

2022 年上海市浦东新区中考数学二模试卷

一、选择题 (共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分).

1. 下列二次根式中, $\sqrt{2}$ 的同类二次根式是 ()

- A. $\sqrt{4}$ B. $\sqrt{2x}$ C. $\sqrt{\frac{2}{9}}$ D. $\sqrt{12}$

【答案】C

【解析】

【分析】先将每个选项的二次根式化简后再判断.

【详解】解: A: $\sqrt{4}=2$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式;

B: $\sqrt{2x}$ 被开方数是 $2x$, 故与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式;

C: $\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式;

D: $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式.

故选 C.

【点睛】本题考查了同类二次根式的概念.

2. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+k=0$ 有两个不相等的实数根, 那么 k 的取值范围是 ()

- A. $k < 1$ B. $k < 1$ 且 $k \neq 0$ C. $k > 1$ D. $k > 1$ 且 $k \neq 0$.

【答案】A

【解析】

【详解】分析: 由方程根的个数, 根据根的判别式可得到关于 k 的不等式, 则可求得 k 的取值范围.

详解:

$\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+k=0$ 有两个不相等的实数根,

$\therefore \Delta > 0$, 即 $(-2)^2-4k > 0$, 解得 $k < 1$,

故选 A.

点睛: 本题主要考查根的判别式, 熟练掌握一元二次方程根的个数与根的判别式的关系是解题的关键.

3. 如果将抛物线向右平移 2 个单位后得到 $y=x^2$, 那么原抛物线的表达式是 ()

- A. $y=x^2+2$ B. $y=x^2-2$ C. $y=(x+2)^2$ D. $y=(x-2)^2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次函数平移的性质进行解题即可；

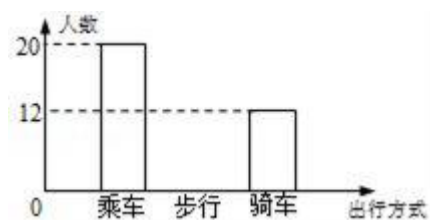
【详解】解：∵将抛物线向右平移 2 个单位后得到 $y = x^2$ ，

∴抛物线 $y = x^2$ 向左移 2 个单位得原函数解析式 $y = (x + 2)^2$ ，

故选：C.

【点睛】本题主要考查二次函数图象平移的性质，掌握二次函数图象平移的性质是解题的关键.

4. 如图，是某中学九（3）班学生外出方式（乘车、步行、骑车）的不完整频数（人数）分布直方图. 如果乘车的频率是 0.4，那么步行的频率为（ ）



A. 0.4

B. 0.36

C. 0.3

D. 0.24

【答案】B

【解析】

【详解】分析：根据乘车的人数和频率，求出总人数，再根据直方图给出的数据求出步行的人数，从而得出步行的频率.

详解：∵乘车的有 20 人，它的频率是 0.4，

∴总人数是 $\frac{20}{0.4} = 50$ 人，

∴步行的频率为 $\frac{50 - 20 - 12}{50} = 0.36$ ；

故选 B.

点睛：此题考查了频数（率）分布直方图，利用统计图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能作出正确的判断和解决问题.

5. 下列命题中，①长度相等的两条弧是等弧；②不共线的三点确定一个圆；③相等的圆心角所对的弧相等；④平分弦的直径必垂直于这条弦，真命题的个数有（ ）

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】A

【解析】

【分析】根据圆的相关概念，确定圆的条件，垂径定理逐项分析判断即可.

【详解】解：①在同一个圆内，长度相等的两条弧是等弧，故原命题为假命题；

②不共线的三点确定一个圆，为真命题.

③在同一个圆内，相等的圆心角所对的弧相等，故原命题为假命题；

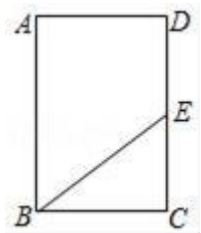
④平分弦的直径不一定垂直弦，两条相交的直径互相平分，但不垂直，故原命题为真命题.

故真命题的个数为 1 个，

故选：A.

【点睛】本题考查了圆的相关概念，确定圆的条件，垂径定理，理解相关性质定理是解题的关键.

