

杨浦区 2021 学年度第二学期中考适应性训练 (一) 数学学科试卷

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列各式中, 运算结果是分数的是 ()

- A. $\sin 30^\circ$ B. $\left(\frac{\pi}{2}\right)^0$ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ D. $\sqrt{\frac{3}{4}}$

【答案】A

【解析】

【分析】分别计算出各选项的值, 然后再判断即可.

【详解】解: A. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, 是分数, 故该选项符合题意;

B. $\left(\frac{\pi}{2}\right)^0 = 1$, 是整数, 故该选项不符合题意;

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$, 是整数, 故该选项不符合题意;

D. $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 是无理数, 故该选项不符合题意.

【点睛】本题考查特殊角的三角函数值、零指数幂、负整数指数幂、二次根式的化简, 解题关键是正确地计算出各式的值.

2. 下列方程中, 二元一次方程的是 ()

- A. $xy = 1$ B. $x^2 - 1 = 0$ C. $x - y = 1$ D. $x + \frac{1}{y} = 1$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二元一次方程的定义可得答案.

【详解】解: A. 含有 2 个未知数, 未知数的项的最高次数是 2 的整式方程, 不属于二元一次方程, 不符合题意;

B. 含有 1 个未知数, 未知数的项的最高次数是 2 的整式方程, 不属于二元一次方程, 不符合题意;

C. 含有 2 个未知数, 未知数的项的最高次数是 1 的整式方程, 属于二元一次方程, 符合题意;

D. 是分式方程, 不属于二元一次方程, 不符合题意.

故选: C.

【点睛】此题主要考查二元一次方程的概念, 要求熟悉二元一次方程的形式及其特点: 含有 2 个未知数,

未知数的项的次数是 1 的整式方程.

3. 在一次引体向上的测试中, 如果小明等 5 位同学引体向上的次数分别为: 6、8、9、8、9, 那么关于这组数据的说法, 正确的是 ()

- A. 平均数是 8.5 B. 中位数是 9 C. 众数是 8.5 D. 方差是 1.2

【答案】D

【解析】

【分析】根据平均数、中位数、众数、方差的定义判断各选项正误即可.

【详解】解: A、平均数 $\frac{6+8+9+8+9}{5} = 8$, 此选项错误;

B、6, 8, 8, 9, 9, 中位数是 8, 此选项错误;

C、6, 8, 9, 8, 9, 众数是 8 和 9, 此选项错误;

D、 $\frac{1}{5} \times [(6-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2] = 1.2$, 方差是 1.2, 本选项正确;

故选 D.

【点睛】本题考查了平均数、中位数、众数和方差的定义, 属于基础题型, 熟练掌握平均数、中位数、众数和方差的定义是解题的关键.

4. 一次函数 $y = -x + 2$ 的图象不经过的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】根据一次函数的系数确定函数图象经过的象限, 由此即可得出结论.

【详解】 $\because$ 一次函数 $y = -x + 2$ 中 $k = -1 < 0$, $b = 2 > 0$, $\therefore$ 该函数图象经过第一、二、四象限, 不经过第三象限.

故选 C.

【点睛】本题考查了一次函数图象与系数的关系. 解答本类型题目时, 根据函数系数的正负确定函数图象经过的象限是关键.

5. 下列命题中, 正确的是 ()

- A. 正多边形都是中心对称图形 B. 正六边形的边长等于其外接圆的半径
C. 边数大于 3 的正多边形的对角线长都相等 D. 各边相等的圆外切多边形是正多边形

【答案】B

【解析】

【分析】根据正多边形的性质、正多边形的对角线、正多边形的概念判断即可.

【详解】解: A、边数是偶数的正多边形都是中心对称图形, 边数是奇数的正多边形不是中心对称图形, 故本选项说法错误, 不符合题意;

B、正六边形的边长等于其外接圆的半径, 本选项说法正确, 符合题意;

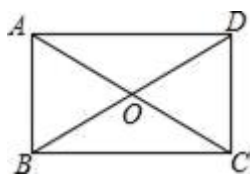
C、边数大于 3 的正多边形的对角线长不都相等, 可以以正八边形为例得出对角线长不都相等, 故本选项说法错误, 不符合题意;

D、各边相等的圆外切多边形不一定是正多边形, 例如, 圆外切菱形边数正多边形, 故本选项说法错误, 不符合题意;

故选: B.

【点睛】本题考查的是命题的真假判断, 正确的命题叫真命题, 错误的命题叫做假命题. 判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

6. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O , $AD \parallel BC$, $AC = BD$, 那么下列条件中不能判定四边形 $ABCD$ 是矩形的是 ()



A. $AD = BC$

B. $AB = CD$

C. $\angle DAB = \angle ABC$

D. $\angle DAB = \angle DCB$

【答案】B

【解析】

【分析】有一个角是直角的平行四边形是矩形; 有三个角是直角的四边形是矩形; 对角线相等的平行四边形是矩形, 依据矩形的判定进行判断即可.

【详解】解: A. 当 $AD = BC$, $AD \parallel BC$ 时, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 再依据 $AC = BD$, 可得四边形 $ABCD$ 是矩形;

B. 当 $AB = CD$, $AD \parallel BC$ 时, 四边形 $ABCD$ 不一定是平行四边形, 也可能是等腰梯形;

C. 当 $\angle DAB = \angle ABC$, $AD \parallel BC$ 时, $\angle DAB = \angle CBA = 90^\circ$, 再根据 $AC = BD$, 可得 $\triangle ABD \cong \triangle BAC$, 进而得到 $AD = BC$, 即可得到四边形 $ABCD$ 是矩形;

D. 当 $\angle DAB = \angle DCB$, $AD \parallel BC$ 时, $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$, 即可得出四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 再依据 $AC = BD$, 可得四边形 $ABCD$ 是矩形;

故选 B.

