

2021 学年第二学期初三数学练习卷

一、选择题

1. 如果实数 a 与 3 互为相反数, 那么 a 是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 3 D. -3

【答案】D

【解析】

【分析】仅仅只有符号不同的两个数互为相反数, 根据相反数的定义可得答案.

【详解】解: $\because$ 实数 a 与 3 互为相反数,

$$\therefore a = -3,$$

故选 D

【点睛】本题考查的是实数的相反数的含义, 掌握“相反数的定义”是解本题的关键.

2. $\sqrt{12} - \sqrt{3}$ 的计算结果是 ()

- A. 2 B. 3 C. $\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次根式的减法法则可进行求解.

【详解】解: 原式 $= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$;

故选: C.

【点睛】本题主要考查二次根式的减法, 熟练掌握二次根式的减法是解题的关键.

3. 据 2022 年北京冬奥会新闻发言人透露, 中国大陆地区约 316000000 人次收看了冬奥会的开幕式. 数据 316000000 用科学记数法表示为 ()

- A. 316×10^6 B. 31.6×10^7 C. 3.16×10^8 D. 3.16×10^9

【答案】C

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正整数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负整数.

【详解】解: 数字 316000000 科学记数法可表示为 3.16×10^8 .

故选 C.

【点睛】本题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. 小明为了解本班同学一周课外书的阅读景, 随机抽取班上 20 名同学进行调查, 调查结果如下表, 那么这 20 名同学该周课外书阅读量的平均数是 ()

阅读量 (本/周)	0	1	2	3	4
人数	2	5	4	5	4

A. 2 本

B. 2.2 本

C. 3 本

D. 3.2 本

【答案】B

【解析】

【分析】根据表格及平均数可直接进行求解.

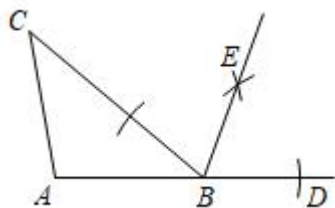
【详解】解: 由题意得:

这 20 名同学该周课外书阅读量的平均数为 $\frac{0 \times 2 + 1 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 4}{20} = 2.2$ (本);

故选: B.

【点睛】本题主要考查平均数, 熟练掌握平均数的求法是解题的关键.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 100^\circ$, 点 D 在边 AB 的延长线上, 根据图中尺规作图的痕迹, 可知 $\angle DBE$ 的度数为 ()



A. 60°

B. 65°

C. 70°

D. 75°

【答案】C

【解析】

【分析】根据等边对等角先求解 $\angle ABC$, 再求解 $\angle CBD$, 结合尺规作图可得 BE 平分 $\angle CBD$, 从而可得答案.

【详解】解: $\because AB = AC, \angle A = 100^\circ$,

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ,$$

由作图可得: $\angle CBD = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$,

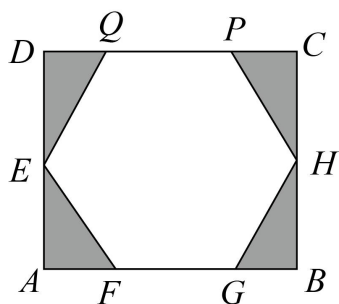
由作图可得: BE 是 $\angle CBD$ 的角平分线,

$$\angle DBE = \frac{1}{2} \times 140^\circ = 70^\circ.$$

故选 C

【点睛】 本题考查的是等腰三角形的性质, 三角形内角和定理的应用, 角平分线的作图, 掌握“等腰三角形的等边对等角”是解本题的关键.

6. 如果一个矩形经过一个多边形的各顶点, 那么我们把这个矩形叫做这个多边形的外接矩形. 如图, 矩形 $ABCD$ 是正六边形 $EFGHPQ$ 的外接矩形, 如果正六边形 $EFGHPQ$ 的边长为 2, 那么矩形 $ABCD$ 长边与短边的比是 ()



A. $2:\sqrt{3}$

B. $2:\sqrt{2}$

C. $3:\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}:1$

【答案】 A

【解析】

【分析】由题意易得 $\angle EQP = \angle HPQ = 120^\circ$, 则有 $\angle DQE = \angle CPH = 60^\circ$, 然后可证 $\triangle DQE \cong \triangle CPH$, 则 $DQ = CP$, 同理可得 $\triangle DQE \cong \triangle AFE$, 进而可得 $DE = AE$, 最后根据含 30° 直角三角形的性质可求解.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle D = \angle C = \angle A = 90^\circ,$$

由正六边形 $EFGHPQ$ 可知: $\angle EQP = \angle HPQ = 120^\circ$, $EQ = HP = 2$,

$$\therefore \angle DQE = \angle CPH = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle DQE \cong \triangle CPH \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DQ = CP,$$

同理可得 $\triangle DQE \cong \triangle AFE$,

$$\therefore DE=AE,$$

$$\because \angle DQE=\angle CPH=60^{\circ}, \quad \angle D=\angle C=\angle A=90^{\circ},$$

$$\therefore \angle DEQ=30^{\circ},$$

$$\therefore DQ=\frac{1}{2}EQ=1,$$

$$\therefore DE=\sqrt{EQ^2-DQ^2}=\sqrt{3},$$

$$\therefore CD=4, AD=2\sqrt{3},$$

$$\therefore CD:AD=2:\sqrt{3};$$

故选 A.