6. 如图，在矩形 ABCD 中，点 E 是 CD 的中点，联结 BE，如果 AB=6，BC=4，那么分别以 AD、BE 为直径的 $\odot M$ 与 $\odot N$ 的位置关系是（ ）



A. 外离

B. 外切

C. 相交

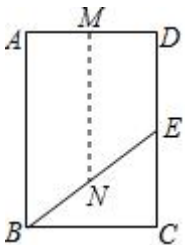
D. 内切

【答案】B

【解析】

【详解】分析：直接利用已知得出两圆的半径，进而得出两圆位置关系.

详解：如图所示：连接 MN，



可得 M 是 AD 的中点，N 是 BE 的中点，

则 MN 是梯形 ABED 的中位线，

$$\text{则 } MN = \frac{1}{2} (AB + DE) = 4.5,$$

$$\because EC = 3, BC = AD = 4,$$

$$\therefore BE = 5,$$

则 $\odot N$ 的半径为 2.5，

$\odot M$ 的半径为 2，

$$\text{则 } 2 + 2.5 = 4.5.$$

故 $\odot M$ 与 $\odot N$ 的位置关系是：外切.

故选 B.

点睛：此题主要考查了圆与圆的位置关系，正确得出两圆心距离是解题关键.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分) 请将结果直接填入答题纸的相应位置.

7. 计算： $(-a^6) \div (-a)^2 =$ _____.

【答案】 $-a^4$

【解析】

【分析】 利用同底数幂相除的法则计算即可.

【详解】 解： $(-a^6) \div (-a)^2 = -a^6 \div a^2 = -a^4$.

故答案为： $-a^4$.

【点睛】 本题考查整式的乘除，掌握积的乘方与同底数幂相除的法则是解题的关键.

8. 在北京冬奥会的火炬传递活动中，火炬传递的总里程大约为 137000 公里，用科学记数法可表示为_____公里.

【答案】 1.37×10^5

【解析】

【分析】 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【详解】 解： $137000 = 1.37 \times 10^5$.

故答案为： 1.37×10^5 .

【点睛】 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

9. 不等式组 $\begin{cases} -x > 1 \\ 2x \leq 4 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $x < -1$

【解析】

【分析】 分别求出两个不等式的解集，再求其公共解集.

【详解】 解： $\begin{cases} -x > 1 \text{ ①} \\ 2x \leq 4 \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①得, $x < -1$

解不等式②得, $x \leq 2$

所以, 不等式组的解集为: $x < -1$

故答案为: $x < -1$

【点睛】本题考查一元一次不等式组的解法, 属于基础题. 求不等式组的解集, 要遵循以下原则: 同大取较大, 同小取较小, 小大大小中间找, 大大小小解不了; 本题的关键是正确解出不等式.

10. 方程 $\sqrt{-x+2} = x$ 的解为_____.

【答案】 $x=1$

【解析】

【详解】分析: 方程两边平方, 将无理方程转化为整式方程, 求出 x 的值, 经检验即可得到无理方程的解.

详解: 两边平方得: $-x+2=x^2$, 即 $(x-1)(x+2)=0$,

解得: $x=1$ 或 $x=-2$,

经检验 $x=-2$ 是增根, 无理方程的解为 $x=1$,

故答案为 $x=1$

点睛: 此题考查了无理方程, 利用了转化的思想, 解无理方程注意要验根.

11. 已知反比例函数 $y = \frac{3-a}{x}$, 如果在每个象限内, y 随自变量 x 的增大而增大, 那么 a 的取值范围为_____.

【答案】 $a > 3$

【解析】

【分析】根据在每个象限内, y 随自变量 x 的增大而增大, 可得 $3-a < 0$, 即可求解.

【详解】解: 根据题意, 得 $3-a < 0$,

解得 $a > 3$,

故答案为: $a > 3$.

【点睛】本题主要考查了反比例函数的图象和性质, 熟练掌握反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 当 $k > 0$ 时, 图象位于第一、三象限内, 且在每个象限内, y 随自变量 x 的增大而减小; 当 $k < 0$ 时, 图象位于第二、四象限内, 且在每个象限内, y 随自变量 x 的增大而增大是解题的关键.