【点睛】此题考查矩形的判定, 解题关键在于掌握判定法则

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. $a^8 \div a^4 =$ _____.

【答案】 a^4

【解析】

【分析】 根据同底数幂除法的运算法则，进行运算，即可求得结果.

【详解】 解： $a^8 \div a^4 = a^{8-4} = a^4$,

故答案为： a^4 .

【点睛】 本题考查了同底数幂除法的运算法则，熟练掌握和运用同底数幂除法的运算法则是解决本题的关键.

8. 不等式组 $\begin{cases} 3-x < 0, \\ 2x-12 < 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $3 < x < 6$

【解析】

【分析】 先求出每个不等式的解集，然后取公共部分，即可得到答案.

【详解】 解： $\begin{cases} 3-x < 0, \\ 2x-12 < 0 \end{cases}$

解不等式组得： $\begin{cases} x > 3 \\ x < 6 \end{cases}$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $3 < x < 6$;

故答案为： $3 < x < 6$.

【点睛】 本题考查了解不等式组，解题的关键是掌握解不等式组的步骤.

9. 方程 $\sqrt{2x+3} = x$ 的解为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据无理方程的解法，首先，两边平方解出 x 的值，然后验根，解答即可.

【详解】 解： 两边平方得： $2x+3 = x^2$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0,$$

解方程得： $x_1 = 3$, $x_2 = -1$,

检验： 当 $x_1 = 3$ 时，方程的左边 = 右边，所以 $x_1 = 3$ 为原方程的解，

当 $x_2 = -1$ 时，原方程的左边 $\neq$ 右边，所以 $x_2 = -1$ 不是原方程的解.

故答案为 3.

【点睛】此题考查无理方程的解，解题关键在于掌握运算法则

10. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 3x + k = 0$ 有两个相等的实数根，那么实数 k 的值是_____.

【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】根据方程有两个相等的实数根并结合一元二次方程的根的判别式，即可得出关于 k 的一元一次方程，解方程即可得出结论.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 3x + k = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times k = 9 - 4k = 0,$$

$$\text{解得： } k = \frac{9}{4}.$$

$$\text{故答案为： } \frac{9}{4}.$$

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的根的判别式的知识，解题的关键根据方程解的情况结合根的判别式得出方程.

11. 如果某种商品每 8 千克的售价为 32 元，那么这种商品 m 千克的售价为_____元.

【答案】 $4m$

【解析】

【分析】先求出这种商品的单价，再乘以 m 即可.

【详解】解： $\because$ 这种商品的单价为 $32 \div 8 = 4$ 元，

$\therefore$ 这种商品 m 千克的售价为 $4m$ 元.

故答案为： $4m$.

【点睛】本题考查列代数式，明确单价、数量、总价之间的关系是解答本题的关键.

12. 正比例函数 $y = kx$ 中，如果函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k > 0$

【解析】

【分析】根据正比例函数的增减性即可确定 k 的取值范围.

【详解】解：在正比例函数 $y = kx$ 中，函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大，

$$\therefore k > 0,$$

故答案为： $k > 0$.

【点睛】本题考查了一次函数的性质，熟练掌握一次函数的增减性与系数的关系是解题的关键.

13. 在不透明的盒子中装有 5 个黑色棋子和 15 个白色棋子，每个棋子除颜色外都相同，任意摸出一个棋子，摸到黑色棋子的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 直接利用概率公式求解.

【详解】 任意摸出一个棋子，摸到黑色棋子的概率 $= \frac{5}{5+15} = \frac{1}{4}$.

故答案为 $\frac{1}{4}$.

【点睛】 本题考查了概率公式：随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 A 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$.

14. 为了了解全区近 4800 名初三学生数学学习状况，从中随机抽取 500 名学生的测试成绩作为样本，将他们的成绩整理后分组情况如下：(每组数据可含最低值，不含最高值)

分组 (分)	40 ~ 50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90	90 ~ 100
频数	12	18	160			
频率					0.18	0.04

根据上表信息，由此样本请你估计全区此次成绩在 70~80 分的人数大约是_____.

【答案】 1920

【解析】

【分析】 根据题意和表格中的数据，可以先计算出 80~90 和 90~100 的学生人数，然后即可计算出 70~80 的学生人数，再计算出全区此次成绩在 70~80 分的人数即可.

【详解】 解：由题意可得，

80~90 的学生有： $500 \times 0.18 = 90$ (人)，

90~100 学生有： $500 \times 0.04 = 20$ (人)，

$\therefore$ 样本中 70~80 的学生有： $500 - 12 - 18 - 160 - 90 - 20 = 200$ (人)，

$\therefore$ 估计全区此次成绩在 70~80 分的人数大约是 $4800 \times \frac{200}{500} = 1920$,

故答案为： 1920.

【点睛】 本题考查频数分布表、用样本估计总体，解答本题的关键是明确题意，求出样本中 70~80 分的人数.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上， $DE \parallel BC$, $BD = 2AD$, $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{n}$ ，那么

$AC = \rule{1cm}{0.4pt}$. (用 $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 表示).

【答案】 $\vec{m} + 3\vec{n}$

【解析】

【分析】 根据平行线分线段成比例定理可得, $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$, 结合向量的基本表示方法求得

$\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{DE} = 3\vec{n}$, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, 从而求得 $\overrightarrow{AC} = \vec{m} + 3\vec{n}$.