【点睛】 本题主要考查矩形的性质、正多边形的性质、勾股定理及含 30 度直角三角形的性质，熟练掌握矩形的性质、正多边形的性质、勾股定理及含 30 度直角三角形的性质是解题的关键.

二、填空题

7. -27 的立方根是_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 根据立方根的定义求解即可.

【详解】 解: -27 的立方根是 -3 ,

故答案为: -3 .

【点睛】 本题考查了立方根的定义, 属于基础题型, 熟知立方根的概念是解题的关键.

8. 如果单项式 $3x^m y$ 与 $-5x^3 y^{n-1}$ 是同类项, 那么 m^n 的值是_____.

【答案】 9

【解析】

【分析】 利用同类项的含义可得: $m=3$ 且 $n-1=1$, 再利用乘方运算的含义可得答案.

【详解】 解: $\because$ 单项式 $3x^m y$ 与 $-5x^3 y^{n-1}$ 是同类项,

$$\therefore m=3 \text{ 且 } n-1=1,$$

$$\text{解得: } n=2,$$

$$\therefore m^n=3^2=9,$$

故答案为: 9

【点睛】 本题考查的是同类项的含义，有理数乘方的含义，掌握“同类项的概念”是解本题的关键.

9. 因式分解: $mn - m^2 =$ _____.

【答案】 $m(n - m)$

【解析】

【分析】 提取公因式 m ，即可得到答案.

【详解】 解: $mn - m^2 = m(n - m)$,

故答案为: $m(n - m)$

【点睛】 本题考查的是提公因式法分解因式，掌握“公因式的确定”是解本题的关键.

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ，那么 $f(2) =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 把 $x = 2$ 代入函数解析式进行计算即可.

【详解】 解: $\because$ 函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$,

$$\therefore f(2) = \frac{1}{2-1} = 1,$$

故答案为: 1

【点睛】 本题考查的是已知函数的自变量求解函数值，理解题意是解本题的关键.

11. 有一枚材质均匀的正方体骰子，它的六个面上分别有 1 点、2 点、...6 点的标记，掷一次骰子，向上的一面出现的点数是 2 的倍数的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 根据随机事件概率公式即可求解.

【详解】 解: 掷一次骰子可能出现的点数共有 6 种情况,

其中出现的点数是 2 的倍数的有 3 种情况,

$\therefore$ 向上的一面出现的点数是 2 的倍数的概率为: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点睛】 本题考查了随机事件概率，熟练掌握随机事件概率公式是解题的关键.

12. 某眼镜店暑假期间开展学生配镜优惠活动. 某款式眼镜的广告如图，那么广告牌上填的原价是_____

元.

原价：_____元
暑假八折优惠，现价：160 元

【答案】 200

【解析】

【分析】 根据题意可直接进行求解.

【详解】 解：由题意得：原价为 $160 \div 0.8 = 200$ （元）；

故答案为 200.

【点睛】 本题主要考查有理数除法的应用，解题的关键是理解题意.

13. 如果关于 x 是方程 $x^2 - x + m = 0$ 有两个相等的实数根，那么 m 的值等于_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 一元二次方程有两个相等的实根，即根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，即可求 m 值.

【详解】 解： $\because$ 方程 $x^2 - x + m = 0$ 有两个相等的实数根，

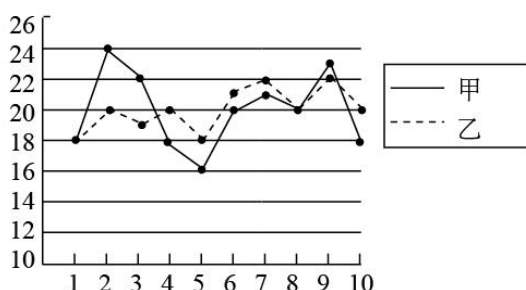
$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4m = 0$,

解得 $m = \frac{1}{4}$,

故答案为： $\frac{1}{4}$.

【点睛】 此题主要考查的是一元二次方程的根判别式，当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时，方程有两个相等的实根，当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时，方程有两个不相等的实根，当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时，方程无实数根.

14. 甲、乙两地 4 月下旬的日平均气温统计图如图所示，那么由图中信息可知甲、乙两地这 10 天日平均气温比较稳定的是_____。（填“甲”或“乙”）



【答案】 乙

【解析】

【分析】由方差的意义知，波动小者方差小，根据气温统计图可知：乙地的平均气温比较稳定，波动小，从而可得答案.