12. 请写出一个图象的对称轴为 y 轴, 开口向下, 且经过点 $(1, -2)$ 的二次函数解析式, 这个二次函数的解析式可以是_____.

【答案】 $y = -x^2 - 1$ 等 (答案不唯一)

【解析】

【详解】分析：设二次函数解析式为 $y=ax^2+c$ ，将 $(1, -2)$ 代入解析式，得到关于 a 、 c 的关系式，从而推知 a 、 c 的值.

详解：∵ 对称轴为 y 轴，

∴ 设二次函数解析式为 $y=ax^2+c$ ，

将 $(1, -2)$ 代入解析式，得 $a+c=-2$ ，

不妨取 $a=-1$ ， $c=-1$ ，得解析式为 $y=-x^2-1$ ，答案不唯一.

故答案为 $y=-x^2-1$ 等（答案不唯一）.

点睛：此题考查了二次函数的性质，要熟悉对称轴公式、二次函数成立的条件，要注意此题具有开放性，答案不唯一.

13. 在形状为等腰三角形、圆、矩形、菱形、直角梯形的 5 张纸片中随机抽取一张，抽到中心对称图形的概率是_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】在形状为等腰三角形、圆、矩形、菱形、直角梯形的 5 张纸片中，中心对称图案的卡片是圆、矩形、菱形，直接利用概率公式求解即可求得答案.

【详解】∵ 在：等腰三角形、圆、矩形、菱形和直角梯形中属于中心对称图形的有：圆、矩形和菱形 3 种，
∴ 从这 5 张纸片中随机抽取一张，抽到中心对称图形的概率为： $\frac{3}{5}$.

故答案为 $\frac{3}{5}$.

14. 在植树节当天，某校一个班的学生分成 10 个小组参加植树造林活动，如果 10 个小组植树的株数情况见下表，那么这 10 个小组植树株数的平均数是_____株.

植树株数（株）	5	6	7
小组个数	3	4	3

【答案】 6

【解析】

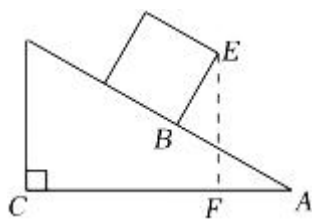
【详解】分析：根据加权平均数的定义列式计算可得.

详解：这 10 个小组植树株数的平均数是 $\frac{5 \times 3 + 6 \times 4 + 7 \times 3}{10} = 6$ （株），

故答案为 6.

点睛：本题考查的是平均数，解题的关键是熟练掌握加权平均数的定义.

15. 如图, 一个高 BE 为 $\sqrt{3}$ 米的长方体木箱沿坡比为 $1:\sqrt{3}$ 的斜面下滑, 当木箱滑至如图位置时, $AB = 3$ 米, 则木箱端点 E 距地面 AC 的高度 EF 为_____米.

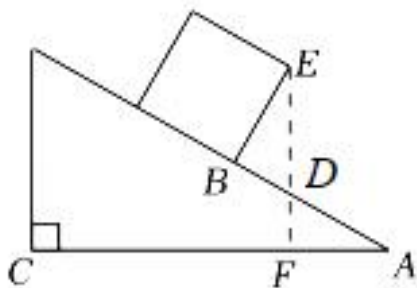


【答案】 3

【解析】

【分析】 根据锐角三角函数值, 求出相关角度, 从而进行求解即可.

【详解】 解: 设 AB 、 EF 交于点 D ,



$\because$ 斜坡的坡比为 $1:\sqrt{3}$,

$$\therefore \tan \angle DAF = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle DAF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = 60^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BDE \text{ 中, } \sin \angle BDE = \frac{BE}{DE},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

解得, $DE = 2$ (米),

$$\therefore BD = 1 \text{ (米)},$$

$$\therefore AD = AB - BD = 2 \text{ (米)},$$

在 $Rt\triangle ADF$ 中, $\angle DAF = 30^\circ$,

$$\therefore DF = \frac{1}{2}AD = 1 \text{ (米)},$$

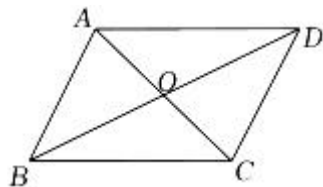
$$\therefore EF = DE + DF = 3 \text{ (米)},$$

故答案为: 3.