【详解】 解: $\because DE \parallel BC$, $BD = 2AD$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \vec{n},$$

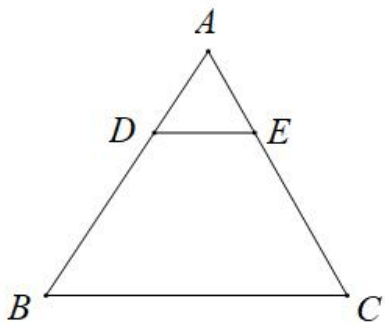
$$\therefore \overrightarrow{BC} = 3\vec{n}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{m},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BC} = 3\vec{n},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \vec{m} + 3\vec{n}.$$

故答案为: $\vec{m} + 3\vec{n}$.



【点睛】 本题考查了平行线分线段成比例定理, 根据已知向量表达未知向量, 充分运用相关几何性质, 读取图形信息是解题的关键.

16. 一架飞机在离地面 1200 米的上空测得地面控制点的俯角为 60° , 此时飞机与该地面控制点之间的距离是 $\rule{1cm}{0.4pt}$ 米.

【答案】 $800\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据题意假设未知数列方程求解即可.

【详解】解: 设此时飞机与该地面控制点之间的距离是 x 米, 则依题意得:

$$x \sin 60^\circ = 1200$$

$$\text{解得: } x = 800\sqrt{3}$$

即此时飞机与该地面控制点之间的距离是 $800\sqrt{3}$ 米,

【点睛】本题考查了三角函数的应用, 灵活运用合适的三角函数列出方程是解题的关键.

17. 新定义: 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点, 如果 $\widehat{DE}$ 上的所有点都在 $\triangle ABC$ 的内部或边上, 那么 $\widehat{DE}$ 称为 $\triangle ABC$ 的中内弧. 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC = 2\sqrt{2}$, 点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点, 如果 $\widehat{DE}$ 是 $\triangle ABC$ 的中内弧, 那么 $\widehat{DE}$ 长度的最大值等于_____.

【答案】 π

【解析】

【分析】首先根据题意可知: 当 DE 为直径时, $\widehat{DE}$ 长度取最大值, 再根据圆的周长公式, 即可求得

【详解】解: 由题知, 在 $\triangle ABC$ 内部以 DE 为直径的半圆弧 $\widehat{DE}$, 就是 $\triangle ABC$ 的最长中内弧,

$\therefore$ 点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\because \angle A = 90^\circ, \quad AB = AC = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2 \times (2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$$\therefore \widehat{DE} \text{ 长度} = \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi,$$

故答案为: π .

【点睛】本题主要考查了勾股定理, 三角形中位线定理, 弧长的计算, 理解题意, 得到当 DE 为直径时, $\widehat{DE}$ 长度取最大值是解题的关键.

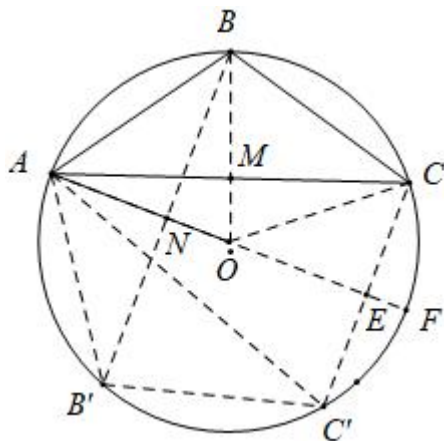
18. 已知钝角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $AB = BC$, 将 $\triangle ABC$ 沿 AO 所在直线翻折, 得到 $\triangle AB'C'$, 联结 BB' 、 CC' , 如果 $BB' : CC' = 4 : 3$, 那么 $\tan \angle BAC$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{55}}{11}$

【解析】

【分析】延长 AO 交 $\odot O$ 于 F ，设 BB' 、 CC' 交 AF 于 N 、 E ，连接 OC ， OB ，设 $BB' = 4x$ ， $CC' = 3x$ ，由翻折知 AF 是 BB' 、 CC' 的垂直平分线，则 $BN = 2x$ ， $CE = \frac{3x}{2}$ ，说明 $\triangle BON \cong \triangle COM$ (AAS)，得 $CM = BN = 2x$ ，则 $AC = 2CM = 4x$ ，再利用 $\triangle AMO \sim \triangle AEC$ ，可得 $OM = \frac{3}{8}r$ ，从而解决问题.

【详解】解：延长 AO 交 $\odot O$ 于 F ，设 BB' 、 CC' 交 AF 于 N 、 E ，连接 OC ， OB ，如图，



$$\because BB' : CC' = 4 : 3 \quad \therefore BB' : CC' = 4 : 3,$$

$$\text{设 } BB' = 4x, \quad CC' = 3x,$$

由翻折知 AF 是 BB' 、 CC' 的垂直平分线，

$$\therefore BN = 2x, \quad CE = \frac{3x}{2},$$

$$\because AB = BC,$$

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC},$$

$$\therefore \angle AOB = \angle BOC,$$

在 $\triangle BON$ 和 $\triangle COM$ 中，

$$\begin{cases} \angle BON = \angle COM \\ \angle CMO = \angle BNO = 90^\circ, \\ OB = OC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BON \cong \triangle COM \text{ (AAS)},$$

$$CM = BN = 2x,$$

$$\therefore AC = 2CM = 4x,$$

$$\because \angle AMO = \angle AEC, \quad \angle OAM = \angle CAE,$$

$$\therefore \triangle AMO \sim \triangle AEC,$$

$$\therefore \frac{OM}{CE} = \frac{OA}{AC},$$

$$\therefore OM = \frac{3}{8}r,$$

在 $Rt\triangle AOM$ 中, 由勾股定理得,

$$(2x)^2 + \left(\frac{3}{8}r\right)^2 = r^2,$$

$$\text{解得 } r = \frac{16\sqrt{55}}{55}x,$$

$$\therefore BM = \frac{2\sqrt{55}x}{11},$$

$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{BM}{CM} = \frac{\frac{2\sqrt{55}x}{11}}{2x} = \frac{\sqrt{55}}{11},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{55}}{11}.$$