【详解】解：观察平均气温统计图可知：乙地的平均气温比较稳定，波动小；故乙地的日平均气温的方差小.

故答案为：乙.

【点睛】本题考查方差的意义：方差反映了一组数据的波动大小，方差越大，波动性越大，反之也成立.

15. 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, E 是腰 BC 的中点, 联结 AE . 如果设 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AE} =$ _____ (含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)

【答案】 $2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$

【解析】

【分析】先证明 $BE = CE = \frac{1}{2}BC$, 再利用三角形法则求出 $\overrightarrow{AE}$, 从而可得答案.

【详解】解：如图,

$\because E$ 是腰 BC 的中点,

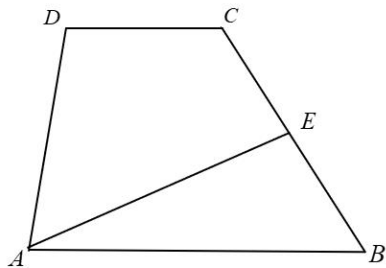
$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC,$$

$\because AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

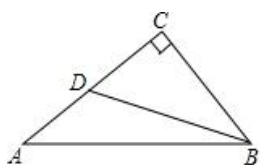
$$= 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}.$$

故答案为: $2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$.



【点睛】本题考查梯形的性质，平面向量，三角形法则，熟练的应用三角形法则表示向量之间的关系是解本题的关键.

16. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 在 AC 上, $\angle DBC = \angle A$. 若 $AC = 4$, $\cos A = \frac{4}{5}$, 则 BD 的长度为



【答案】 $\frac{15}{4}$

【解析】

【分析】在 $\triangle ABC$ 中，由三角函数求得 AB ，再由勾股定理求得 BC ，最后在 $\triangle BCD$ 中由三角函数求得 BD 。

【详解】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $\cos A = \frac{4}{5}$ ，

$$\therefore AB = \frac{AC}{\cos A} = 5,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\because \angle DBC = \angle A,$$

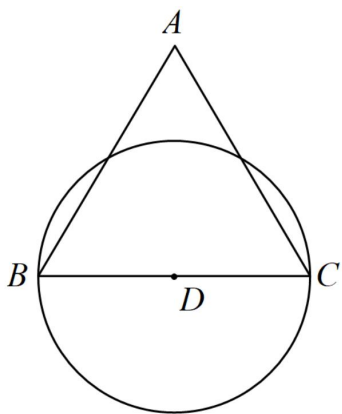
$$\therefore \cos \angle DBC = \cos \angle A = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore BD = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4},$$

故 BD 的长度为 $\frac{15}{4}$ 。

【点睛】本题主要考查了勾股定理，解直角三角形的应用，解题关键是解直角三角形。

17. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2\sqrt{3}$ ，如果以 BC 为直径的 $\odot D$ 和以 A 为圆心的 $\odot A$ 相切，那么 $\odot A$ 的半径 r 的值是_____。

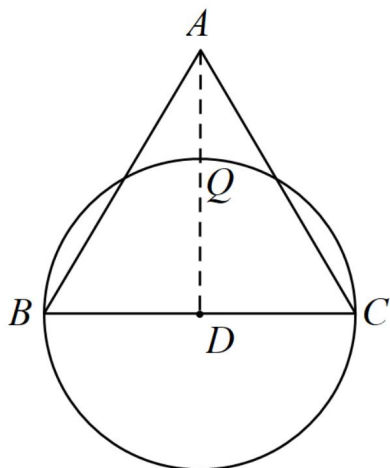


【答案】 $3 - \sqrt{3}$ 或 $3 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】如图，连接 DA ，交 $\odot D$ 于 Q ，先求解 DB, DC, AD ，再利用两圆相切的性质可得答案.

【详解】解：如图，连接 DA ，交 $\odot D$ 于 Q ，



$\because$ 等边 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore AB = BC = AC = 2\sqrt{3}, BD = CD = \sqrt{3}, \angle B = 60^\circ$ ，

$\therefore AD \perp BC, \angle BAD = 30^\circ$ ，

$\therefore AD = AB \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ ，

而 $DQ = \sqrt{3}$ ，

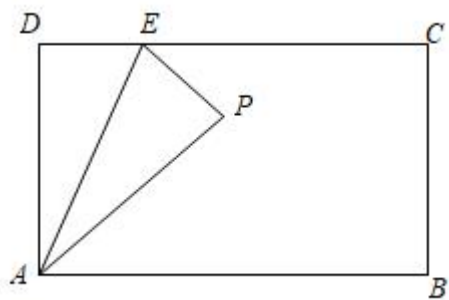
$\therefore$ 以 BC 为直径的 $\odot D$ 和以 A 为圆心的 $\odot A$ 相切，

