n + 6\right), \quad E(2, 4),$$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{2}n^2 + 2n + 6 - 4 = m - 2 \\ n - 2 = 4 + m - 6 \end{cases},$$

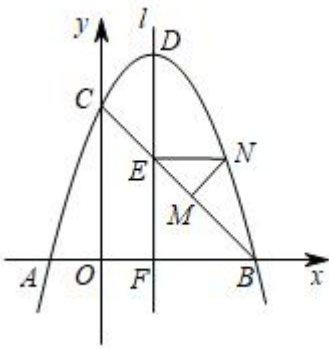
$$\text{解得 } \begin{cases} m = 4 \\ n = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m = -2 \\ n = -2 \end{cases},$$

$$\because 2 \leq m \leq 6, \quad n \geq 2,$$

$$\therefore \begin{cases} m = -2 \\ n = -2 \end{cases} \text{ 舍去,}$$

$$\therefore M \text{ 点坐标为 } (4, 2).$$

②如图 2, 当 $\angle EMN = 90^\circ$, $ME = MN$ 时,



$\because \triangle EMN$ 是以 EM 为腰的等腰直角三角形,

$$\therefore \angle NEM = 45^\circ.$$

$$\because B(6, 0), \quad C(0, 6),$$

$$\therefore OB = OC,$$

$$\because \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC = 45^\circ = \angle NEM,$$

$$\therefore EN \parallel OB,$$

$$\therefore y_N = y_E.$$

$$\therefore E(2, 4),$$

$$\therefore y_N = y_E = 4,$$

$$\therefore N\left(n, -\frac{1}{2}n^2 + 2n + 6\right), \quad n \geq 2,$$

$$\therefore \text{当 } -\frac{1}{2}n^2 + 2n + 6 = 4, \text{ 解得 } n = 2 \pm 2\sqrt{2},$$

$$\therefore n \geq 2,$$

$$\therefore n = 2 + 2\sqrt{2}, \text{ 即 } x_N = 2 + 2\sqrt{2}.$$

$\therefore \triangle EMN$ 是以 EM 为腰的等腰直角三角形,

$$\therefore x_M = \frac{x_E + x_N}{2} = \frac{2 + 2 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 为: } y = -x + 6, \quad E(2, 4),$$

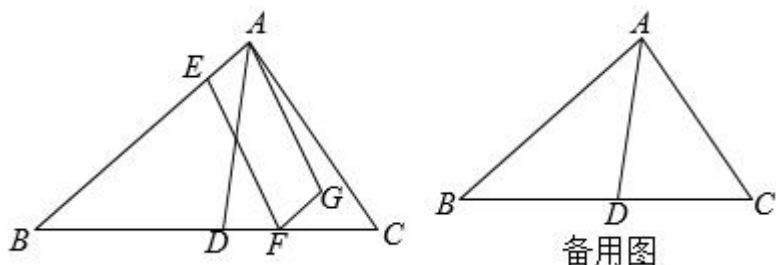
又 $\therefore$ 点 M 是线段 BE 上的一点,

$$\therefore M \text{ 点坐标为 } (2 + \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2}).$$

综上, 满足题意的 M 点坐标为 $(4, 2)$ 或 $(2 + \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2})$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式, 二次函数相关的综合运用, 充分运用数形结合思想是解题的关键.

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 6$, $BC = 9$, $\angle BAC = 2\angle B$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D . 点 E 、 F 分别在线段 AB 、 DC 上, 且 $AE = DF$, 联结 EF , 以 AE 、 EF 为邻边作平行四边形 $AEFG$.



(1) 求 BD 的长;

(2) 当平行四边形 $AEFG$ 是矩形时, 求 AE 的长;

(3) 过点 D 作平行于 AB 的直线, 分别交 EF 、 AG 、 AC 于点 P 、 Q 、 M . 当 $DP = MQ$ 时, 求 AE 的

长.

【答案】 (1) 5 (2) $\frac{15}{7}$

(3) $\frac{25 - 5\sqrt{19}}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 由 $\angle BAC = 2\angle B$, AD 平分 $\angle BAC$, 可知 $\angle DAB = \angle DAC = \angle B$, 利用等角对等边, 可知 $AD=BD$, 证 $\triangle ADC \sim \triangle BAC$, 利用相似三角形的性质, 即可求解;

(2) 过点 D 作 $DN \perp AB$ 于 N , 如图, 利用等腰三角形的性质, 可得 $AN = BN = \frac{1}{2} AB = \frac{15}{4}$, 利用矩形的性质, 可得 $EF \perp AB$, 从而可得 $EF \parallel DN$, 利用平行线分线段成比例, 即可求解;