【点睛】 本题主要考查了三角形的外接圆, 等腰三角形的性质, 翻折的性质, 相似三角形的判定与性质, 勾股定理, 三角函数等知识, 运用相似表示出 $OM = \frac{3}{8}r$ 是解题的关键, 综合性较强, 属于中考压轴题.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 先化简再计算: } \frac{a^2 - 4a + 4}{a^2 - 1} \div \frac{a^2 - 2a}{a + 1} + \frac{1}{a - 1}, \text{ 其中 } a = \sqrt{2}.$$

$$\text{【答案】 } \frac{2}{a}, \sqrt{2}$$

【解析】

【分析】 首先根据分式的混合运算进行化简, 再把 $a = \sqrt{2}$ 代入化简后得到的式子, 即可求得其结果.

$$\text{【详解】 解: 原式} = \frac{(a-2)^2}{(a+1)(a-1)} \times \frac{a+1}{a(a-2)} + \frac{1}{a-1}$$

$$= \frac{a-2}{a(a-1)} + \frac{1}{a-1}$$

$$= \frac{2a-2}{a(a-1)}$$

$$= \frac{2}{a}$$

当 $a = \sqrt{2}$ 时, 原式 $= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了分式的化简求值问题, 熟练掌握和运用分式化简求值的方法是解决本题的关键.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = 0. \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

【解析】

【详解】 $x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$

$$(x-y)^2 - 4y^2 = 0$$

又因: $x-y=2$ 代入上式

$$4 - 4y^2 = 0$$

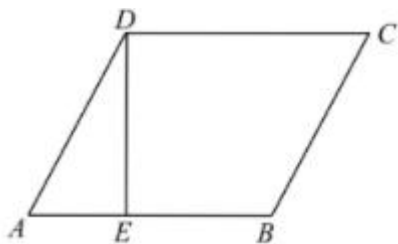
$$y = 1 \text{ 或 } y = -1$$

再将 $y=1$ 、 $y=-1$ 分别代入 $x-y=2$

$$\text{则 } x=1, x=3$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

21. 如图, 已知在平行四边形 $ABCD$ 中, 过点 D 作 $DE \perp AB$, 垂足为点 E , $AD = 17$, $AB = 20$, $\cos A = \frac{8}{17}$.



(1) 求平行四边形 $ABCD$ 的面积;

(2) 连接 CE , 求 $\sin \angle BCE$ 的值.

【答案】 (1) $S_{\square ABCD} = 300$

$$(2) \sin \angle BCE = \frac{36}{85}$$

【解析】

【分析】 对于 (1), 在 $Rt\triangle ADE$ 中, 根据 $\cos A = \frac{AE}{AD} = \frac{8}{17}$, 求出 AE , 再根据勾股定理求出 DE , 进而

求出面积即可;

对于 (2), 作 $EF \perp BC$, 根据平行四边形的性质得 $\sin \angle EBF = \frac{EF}{EB} = \frac{15}{17}$, 可求出 EB , 进而求出 EF ,

根据勾股定理求 CE , 最后根据 $\sin \angle BCE = \frac{EF}{CE}$ 得出答案.

【小问 1 详解】

$$\because DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle AED = 90^\circ.$$

$$\text{在 } Rt\triangle ADE \text{ 中, } \cos A = \frac{AE}{AD} = \frac{8}{17}.$$

$$\text{又 } AD = 17,$$

$$\therefore AE = 8.$$

$$\text{在 } Rt\triangle ADE \text{ 中, } DE^2 + AE^2 = AD^2,$$

$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$$

$$\therefore S_{ABCD} = AB \cdot DE = 20 \times 15 = 300.$$

【小问 2 详解】

过 E 作 $EF \perp BC$, 与 CB 的延长线交于点 F .

$$\because EF \perp CB,$$

$$\therefore \angle EFC = 90^\circ.$$

$$\because \square ABCD,$$

$$\therefore AD \parallel BC.$$

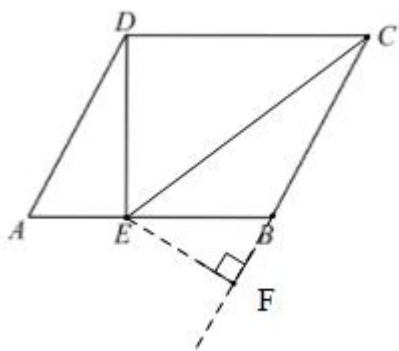
$$\therefore \angle A = \angle EBF.$$

$$\text{在 } Rt\triangle EBF \text{ 中, } \sin \angle EBF = \frac{EF}{EB} = \sin A = \frac{DE}{AD} = \frac{15}{17}, \text{ 又 } EB = AB - AE = 20 - 8 = 12,$$

$$\therefore EF = \frac{180}{17}.$$

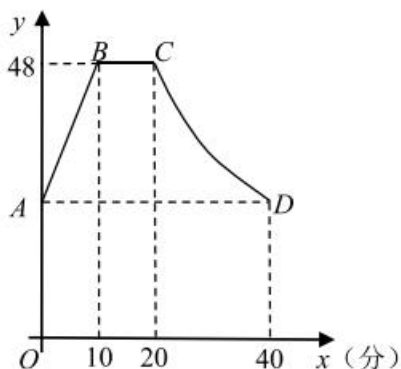
$$\text{在 } Rt\triangle EDC \text{ 中, } DE^2 + DC^2 = EC^2, EC = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25.$$

$$\text{在 } Rt\triangle EFC \text{ 中, } \sin \angle BCE = \frac{EF}{CE} = \frac{\frac{180}{17}}{25} = \frac{36}{85}.$$



【点睛】本题主要考查了平行四边形的性质，锐角三角函数，勾股定理等，构造直角三角形是解题的关键.