$\therefore \odot A$ 的半径为： $r = 3 - \sqrt{3}$ ，或 $r = 3 + \sqrt{3}$ 。

故答案为： $3 - \sqrt{3}$ 或 $3 + \sqrt{3}$

【点睛】本题考查的是等边三角形的性质，锐角三角函数的应用，圆与圆相切的性质，掌握“两圆相切，连心线过切点”是解本题的关键。

18. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8, AD = 4$ ，点 E 在边 DC 上，联结 AE ，将矩形沿 AE 所在直线翻折，点 D 的对应点为 P ，联结 PE 。如果 $\angle CEP = 30^\circ$ ，那么 DE 的长度是_____。

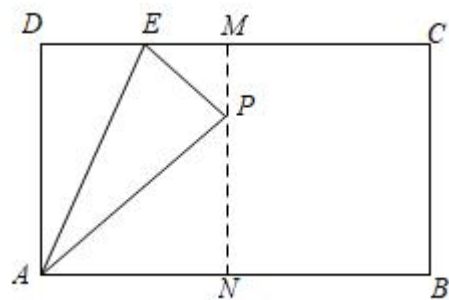


【答案】 $8-4\sqrt{3}$ ## $-4\sqrt{3}+8$

【解析】

【分析】由题意作图，过点 P 作 $PM \perp CD$ 于点 M ，延长 MP ，交 AB 于点 N ，然后可证四边形 $ANMD$ 是矩形，则有 $\angle PEM = \angle APN = 30^\circ$ ，进而根据含 30° 度直角三角形的性质可进行求解.

【详解】解：如图，过点 P 作 $PM \perp CD$ 于点 M ，延长 MP ，交 AB 于点 N ，



在矩形 $ABCD$ 中， $AB = CD = 8, AD = 4, \angle D = \angle DAB = 90^\circ$ ， $CD \parallel AB$ ，

$$\therefore \angle EMP = \angle PNA = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ANMD$ 是矩形，

$$\therefore AD = MN = 4,$$

由折叠的性质可知： $AD = AP = 4, DE = PE, \angle D = \angle APE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle PEM + \angle EPM = \angle EPM + \angle APN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PEM = \angle APN,$$

$$\therefore \angle CEP = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle PEM = \angle APN = 30^\circ,$$

$$\therefore AN = 2,$$

$$\therefore PN = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore PM = MN - PN = 4 - 2\sqrt{3},$$

$$\therefore PE = 2PM = 8 - 4\sqrt{3},$$

$$\therefore DE = 8 - 4\sqrt{3};$$

故答案为 $8 - 4\sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查矩形的性质与判定、折叠的性质及含 30° 直角三角形的性质，熟练掌握矩形的性质与判定、折叠的性质及含 30° 直角三角形的性质是解题的关键.

三、解答题

19. 先化简，再求值： $(1 - \frac{1}{x+2}) \div \frac{x^2-1}{x+2}$ ，其中 $x = \sqrt{2} + 1$.

【答案】 $\frac{1}{x-1}; \frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】

【分析】

先将括号内的项进行通分化简，再分式的除法法则，结合平方差公式因式分解，化简，最后代入数值解题即可.

【详解】 解： 原式 $= \frac{x+2-1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{(x+1)(x-1)}$

$$= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{x-1},$$

当 $x = \sqrt{2} + 1$ 时，

$$\text{原式} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1 - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【分析】 本题考查分式的混合运算、分式的化简求值等知识，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键.

20. 解方程 $\begin{cases} x - y = 2 \text{ ①} \\ x^2 - xy - 2y^2 = 0 \text{ ②} \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -1 \end{cases}.$

【解析】

【分析】 先把 $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ 化为 $(x - 2y)(x + y) = 0$ ，得到 $x - 2y = 0$ 或 $x + y = 0$ ，再分别联立 $x - y = 2$ 求出 x, y 即可.

【详解】 $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ 可以化为： $(x - 2y)(x + y) = 0$ ，

所以： $x - 2y = 0$ 或 $x + y = 0$

原方程组可以化为： $\begin{cases} x - y = 2, \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ (I) 与 $\begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 0 \end{cases}$ (II)

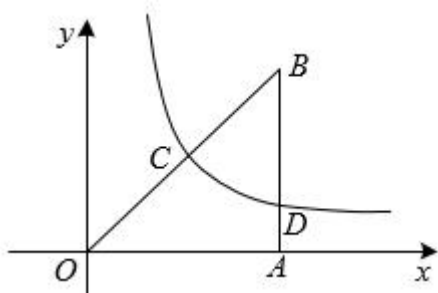
解 (I) 得 $\begin{cases} x = 4, \\ y = 2 \end{cases}$ ，解 (II) 得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1 \end{cases}$

答：原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 2 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -1 \end{cases}.$

【点睛】 此题主要考查二元方程的求解，解题的关键是把原方程变形为两个二元一次方程组进行求解.

21. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle OAB$ 的边 OA 在 x 轴正半轴上， $\angle OAB = 90^\circ$ ， $AO = AB = 4$ ，

C 为斜边 OB 的中点，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 在第一象限内的图像经过点 C ，交边 AB 于点 D .



(1) 这个反比例函数的解析式；

(2) 连结 CD 、 OD ，求 $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle OAD}}$ 的值.

【答案】 (1) $y = \frac{4}{x}$

$$(2) \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle OAD}} = \frac{3}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 先求解 B 的坐标，再根据中点公式求解 C 的坐标，从而可得反比例函数的解析式；

(2) 先求解 D 的坐标，再分别求解 $S_{\triangle OAD}$, $S_{\triangle BCD}$ 的面积，从而可得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because \angle OAB = 90^\circ$, $AO = AB = 4$,

$$\therefore B(4, 4),$$

$\because C$ 为斜边 OB 的中点,

$$\therefore C(2, 2),$$

$$\therefore k = 2 \times 2 = 4,$$

$\therefore$ 反比例函数的解析式为: $y = \frac{4}{x}$.

【小问 2 详解】

解: 如图, 连结 CD , OD ,

$$\because \angle OAB = 90^\circ, A(4, 0),$$

$$\therefore x_D = 4, \text{ 则 } y_D = 1$$

$$\therefore D(4, 1)$$

$$\therefore S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2,$$

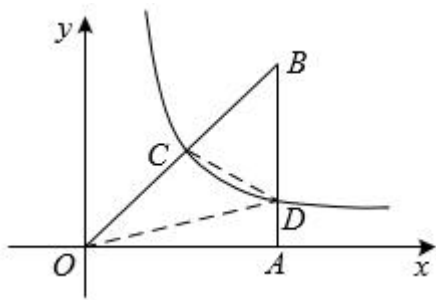
$$\because B(4, 4), D(4, 1),$$

$$\therefore BD = 3,$$

$$\because C(2, 2),$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 3 \times (4 - 2) = 3,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle OAD}} = \frac{3}{2}.$$



【点睛】 本题考查的是坐标与图形，中点坐标公式的应用，利用待定系数法求解反比例函数的解析式，掌握“反比例函数的图象与性质”是解本题的关键.

22. 图 1 是某种型号圆形车载手机支架，由圆形钢轨、滑动杆、支撑杆组成. 图 2 是它的正面示意图，滑动杆 AB 的两端都在圆 O 上， A 、 B 两端可沿圆形钢轨滑动，支撑杆 CD 的底端 C 固定在圆 O 上，另一端 D 是滑动杆 AB 的中点，(即当支架水平放置时直线 AB 平行于水平线，支撑杆 CD 垂直于水平线)，通过滑动 A 、 B 可以调节 CD 的高度. 当 AB 经过圆心 O 时，它的宽度达到最大值 10cm ，在支架水平放置的状态下：

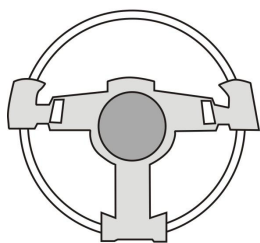


图1

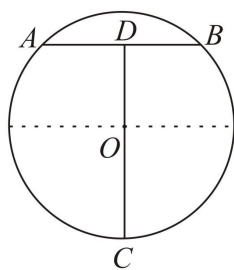


图2

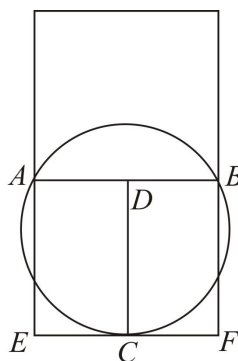


图3

- (1) 当滑动杆 AB 的宽度从 10 厘米向上升高调整到 6 厘米时，求此时支撑杆 CD 的高度.
- (2) 如图 3，当某手机被支架锁住时，锁住高度与手机宽度恰好相等 ($AE = AB$)，求该手机的宽度.

【答案】 (1) 支撑杆 CD 的高度为 9cm .

(2) 手机的宽度为 8cm .

【解析】

【分析】 (1) 如图，连结 OA ，由题意可得： $\odot O$ 的直径为 10 ， $AB = 6$ ，由 $OD \perp AB$ ，先求解 OD ，从而可得答案；

(2) 如图，记圆心为 O ，连结 OA ，证明 $AE = CD = BF = AB$ ，设 $AD = BD = x$ ，则 $AE = CD = BF = AB = 2x$ ，则 $OD = 2x - 5$ ，再利用勾股定理建立方程求解即可.