(3) 可知四边形 $AEPQ$ 是平行四边形, 利用平行四边形的性质可得 $PQ = AE$, $PQ \parallel AE$, 可得 $\triangle CDM \sim \triangle CBA$, $\triangle FDP \sim \triangle FBE$, 利用相似三角形的性质, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle DAB = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC,$$

$$\because \angle BAC = 2\angle B,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DAC = \angle B,$$

$$\therefore AD=BD,$$

$$\because \angle ACD = \angle BCA,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AD},$$

$$\because AC = 6, BC = 9,$$

$$\therefore \frac{6}{CD} = \frac{9}{6} = \frac{AB}{AD},$$

$$\therefore CD = 4,$$

$$\therefore BD = BC - CD = 9 - 4 = 5;$$

【小问 2 详解】

解: $\because AD=BD$,

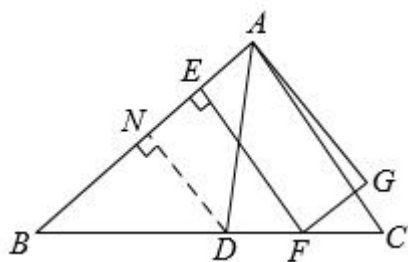
$$\therefore AD=5,$$

$$\therefore \frac{9}{6} = \frac{AB}{AD},$$

$$\therefore \frac{9}{6} = \frac{AB}{5},$$

$$\therefore AB = \frac{15}{2},$$

过点 D 作 $DN \perp AB$ 于 N , 如图,



$$\therefore AD=BD,$$

$$\therefore AN = BN = \frac{1}{2} AB = \frac{15}{4},$$

$\therefore$ 四边形 $AEFG$ 是矩形,

$$\therefore EF \perp AB,$$

$$\therefore EF \parallel DN,$$

$$\therefore \frac{BD}{BN} = \frac{BF}{BE},$$

设 $AE = DF = x$, 则 $BE = \frac{15}{2} - x$, $BF = BD + DF = 5 + x$,

$$\therefore \frac{5}{\frac{15}{4}} = \frac{5+x}{\frac{15}{2}-x},$$

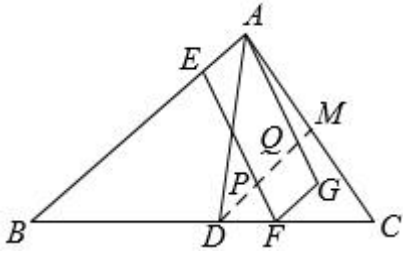
$$\text{解得 } x = \frac{15}{7},$$

经检验, $x = \frac{15}{7}$ 是原方程的解,

$$\therefore AE = \frac{15}{7};$$

【小问3 详解】

解: 如图,



设 $AE = DF = a$, $DP = MQ = b$,

$\therefore EP \parallel AQ$, $PQ \parallel AE$,

$\therefore$ 四边形 $AEPQ$ 是平行四边形,

$\therefore PQ = AE = a$, $PQ \parallel AE$

$\therefore DM \parallel AB$,

$\therefore \triangle CDM \sim \triangle CBA$,

$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{DM}{AB}$,

$\therefore \frac{4}{9} = \frac{DM}{\frac{15}{2}}$,

$\therefore DM = \frac{10}{3}$,

$\therefore a + 2b = \frac{10}{3}$,

$\therefore b = \frac{1}{2} \left(\frac{10}{3} - a \right) = \frac{5}{3} - \frac{1}{2}a$,

又 $\therefore DP \parallel BE$,

$\therefore \triangle FDP \sim \triangle FBE$,

$\therefore \frac{FD}{FB} = \frac{DP}{BE}$,

$\therefore \frac{a}{a + 5} = \frac{b}{\frac{15}{2} - a}$,

$$\therefore a \left(\frac{15}{2} - a \right) = (a + 5) \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}a \right),$$

整理得: $3a^2 - 50a + 50 = 0$,

$$\text{解得 } a = \frac{25 \pm 5\sqrt{19}}{3},$$

经检验, $a = \frac{25 \pm 5\sqrt{19}}{3}$ 是原方程的解,

但 $\frac{25 + 5\sqrt{19}}{3} > \frac{15}{2}$, 此时, 点 E 不在线段 AB 上, 故舍去,

$$\therefore a = \frac{25 - 5\sqrt{19}}{3},$$

$$\therefore AE \text{ 的长为 } \frac{25 - 5\sqrt{19}}{3}.$$

【点睛】 本题主要考查了等腰三角形的判定和性质、相似三角形的判定和性质、平行线分线段成比例、平行四边形的判定和性质、矩形的性质等, 解题关键是正确找到或构造相似三角形.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能