22. 通过实验研究发现：初中生在数学课上听课注意力指标数随上课时间的变化而变化，上课开始时，学生兴趣激增，中间一段时间，学生的兴趣保持平稳状态，随后开始分散. 学生注意力指标数 y 随时间 x (分) 变化的函数图像如图所示，当 $0 \leq x < 10$ 和 $10 \leq x < 20$ 时，图像是线段；当 $20 \leq x \leq 40$ 时，图像是双曲线的一部分，根据函数图像回答下列问题：



(1) 点 A 的注意力指标数是_____.

(2) 当 $0 \leq x < 10$ 时，求注意力指标数 y 随时间 x (分) 的函数解析式；

(3) 张老师在一节课上讲解一道数学综合题需要 21 分钟，他能否经过适当的安排，使学生在听这道综合题的讲解时，注意力指标数都不低于 36？请说明理由.

【答案】(1) 24 (2) $y = \frac{12}{5}x + 24$

(3) 张老师能经过适当安排，使学生在听这道综合题的讲解时，注意力指标数都不低于 36，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 点 A 的注意力指标数是 A 点的纵坐标， A 点的纵坐标与 D 点纵坐标相等，将 C 点坐标代入 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，求出双曲线的函数表达式，再求出 D 点的坐标即可.

(2) 由图可知，当 $0 \leq x < 10$ 时，求注意力指标数 y 是随时间 x 的一次函数，将点 A 和点 B 的坐标代入 $y = kx + b$ ，即可求出函数表达式.

(3) 要求 21 分钟注意力指标数都不低于 36, 则根据函数表达式求出注意力指数不低于 36 的 x 的取值范围即可.

【小问 1 详解】

解: 设双曲线的函数解析式为: $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$

把 $C(20, 48)$ 代入得: $48 = \frac{k}{20}$, $k=960$

$\therefore$ 双曲线的函数解析式为: $y = \frac{960}{x}$

当 $x=40$ 时: $y = \frac{960}{40} = 24$

即 $D(40, 24)$

$\therefore$ 点 A 的注意力指标数为 24

【小问 2 详解】

当 $0 \leq x < 10$ 时, 设 AB 的解析式为 $y = kx + b$,

把 A 在 $(0, 24)$, $B(10, 48)$ 代入;

$$\therefore \begin{cases} 24 = b, \\ 48 = 10k + b. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{12}{5}, \\ b = 24. \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{12}{5}x + 24.$$

【小问 3 详解】

当 $y \geq 36$ 时, $\frac{12}{5}x + 24 \geq 36$, 解之得 $x \geq 5$

设当 $20 \leq x \leq 40$ 时, 反比例函数解析式为 $y = \frac{m}{x}$,

将 $B(20, 48)$ 代入得 $m = 960$.

$$\therefore y = \frac{960}{x}.$$

当 $y \geq 36$ 时, $\frac{960}{x} \geq 36$,

解之得 $x \leq \frac{80}{3}$.

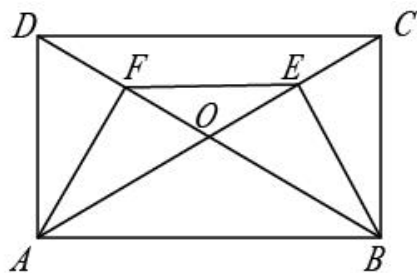
∴ 当 $5 \leq x \leq \frac{80}{3}$ 时，注意力指标数都不低于 36.

$$\text{而 } \frac{80}{3} - 5 = \frac{65}{3} \geq 21,$$

∴ 张老师能经过适当安排，使学生在听这道综合题的讲解时，注意力指标数都不低于 36.

【点睛】 本题主要考查了一次函数和反比例函数的应用，运用待定系数法求解出相关函数表达式以及正确的理解图像是解题的关键. 在求解 x 的取值范围时，注意结合图像，求出两个端点值.

23. 已知：如图，矩形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，点 E 、 F 分别是线段 OC 、 OD 的中点，联结 AF 、 BE .



(1) 求证：四边形 $ABEF$ 是等腰梯形；

(2) 过点 O 作 $OM \perp AB$ ，垂足为点 M ，联结 ME ，如果 $\angle OME = \angle BAC$ ，求证：四边形 $AMEF$ 是菱形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据矩形的性质得出 $AB \parallel CD$ ， $AO = OC$ ， $BO = DO$ ， $AC = BD$ ，求出 $DO = CO$ ， $AO = BO$ ，根据三角形的中位线性质得出 $EF \parallel DC$ ， $OE = \frac{1}{2}OC$ ， $OF = \frac{1}{2}OD$ ，求出 $EF \parallel AB$ ， $AE = BF$ ，根据等腰梯形的判定得出即可；

(2) 根据三角形的中位线性质得出 $EF = \frac{1}{2}CD$. 求出 $AM = BM = \frac{1}{2}AB$ ，求出 $EF = AM$ ，根据平行四边形的判定得出四边形 $AMEF$ 和四边形 $BMFE$ 是平行四边形. 求出 $OB \perp ME$ ，根据菱形的判定得出平行四边形 $BMFE$ 是菱形，根据菱形的性质得出 $BE = BM$ ，求出 $AF = AM$ 即可.