【点睛】 本题主要考查锐角三角函数, 掌握锐角三角函数的相关知识是解题的关键.

16. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 如果 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, 那么用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BD}$ 是

_____.



【答案】 $a - 2b$

【解析】

【分析】 根据平行四边形法则, 求解即可;

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore OA = OC, OB = OD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BO} = \vec{a} - 2\vec{b},$$

故答案为: $a - 2b$.

【点睛】 本题主要考查平行四边形法则, 掌握平行四边形法则是解题的关键.

17. 一个正 n 边形的一个内角等于它的中心角的 2 倍, 则 $n = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 6

【解析】

【分析】 根据正多边形内角和公式求出一个内角的度数, 再根据中心角的求法求出中心角的度数列方程求解即可.

【详解】 $\because$ 正 n 边形的一个内角和 $= (n - 2) \cdot 180^\circ$,

$$\therefore \text{正 } n \text{ 边形的一个内角} = \frac{180^\circ \times (n - 2)}{n}.$$

$$\therefore \text{正 } n \text{ 边形的中心角} = \frac{360^\circ}{n},$$

$$\therefore \frac{180^\circ \times (n - 2)}{n} = \frac{360^\circ \times 2}{n},$$

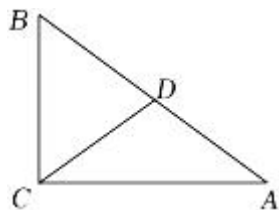
解得: $n = 6$.

故答案为 6.

【点睛】本题比较简单，解答此题的关键是熟知正多边形的内角和公式及中心角的求法.

18. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $\cos A = \frac{4}{5}$, CD 为 AB 边上的中线， $CD = 5$ ，以点 B 为圆心， r

为半径作 $\odot B$ ．如果 $\odot B$ 与中线 CD 有且只有一个公共点，那么 $\odot B$ 的半径 r 的取值范围为_____.



【答案】 $5 < r \leq 6$ 或 $r = \frac{24}{5}$ 或 $5 < r \leq 6$

【解析】

【分析】根据直线与圆的位置关系，判断出符合题意的 $\odot B$ 的半径 r 的取值范围的临界值并求解即可；

【详解】解：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 为 AB 边上的中线， $CD = 5$ ，

$$\therefore AB = 10, CD = BD = 5,$$

$$\because \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore AC = 8,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

$$\therefore CD \text{ 边的高} = 6 \times 8 \div 2 \div 5 = \frac{24}{5},$$

$\therefore \odot B$ 与中线 CD 有且只有一个公共点，

$$\therefore \odot B \text{ 的半径 } r \text{ 的取值范围为 } 5 < r \leq 6 \text{ 或 } r = \frac{24}{5}.$$

故答案为： $5 < r \leq 6$ 或 $r = \frac{24}{5}$.

【点睛】本题考查了直线与圆的位置关系、三角形的面积、直角三角形斜边上的中线、解直角三角形等知识；熟练掌握直线与圆的位置关系，由三角函数求出 BC 是解决问题的关键.

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 先化简，再求值： $\left(a - 1 - \frac{3}{a+1}\right) \div \frac{a^2 - 4a + 4}{a+1}$ ，其中 $a = \sqrt{3}$.

【答案】 $\frac{a+2}{a-2}$, $-7 - 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】首先根据分式的减法法则计算括号内的，再计算分式的除法化成最简分式，然后将 a 的值代入计算即可.

【详解】解：原式 $= \frac{a^2 - 1 - 3}{a + 1} \cdot \frac{a + 1}{a^2 - 4a + 4}$

$$= \frac{(a + 2)(a - 2)}{a + 1} \cdot \frac{a + 1}{(a - 2)^2}$$
$$= \frac{a + 2}{a - 2},$$

当 $a = \sqrt{3}$ 时,

$$\text{原式} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 2} = -7 - 4\sqrt{3}.$$

【点睛】本题主要考查了分式的化简求值及分母有理化，掌握分式的运算法则是解题的关键.