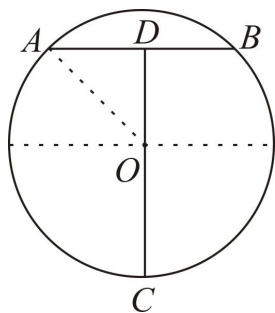
【小问 1 详解】

解：如图，连结 OA ，由题意可得： $\odot O$ 的直径为 10， $AB = 6$ ，

$$\backslash OA = 5,$$

$\because CD \perp AB$ ，即 $OD \perp AB$ ，

$$\therefore AD = BD = 3,$$



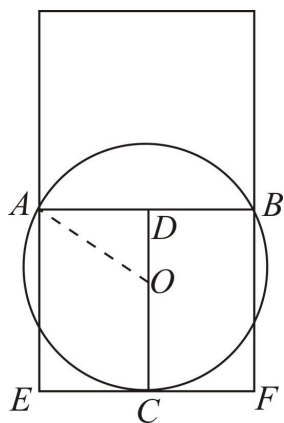
$$\backslash OD = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\backslash CD = OC + OD = 9.$$

所以此时支撑杆 CD 的高度为 9cm.

【小问 2 详解】

解：如图，记圆心为 O ，连结 OA ，



由题意可得： $AB = AE$ ， $\angle E = \angle EAB = \angle ABF = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEFB$ 为正方形，

$\because CD \perp EF$ ，

$$\backslash AE = CD = BF = AB,$$

$\because CD \perp AB$ ，

$\therefore$ 设 $AD = BD = x$,

则 $AE = CD = BF = AB = 2x$,

$\therefore OA = OC = 5$,

$\therefore OD = 2x - 5$,

由勾股定理可得: $5^2 = x^2 + (2x - 5)^2$,

解得 $x_1 = 0, x_2 = 4$,

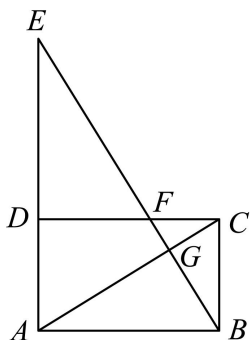
经检验 $x = 0$ 不符合题意, 舍去, 取 $x = 4$,

$AB = 8$ (cm),

即手机的宽度为 8cm.

【点睛】 本题考查的是正方形的判定与性质, 垂径定理的应用, 勾股定理的应用, 一元二次方程的解法, 理解题意, 建立方程解题是关键.

23. 已知: 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 的延长线上, $DE = DC$, 连接 BE , 分别交边 DC 、对角线 AC 于点 F 、 G , $AD = FD$.



(1) 求证: $AC \perp BE$;

(2) 求证: $\frac{CF}{DF} = \frac{AC}{BE}$.

【答案】 (1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】 (1) 由矩形的性质可知 $\angle ADC = \angle FDE = 90^\circ$, 然后可证 $\triangle ADC \cong \triangle FDE$, 进而问题可求证;

(2) 由矩形的性质可知 $AD \parallel BC$, $AD = BC$, $CD = AB$, $\angle ADC = \angle DAB = 90^\circ$, 然后可得 $\triangle EDF \sim \triangle BCF$, 则有 $\frac{CF}{DF} = \frac{BC}{DE} = \frac{AD}{DE}$, 进而可证 $\triangle EAB \sim \triangle CDA$, 最后根据相似三角形的性质可求证.

【小问 1 详解】

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle ADC = \angle FDE = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = DC, \quad AD = FD,$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle FDE \quad (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle E = \angle ACD,$$

$$\therefore \angle EFD = \angle CFG,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle CFG = \angle E + \angle EFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CGF = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \perp BE;$$

【小问 2 详解】

证明：在矩形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD=BC$ ， $CD=AB$ ， $\angle ADC = \angle DAB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \triangle EDF \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \frac{CF}{DF} = \frac{BC}{DE} = \frac{AD}{DE},$$

由 (1) 可知 $\angle E = \angle ACD$ ，

$$\therefore \triangle EAB \sim \triangle CDA,$$

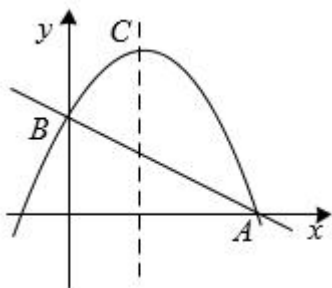
$$\therefore \frac{AC}{BE} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{DC} = \frac{AD}{DE},$$

$$\therefore \frac{CF}{DF} = \frac{AC}{BE}.$$

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质与判定及矩形的性质，熟练掌握相似三角形的性质与判定及矩形的性质是解题的关键.

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B . 抛物线

$y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 A 、 B 顶点为 C .



(1) 求该抛物线的表达式；

(2) 将抛物线沿 y 轴向上平移，平移后所得新抛物线顶点为 D ，如果 $\angle BDC = \angle OAB$ ，求平移的距离；

(3) 设抛物线上点 M 的横坐标为 m ，将抛物线向左平移 3 个单位，如果点 M 的对应点 Q 落在 $\triangle OAB$ 内，求 m 的取值范围.