【小问 1 详解】

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AB \parallel CD, AO = OC, BO = DO, AC = BD,$$

$$\therefore DO = CO, AO = BO,$$

∵ 点 E 、 F 分别是线段 OC 、 OD 的中点，

$$\therefore EF \parallel DE, OE = \frac{1}{2}OC, OF = \frac{1}{2}OD,$$

$$\therefore EF \parallel AB, OE = OF,$$

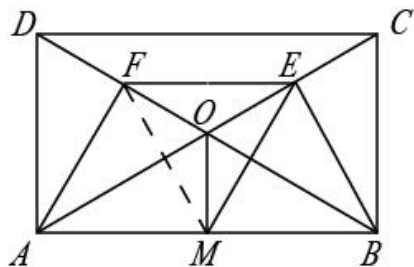
$$\therefore OF + OB = OE + OA,$$

即 $AE = BF$,

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是等腰梯形;

【小问 2 详解】

证明: 连接 MF ,



$\because$ 点 E 、 F 分别是线段 OC 、 OD 的中点,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}CD,$$

$\because OA = OB, OM \perp AB,$

$$\therefore AM = BM = \frac{1}{2}AB,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB = CD,$$

$$\therefore EF = AM,$$

由 (1) 知: $EF \parallel AM$,

$\therefore$ 四边形 $AMEF$ 是平行四边形,

同理: 四边形 $BMFE$ 是平行四边形,

$\because OA = OB,$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA,$$

又 $\because \angle OME = \angle BAC,$

$$\therefore \angle OME = \angle OBA,$$

$\because \angle OME + \angle BME = 90^\circ,$

$$\therefore \angle OBA + \angle BME = 90^\circ,$$

$$\therefore OB \perp ME,$$

$\therefore$ 平行四边形 $BMFE$ 是菱形,

$\therefore BE = BM$,

又四边形 $ABEF$ 是等腰梯形,

$\therefore BE = AF$,

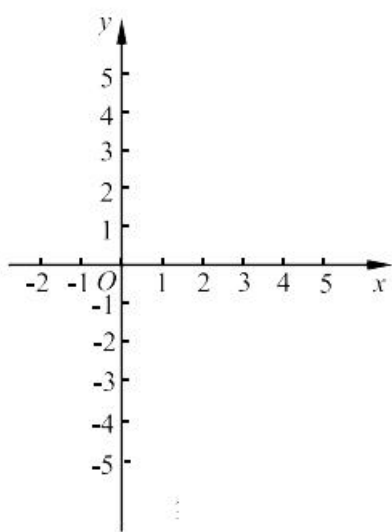
又 $\because BM = AM$,

$\therefore AF = AM$,

$\therefore$ 四边形 $AMFE$ 是菱形.

【点睛】 本题考查了等腰梯形的性质和判定, 矩形的性质, 平行四边形的判定和性质, 菱形的判定和性质等知识点, 能灵活运用等腰梯形的性质和判定、矩形的性质、平行四边形的判定和性质、菱形的判定和性质进行推理是解此题的关键.

24. 如图, 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于点 $A(4, 0)$, 与 y 轴相交于点 $B(0, 3)$, 在 x 轴上有一动点 $E(m, 0) (0 < m < 4)$, 过点 E 作 x 轴的垂线交线段 AB 于点 N , 交抛物线于点 P , 过 P 作 $PM \perp AB$, 垂足为点 M .



(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 设 $\triangle PMN$ 的周长为 C_1 , $\triangle AEN$ 的周长为 C_2 , 如果 $\frac{C_1}{C_2} = \frac{6}{5}$, 求点 P 的坐标;

(3) 如果以 N 为圆心, NA 为半径的圆与以 OB 为直径的圆内切, 求 m 的值.

【答案】 (1) $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3$

(2) 点 P 的坐标是 $\left(2, \frac{9}{2}\right)$

(3) 当 N 与 $\odot Q$ 内切时, $m = \frac{20}{13}$

【解析】

【分析】(1) 运用待定系数法即可求得抛物线解析式;

(2) 先证明 $\triangle PMN \sim \triangle AEN$, 根据相似三角形性质可得出: $\frac{PN}{AN} = \frac{6}{5}$. 利用待定系数法可得直线 AB 的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x + 3$. 设点 $P\left(m, -\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{4}m + 3\right) (0 < m < 4)$, 则 $PN = -\frac{3}{4}m^2 + 3m$, $AN = \frac{5}{4}(4-m)$,

建立方程求解即可得出答案;

(3) 设 OB 的中点为点 Q , 则点 Q 的坐标 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, 过点 N 作 $NK \perp y$ 轴于点 K , 则 $NK = m$,

$KQ = -\frac{3}{4}m + 3 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}m + \frac{3}{2}$, 运用勾股定理可得 $QN = \sqrt{m^2 + \left(-\frac{3}{4}m + \frac{3}{2}\right)^2}$, 根据两圆内切建立方程

求解即可得出答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(4, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$