20. 解方程组: $\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = 4 \text{①} \\ x + 2y = 6 \text{②} \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

【解析】

【分析】根据平方根的意义，把方程组中①变形为: $x - 2y = 2$ 或 $x - 2y = -2$ ，它们与方程组②组成二元一次方程组，求解即可.

【详解】由①得， $(x - 2y)^2 = 4$

$\therefore x - 2y = 2$ 或 $x - 2y = -2$

将它们与方程②分别组成方程组分别为: $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x + 2y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

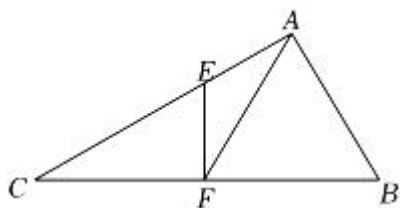
$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$, 求解得: $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$, 求解得: $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

$\therefore$ 原方程组的解为: $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 2 \end{cases}.$

【点睛】本题考查了完全平方公式、平方根、二元二次方程组的知识；解题的关键是熟练掌握完全平方公式、平方根、二元二次方程组的性质，从而完成求解.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin B = \frac{4}{5}$, 点 F 在 BC 上, $AB=AF=5$, 过点 F 作 $EF \perp CB$ 交 AC 于点 E , 且 $AE: EC=3: 5$, 求 BF 的长与 $\cot C$ 的值.

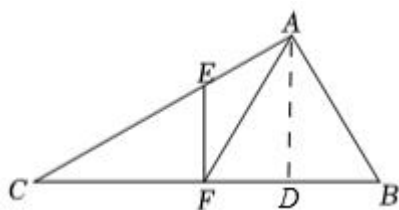


【答案】 $BF = 6$; $\cot C = 2$

【解析】

【分析】 过点 A 作 $AD \perp CB$, 在 $Rt\triangle ABD$ 中利用三角形的边角间关系先求出 AD 、 BD , 再利用平行线的性质求出 CF 、 EF , 最后利用直角三角形的边角间关系得结论.

【详解】 解: 过点 A 作 $AD \perp CB$, 垂足为 D .



$$\because AB=AF=5,$$

$$\therefore BD=FD=\frac{1}{2}BF.$$

在 $Rt\triangle ABD$ 中,

$$\because \sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{5}, \quad AB=5,$$

$$\therefore AD=4.$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 3.$$

$$\therefore BF=2BD=6.$$

$$\because EF \perp CB, \quad AD \perp CB,$$

$$\therefore EF \parallel AD.$$

$$\therefore \frac{CE}{CA} = \frac{EF}{AD}, \quad \triangle CEF \sim \triangle CAD$$

$$\because AE: EC=3: 5, \quad DF=3,$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{FD}{CF} = \frac{3}{5}, \quad \frac{CE}{CA} = \frac{CE}{CE + AE} = \frac{5}{8} = \frac{EF}{AD}.$$

$$\therefore CF=5, \quad EF=\frac{5}{2}.$$

在 $Rt\triangle CEF$ 中,

$$\cot C = \frac{CF}{EF} = 2.$$

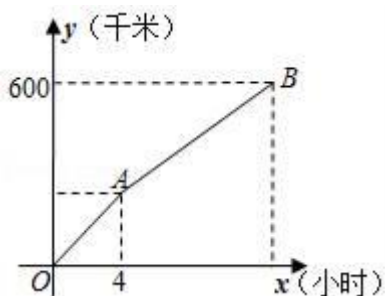
【点睛】本题主要考查了解直角三角形，掌握“等腰三角形的三线合一”、平行线的性质、比例的性质及直角三角形的边角间关系是解决本题的关键.

22. 甲、乙两车需运输一批货物到 600 公里外的某地，原计划甲车的速度比乙车每小时多 10 千米，这样甲车将比乙车早到 2 小时. 实际甲车以原计划的速度行驶了 4 小时后，以较低速度继续行驶，结果甲、乙两车同时到达.

x (小时) y (千米)

(1) 求甲车原计划的速度;

(2) 如图是甲车行驶的路程 y (千米) 与时间 x (小时) 的不完整函数图象，那么点 A 的坐标为____，点 B 的坐标为____，4 小时后的 y 与 x 的函数关系式为____ (不要求写定义域).