【答案】(1) 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

(2) 平移的距离为 $\frac{15}{8}$

(3) m 的取值范围为 $3 < m < 4$

【解析】

【分析】(1) 由直线解析式可求出点 A 、 B 的坐标，然后再代入二次函数解析式进行求解即可；

(2) 过点 B 作 $BE \perp DC$ 于点 E ，由 (1) 可得： $OA = 4, OB = 2$ ，抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$ ，顶点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{8}\right)$ ，然后可得 $\tan \angle BDC = \tan \angle BOA = \frac{1}{2}$ ，进而问题可求解；

(3) 由 (1) 可知点 $B(0, 2)$ ， $A(4, 0)$ ，抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$ ，则有点 B 关于抛物线对称轴对称的点的坐标为 $(3, 2)$ ，然后根据图象的平移可进行求解.

【小问 1 详解】

解：令 $x=0$ 时，则有 $y = -\frac{1}{2} \times 0 + 2 = 2$ ，即点 $B(0, 2)$ ，

令 $y=0$ 时，则有 $0 = -\frac{1}{2}x + 2$ ，解得： $x = 4$ ，即点 $A(4, 0)$ ，

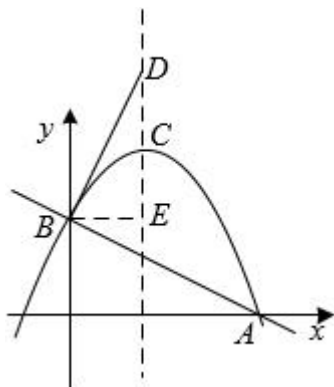
把点 A 、 B 的坐标代入二次函数解析式得：

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \times 4^2 + 4b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ c = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ ；

【小问 2 详解】

解：由题意可得如下图象：



过点 B 作 $BE \perp DC$ 于点 E ,

由 (1) 可得: $OA = 4, OB = 2$, 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$, 顶点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{8}\right)$,

$$\therefore BE = \frac{3}{2}, \tan \angle BOA = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle BDC = \angle OAB,$$

$$\therefore \tan \angle BDC = \tan \angle BOA = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DE = 2BE = 3,$$

$$\therefore \text{平移距离 } DC = 3 + 2 - \frac{25}{8} = \frac{15}{8};$$

【小问 3 详解】

解: 由 (1) 可知点 $B(0, 2)$, $A(4, 0)$, 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$,

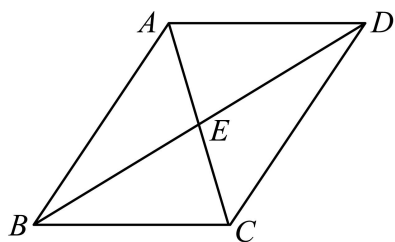
$\therefore$ 点 B 关于抛物线对称轴对称的点的坐标为 $(3, 2)$,

$\therefore$ 将抛物线向左平移 3 个单位, 且点 M 的对应点 Q 落在 $\triangle OAB$ 内,

$\therefore$ 点 M 的横坐标为 m 的取值范围为 $3 < m < 4$.

【点睛】 本题主要考查二次函数的综合, 熟练掌握二次函数的图象与性质是解题的关键.

25. 如图, 已知 $\triangle ABC$, 点 E 在边 AC 上, 且 $\angle BAC = \angle CBE$, 过点 A 作 BC 的平行线, 与射线 BE 交于点 D , 连结 CD .



(1) 求证: $AB^2 = BE \cdot BD$;

(2) 如果 $AB = 4$, $\cos \angle ABC = \frac{1}{4}$.

①当 $BE = BC$, 求 CE 的长;

②当 $AB = DC$ 时, 求 $\angle BAC$ 的正弦值.

【答案】(1) 见详解 (2) ① $CE=1$; ② $\angle BAC$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{8}$ 或 $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

【解析】

【分析】(1) 由平行线的性质可得 $\angle ADB = \angle CBE$, 则有 $\angle BAE = \angle BDA$, 然后可证 $\triangle ABE \sim \triangle DBA$, 进而问题可求证;

(2) ①过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F , 由题意易得 $\triangle ACB \sim \triangle BCE$, 则有 $\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{EC}$, 然后可得 $BC = 2$, 进而问题可求解; ②由题意易知当 $AB = DC$ 时, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形或等腰梯形, 然后分类讨论当四边形 $ABCD$ 是平行四边形时和当四边形 $ABCD$ 是等腰梯形时, 进而问题可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle ADB = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BDA,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle DBA,$$