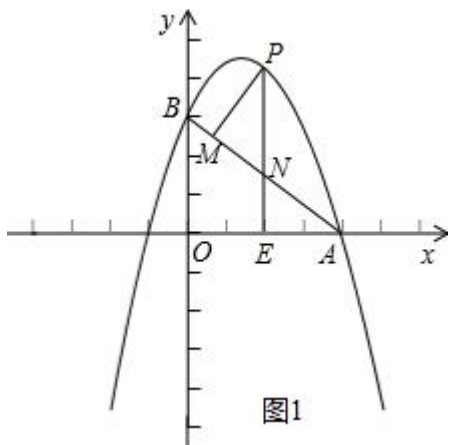
$$\therefore \begin{cases} -12 + 4b + c = 0, \\ 3 = c. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b = \frac{9}{4}, \\ c = 3. \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3;$$

【小问 2 详解】

解: $\because PM \perp AB, PE \perp x$ 轴,



$$\therefore \angle PMN = \angle PEA = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle PNM = \angle ANE,$$

$$\therefore \triangle PMN \sim \triangle AEN,$$

$$\therefore \frac{C_{\triangle PMN}}{C_{\triangle AEN}} = \frac{PN}{AN}. \quad \text{即} \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{PN}{AN}.$$

$$\text{又} \because \frac{C_1}{C_2} = \frac{6}{5},$$

$$\therefore \frac{PN}{AN} = \frac{6}{5},$$

设直线 $AB: y = kx + b$, 又直线 AB 经过点 $A(4, 0)$, 点 $B(0, 3)$,

$$\therefore \begin{cases} 4k + b = 0 \\ 3 = b \end{cases} \therefore \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x + 3,$$

$\therefore$ 点 P 在抛物线 $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3$ 上,

$$\therefore \text{设点 } P\left(m, -\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{4}m + 3\right),$$

$\therefore$ 点 N 在直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 上,

$$\text{设点 } N\left(m, -\frac{3}{4}m + 3\right),$$

$$\therefore PN = \left(-\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{4}m + 3\right) - \left(-\frac{3}{4}m + 3\right) = -\frac{3}{4}m^2 + 3m,$$

$$\text{又 } AN = \sqrt{(m-4)^2 + \left(-\frac{3}{4}m+3\right)^2} = \frac{5}{4}(4-m),$$

$$\therefore \frac{-\frac{3}{4}m^2 + 3m}{\frac{5}{4}(4-m)} = \frac{6}{5}. \text{ 解之得 } m_1 = 2, m_2 = 4 \text{ (不合题意, 舍去),}$$

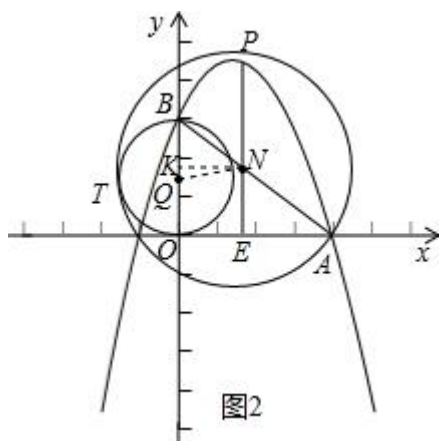
$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标是 } \left(2, \frac{9}{2}\right);$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: 设 } OB \text{ 的中点为点 } Q, \text{ 则点 } Q \text{ 的坐标 } \left(0, \frac{3}{2}\right),$$

$$\text{又点 } N \left(m, -\frac{3}{4}m+3\right),$$

$$\text{过点 } N \text{ 作 } NK \perp y \text{ 轴于点 } K, \text{ 则 } NK = m, \quad KQ = -\frac{3}{4}m+3 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}m + \frac{3}{2},$$



在 $Rt\triangle NQK$ 中,

$$\therefore QN = \sqrt{NK^2 + KQ^2} = \sqrt{m^2 + \left(-\frac{3}{4}m + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16}m^2 - \frac{9}{4}m + \frac{9}{4}},$$

$$\text{当 } N \text{ 与 } \odot Q \text{ 内切时, } QN = \left|AN - \frac{1}{2}OB\right|,$$

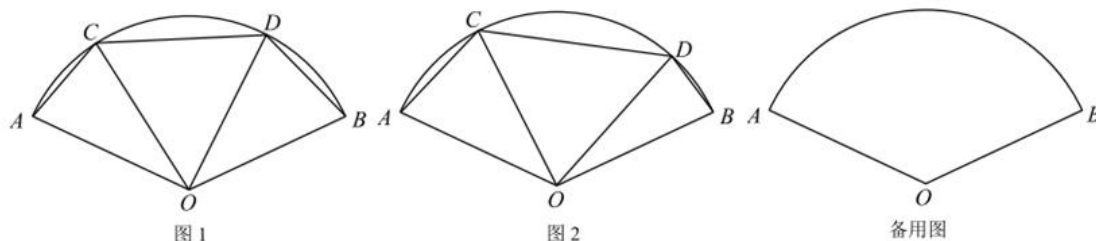
$$\therefore \sqrt{\frac{25}{16}m^2 - \frac{9}{4}m + \frac{9}{4}} = \frac{5}{4}(4-m) - \frac{3}{2},$$

$$\text{解之得: } m = \frac{20}{13},$$

$\therefore$ 当 N 与 $\odot Q$ 内切时, $m = \frac{20}{13}$.

【点睛】本题是二次函数综合题,考查了待定系数法求函数解析式,二次函数图像上点的坐标特征,相似三角形的判定和性质,勾股定理,两圆内切的性质等,本题综合性强,有一定难度,第(2)问运用相似三角形周长比等于相似比建立方程求解是解题关键,第(3)问根据圆与圆内切的性质建立方程求解是解题关键.

25. 已知在扇形 AOB 中, 点 C 、 D 是 $\widehat{AB}$ 上的两点, 且 $\widehat{CD} = 2\widehat{AC}$, $\angle AOB = 130^\circ$, $OA = 10$.