【答案】 ①. (4, 240) ②. (12, 600) ③. $y=45x+60$

【解析】

【详解】分析: (1) 设甲车原计划的速度为 x 千米/小时，根据图象列出方程解答即可;

(2) 根据图象得出坐标和关系式即可.

详解: (1) 设甲车原计划的速度为 x 千米/小时

$$\text{由题意得, } \frac{600}{x-10} - \frac{600}{x} = 2$$

$$\text{解得 } x_1 = -50, x_2 = 60$$

经检验, $x_1 = -50, x_2 = 60$ 都是原方程的解, 但 $x_1 = -50$ 不符合题意, 舍去

$$\therefore x = 60,$$

答: 甲车原计划的速度为 60 千米/小时;

$$(2) 4 \times 60 = 240,$$

所以点 A 的坐标为 (4, 240);

点 B 的坐标为 (12, 600);

4 小时后的 y 与 x 的函数关系式为 $y=45x+60$;

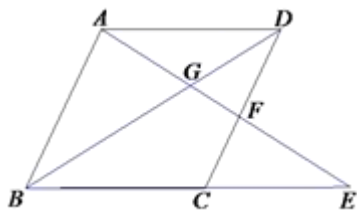
故答案为 (4, 240); (12, 600); $y=45x+60$

点睛: 本题考查了一次函数的应用及函数的图象, 解答本题的关键是仔细观察所给图象, 理解每个拐点的实际意义, 注意数形结合思想的运用.

23. 如图, 在四边形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, E 在 BC 的延长线, 联结 AE 分别交 BD、CD 于点 G、F, 且 $\frac{AD}{BE} = \frac{GF}{AG}$.

(1) 求证: $AB \parallel CD$;

(2) 若 $BC^2 = GD \cdot BD$, $BG = GE$, 求证: 四边形 ABCD 是菱形.



【答案】 (1) 证明见解析 (2) 证明见解析

【解析】

【分析】 (1) 由 $AD \parallel BC$ 易得 $\frac{AD}{BE} = \frac{DG}{BG}$, 结合 $\frac{AD}{BE} = \frac{GF}{AG}$ 可得 $\frac{DG}{BG} = \frac{GF}{AG}$, 由此即可得到 $AB \parallel CD$;

(2) 结合已知和 (1) 中结论易得四边形 ABCD 是平行四边形, 由此可得 $BC = AD$, 结合 $BC^2 = GD \cdot BD$ 可得 $\frac{AD}{BD} = \frac{GD}{AD}$, 结合 $\angle ADG = \angle BDA$ 可得 $\triangle ADG \sim \triangle BDA$, 从而可得 $\angle DAG = \angle ABD$, 在证 $\angle DAG = \angle E$, $\angle E = \angle DBC$, $\angle ABD = \angle BDC$ 即可得到 $\angle BDC = \angle DBC$, 从而可得 $BC = CD$ 结合四边形 ABCD 是平行四边形即可得到结论了.

【详解】 (1) $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{DG}{BG},$$

$$\because \frac{AD}{BE} = \frac{GF}{AG},$$

$$\therefore \frac{DG}{BG} = \frac{GF}{AG},$$

$\therefore AB \parallel CD$;

(2) $\because AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$,

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore BC = AD$,

$\because BC^2 = GD \cdot BD$,

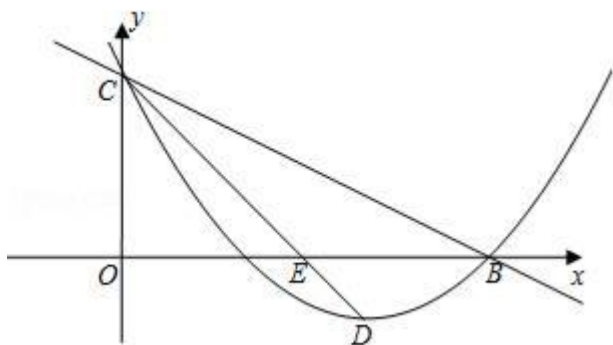
$$\therefore AD^2 = GD \cdot BD, \text{ 即 } \frac{AD}{BD} = \frac{GD}{AD},$$