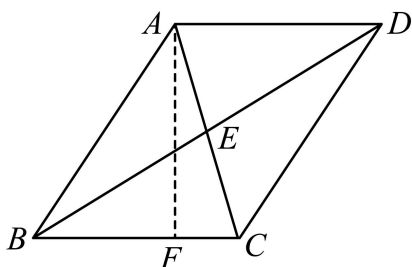
$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DBA,$$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BE}{AB},$$

$$\therefore AB^2 = BE \cdot BD;$$

【小问 2 详解】

解: ①过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F , 如图所示:



$$\therefore \angle BAC = \angle CBE, \quad \angle ACB = \angle BCE,$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{EC},$$

$$\therefore BE = BC,$$

$$\therefore BC^2 = AB \cdot EC, \quad AB = AC,$$

$$\therefore BF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore AB = 4, \cos \angle ABC = \frac{1}{4},$$

$$\therefore BF = AB \cdot \cos \angle ABC = 1,$$

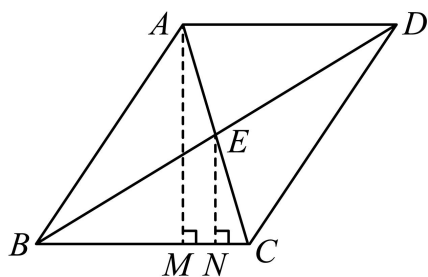
$$\therefore BC = 2,$$

$$\therefore CE = \frac{BC^2}{AB} = 1;$$

$$\textcircled{2} \because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 当 $AB=DC$ 时, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形或等腰梯形,

当四边形 $ABCD$ 是平行四边形时, 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M , 过点 E 作 $EN \perp BC$ 于点 N , 如图所示:



$$\therefore EN \parallel AM, \quad AE = CE = \frac{1}{2}AC, \quad BE = DE = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore \triangle CEN \sim \triangle CAM,$$

$$\therefore \frac{EN}{AM} = \frac{CE}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABM \text{ 中, } \cos \angle ABC = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{4}, \quad AB = 4,$$

$$\therefore BM = \frac{1}{4}AB = 1,$$

$$\therefore \text{根据勾股定理得: } AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{15},$$

$$\therefore EN = \frac{1}{2}AM = \frac{\sqrt{15}}{2},$$

$$\text{由 (1) 得: } AB^2 = BE \cdot BD,$$

$$\therefore AB = 4, BD = 2BE,$$

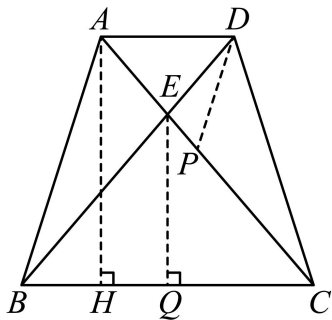
$$\therefore 4^2 = BE \cdot 2BE,$$

$$\therefore BE = 2\sqrt{2} \quad (\text{负根舍去}),$$

$$\therefore \sin \angle CBE = \frac{EN}{BE} = \frac{\sqrt{30}}{8},$$

$$\therefore \sin \angle BAC = \sin \angle CBE = \frac{\sqrt{30}}{8};$$

当四边形 $ABCD$ 是等腰梯形时, 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 过点 E 作 $EQ \perp BC$ 于点 Q , 如图所示:



$$\therefore \angle BAD = \angle CDA,$$

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CDA$ 中,

$$\begin{cases} AB = DC \\ \angle BAD = \angle CDA, \\ AD = DA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CDA,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle CAD,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle BDA, \angle BCE = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle BCE,$$

$$\therefore BE = CE,$$

$$\because EQ \perp BC,$$

$$\therefore BQ = CQ = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because \angle CBE = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BAC,$$

过点 D 作 $DP \parallel AB$ 交 AC 于点 P , 则 $\angle DPA = \angle BAC$,

$$\therefore \angle DPA = \angle CAD,$$

$$\therefore DP = AD,$$

$$\therefore DP \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle PDE,$$

$$\therefore \frac{AB}{PD} = \frac{BE}{DE},$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DE},$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle DAE,$$

$$\therefore \frac{BC}{AD} = \frac{BE}{DE},$$

$$\therefore \frac{BC}{AD} = \frac{AB}{AD},$$

$$\therefore BC = AB = 4,$$

$$\therefore BQ = CQ = 2,$$

由以上可知: $BH = 1, AH = \sqrt{15},$

$$\therefore CH = 3,$$

$$\therefore AH \perp BC, EQ \perp BC,$$

$$\therefore AH \parallel EQ,$$

$$\therefore \triangle CEQ \sim \triangle CAH,$$

$$\therefore \frac{EQ}{AH} = \frac{CQ}{CH},$$

$$\therefore EQ = \frac{CQ \cdot AH}{CH} = \frac{2\sqrt{15}}{3},$$

在 $\text{Rt} \triangle BEQ$ 中, 由勾股定理得: $BE = \sqrt{BQ^2 + EQ^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3},$

$$\therefore \sin \angle BAC = \sin \angle CBE = \frac{EQ}{BE} = \frac{\sqrt{10}}{4};$$

综上所述: $\angle BAC$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{8}$ 或 $\frac{\sqrt{10}}{4}.$

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质与判定及解直角三角形, 熟练掌握相似三角形的性质与判定及解直角三角形是解题的关键.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能