- (1) 如图 1, 当 $OD \perp OA$ 时, 求弦 CD 的长;
- (2) 如图 2, 联结 AD , 交半径 OC 于点 E , 当 $OD \parallel AC$ 时, 求 $\frac{AE}{ED}$ 的值;
- (3) 当四边形 $BOCD$ 是梯形时, 试判断线段 AC 能否成为 $\odot O$ 内接正多边形的边? 如果能, 请求出这个正多边形的边数; 如果不能, 请说明理由.

【答案】(1) $CD = 10$

$$(2) \frac{AE}{DE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(3) 线段 AC 能成为 $\odot O$ 的内接正多边形的边, 边数为 18

【解析】

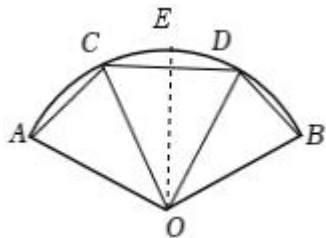
【分析】(1) 取 $\widehat{CD}$ 的中点 E , 连接 OE , 根据圆的有关性质可得 $\angle COE = \angle EOD = \angle AOC = \alpha$, 然后由余角的性质及等边三角形的判定与性质可得答案;

(2) 由平行线的性质及三角形内角和定理可得 $\angle AOD = 108^\circ$. 然后根据相似三角形的判定与性质可得答案;

(3) 根据圆内接多边形的性质及三角形的内角和定理分两种情况进行解答：① $BD \parallel OC$ ；② $CD \parallel OB$ 。

【小问 1 详解】

解：设 $\angle AOC = \alpha$ ，取 $\widehat{CD}$ 的中点 E ，连接 OE ，



$$\therefore \widehat{CD} = 2\widehat{CE} = 2\widehat{DE},$$

$$\text{又} \because \widehat{CD} = 2\widehat{AC},$$

$$\therefore \widehat{CE} = \widehat{DE} = \widehat{AC},$$

$$\therefore \angle COE = \angle EOD = \angle AOC = \alpha,$$

$$\because OD \perp OA,$$

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC + \angle COE + \angle EOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \alpha + \alpha + \alpha = 90^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle COD = 60^\circ,$$

$$\because OC = OD,$$

$$\therefore \triangle COD \text{ 是等边三角形},$$

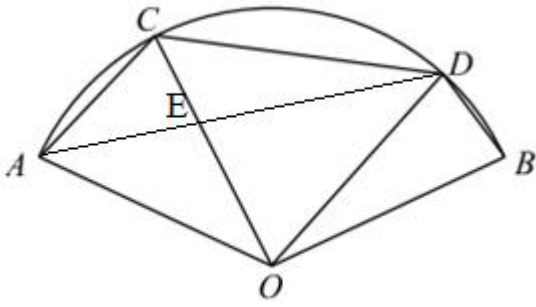
$$\therefore CD = OC = OA,$$

$$\text{又 } OA = 10,$$

$$\therefore CD = 10;$$

【小问 2 详解】

解：



$$\because OD \parallel AC,$$

$$\therefore \angle OCA = \angle COD = 2\alpha,$$

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle OCA = \angle OAC = 2\alpha,$$

在 $\triangle AOC$ 中,

$$\therefore \angle OAC + \angle OCA + \angle AOC = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 36^\circ, \angle COD = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 108^\circ,$$

在 $\triangle AOD$ 中,

$$\because OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA,$$

$$\because \angle OAD + \angle ODA + \angle AOD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle OED = \angle OAD + \angle AOC = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle OED = \angle COD,$$

$$\therefore ED = OD = 10,$$

$$\because \angle OAE = \angle OAD, \angle AOE = \angle ADO,$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle ADO,$$

$$\therefore \frac{OA}{AD} = \frac{AE}{OA},$$

设 $AE = x$, 则 $AD = 10 + x$,

$$\therefore \frac{10}{10+x} = \frac{x}{10}. \text{ 解之得 } x = 5\sqrt{5} - 5,$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{5\sqrt{5}-5}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

【小问3 详解】

解：当四边形 $BOCD$ 是梯形时，① $BD \parallel OC$,

$$\therefore \angle ODB = \angle COD = 2\alpha,$$

$$\therefore OB = OD,$$

$$\therefore \angle OBD = \angle ODB = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle AOC + \angle COD + \angle DOB = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = 130^\circ - 3\alpha,$$

在 $\triangle BOD$ 中,

$$\therefore \angle OBD + \angle ODB + \angle BOD = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\alpha + 2\alpha + 130^\circ - 3\alpha = 180^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 50^\circ.$$

当 $\alpha = 50^\circ$ 时, $\angle BOD = 130^\circ - 3\alpha < 0$, 不合题意, 舍去.

② $CD \parallel OB$,

$$\therefore \angle ODC = \angle BOD = 130^\circ - 3\alpha,$$

$$\therefore OC = OD,$$

$$\therefore \angle OCD = \angle ODC = 130^\circ - 3\alpha,$$

在 $\triangle COD$ 中,

$$\therefore \angle OCD + \angle ODC + \angle COD = 180^\circ,$$

$$\therefore 130 - 3\alpha + 130^\circ - 3\alpha + 2\alpha = 180^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 20^\circ,$$

$$\therefore n = \frac{360^\circ}{20^\circ} = 18.$$

$\therefore$ 线段 AC 能成为 $\odot O$ 的内接正多边形的边, 边数为 18.

【点睛】 本题考查的是圆的弧、弦、角之间的关系、三角形的内角和定理、圆内接多边形的性质等知识, 正确作出辅助线是解决此题的关键.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能