又 $\because \angle ADG = \angle BDA$,

$\therefore \triangle ADG \sim \triangle BDA$,
 $\therefore \angle DAG = \angle ABD$,
 $\because AB \parallel CD$,
 $\therefore \angle ABD = \angle BDC$,
 $\therefore AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle DAG = \angle E$,
 $\therefore BG = GE$,
 $\therefore \angle DBC = \angle E$,
 $\therefore \angle BDC = \angle DBC$,
 $\therefore BC = CD$,
 $\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形,
 $\therefore$ 平行四边形 ABCD 是菱形.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 - 2x + c$ 与直线 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 分别交于 x 轴、 y 轴上的 B 、 C 两点, 抛物线的顶点为点 D , 联结 CD 交 x 轴于点 E .

- (1) 求抛物线的解析式以及点 D 的坐标;
- (2) 求 $\tan \angle BCD$;
- (3) 点 P 在直线 BC 上, 若 $\angle PEB = \angle BCD$, 求点 P 的坐标.



【答案】 (1) $D(4, -1)$; (2) $\frac{1}{3}$; (3) 点 $P(\frac{24}{5}, \frac{3}{5})$ 或 $(12, -3)$.

【解析】

【详解】 分析: (1) 直接利用待定系数法求出二次函数解析式进而得出答案;

(2) 利用锐角三角函数关系得出 EC , BF 的长, 进而得出答案;

(3) 分别利用①点 P 在 x 轴上方, ②点 P 在 x 轴下方, 分别得出点 P 的坐标.

详解: (1) 由题意得 $B(6, 0)$, $C(0, 3)$,

把 $B(6, 0)$ $C(0, 3)$ 代入 $y = ax^2 - 2x + c$

$$\text{得} \begin{cases} 0=36a-12+c \\ 3=c \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ c=3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y=\frac{1}{4}x^2-2x+3$$

$$=\frac{1}{4}(x^2-8x)+3$$

$$=\frac{1}{4}(x-4)^2-1,$$

$$\therefore D(4, -1);$$

$$(2) \text{ 可得点 } E(3, 0),$$

$$OE=OC=3, \angle OEC=45^\circ,$$

过点 B 作 $BF \perp CD$, 垂足为点 F

$$\text{在 Rt}\triangle OEC \text{ 中, } EC=\frac{OE}{\cos \angle CEO}=3\sqrt{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle BEF \text{ 中, } BF=BE \cdot \sin \angle BEF=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{同理, } EF=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore CF=3\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CBF \text{ 中, } \tan \angle BCD=\frac{BF}{CF}=\frac{1}{3};$$

$$(3) \text{ 设点 } P(m, -\frac{1}{2}m+3)$$

$$\therefore \angle PEB=\angle BCD,$$

$$\therefore \tan \angle PEB=\tan \angle BCD=\frac{1}{3},$$

①点 P 在 x 轴上方

$$\therefore \frac{-\frac{1}{2}m+3}{m-3}=\frac{1}{3},$$

$$\text{解得: } m=\frac{24}{5},$$

$$\therefore \text{点 } P\left(\frac{24}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

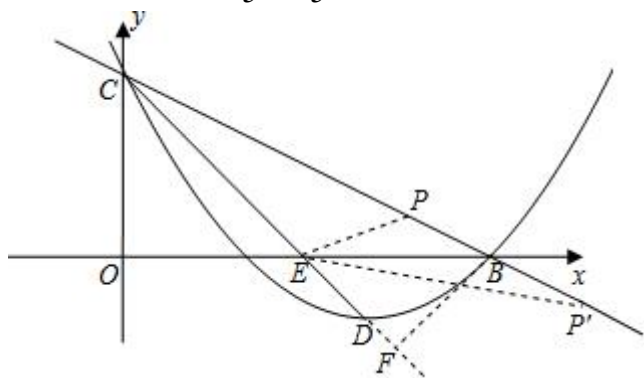
②点 P 在 x 轴下方

$$\therefore \frac{-\frac{1}{2}m-3}{m-3} = \frac{1}{3},$$

解得: $m=12$,

$\therefore$ 点 P (12, -3),

综上所述, 点 P ($\frac{24}{5}$, $\frac{3}{5}$) 或 (12, -3).



点睛: 此题主要考查了二次函数的综合以及锐角三角函数关系的应用, 正确分类讨论是解题关键.

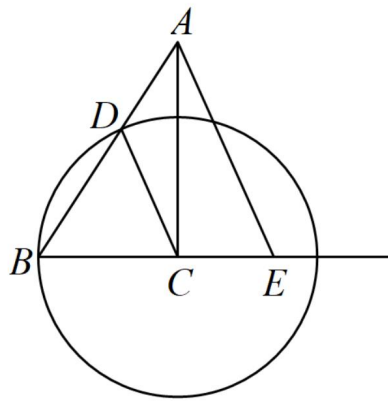
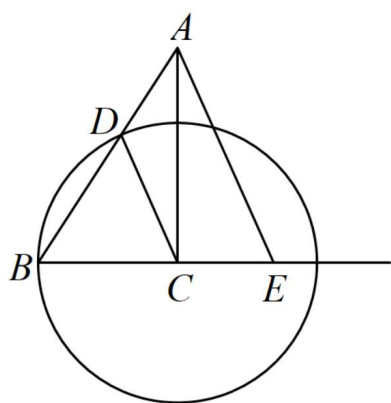
25. 如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $BC=2$, $AC=3$, 以点 C 为圆心、CB 为半径的圆交 AB 于点 D, 过点 A 作 $AE \parallel CD$, 交 BC 延长线于点 E.

(1) 求 CE 的长;

(2) P 是 CE 延长线上一点, 直线 AP、CD 交于点 Q.

①如果 $\triangle ACQ \sim \triangle CPQ$, 求 CP 的长;

②如果以点 A 为圆心, AQ 为半径的圆与 $\odot C$ 相切, 求 CP 的长.



备用图

【答案】(1) $CE=\frac{5}{4}$; (2) ① $CP=\frac{36}{5}$; ② $t=\frac{20+4\sqrt{10}}{15}$

【解析】

【分析】(1) 由平行线分线段成比例定理得: $\frac{BC}{BE} = \frac{DC}{AE}$. 再由 $BC=DC$, 得到 $BE=AE$. 设 $CE=x$, 则 $AE=BE=x+2$. 在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, 由勾股定理即可得出结论.

(2) ①由 $\triangle ACQ \sim \triangle CPQ$, 得到 $\angle ACQ = \angle P$. 再由平行线的性质得到 $\angle ACQ = \angle CAE$, 则 $\angle CAE = \angle P$, 即可证明 $\triangle ACE \sim \triangle PCA$, 由相似 $\triangle$ 的性质即可得到结论.

②设 $CP=t$, 则 $PE = t - \frac{5}{4}$. 在 $\text{Rt}\triangle ACP$ 中, 由勾股定理得: $AP = \sqrt{9+t^2}$. 再由平行线分线段成比例定理得 $\frac{AQ}{AP} = \frac{EC}{EP}$, 可求出 $AQ = \frac{5\sqrt{t^2+9}}{4t-5}$. 然后分两种情况讨论: ①若两圆外切, 则 $AQ = \frac{5\sqrt{t^2+9}}{4t-5} = 1$,

②若两圆内切, 则 $AQ = \frac{5\sqrt{t^2+9}}{4t-5} = 5$, 解方程即可.

【详解】详解: (1) $\because AE \parallel CD$,

$$\therefore \frac{BC}{BE} = \frac{DC}{AE}.$$

$$\because BC=DC,$$

$$\therefore BE=AE.$$

设 $CE=x$, 则 $AE=BE=x+2$.

$$\because \angle ACB=90^\circ,$$

$$\therefore AC^2 + CE^2 = AE^2,$$

$$\text{即 } 9 + x^2 = (x+2)^2,$$

$$\therefore x = \frac{5}{4}, \text{ 即 } CE = \frac{5}{4}.$$

(2) ① $\because \triangle ACQ \sim \triangle CPQ$, $\angle QAC > \angle P$,

$$\therefore \angle ACQ = \angle P.$$

又 $\because AE \parallel CD$,

$$\therefore \angle ACQ = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle P,$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle PCA,$$

$$\therefore AC^2 = CE \cdot CP,$$

$$\text{即 } 3^2 = \frac{5}{4} \cdot CP,$$

答 (2) ②注意要分两种情况讨论.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能