

2022 年上海市黄浦区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 4 和 9 的比例中项是 ()

- A. 6 B. ± 6 C. $\frac{16}{9}$ D. $\frac{81}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据比例中项的定义：如果存在 a 、 b 、 c 三个数，满足 $a:b=b:c$ ，那么 b 就叫做 ac 的比例中项，进行求解即可.

【详解】解：设 4 和 9 的比例中项为 x ,

$$\therefore 4:x=x:9,$$

$$\therefore x=\pm 6,$$

故选 B.

【点睛】本题主要考查了求比例中项，熟知比例中项的定义是解题的关键.

2. 如果两个相似三角形的周长比为 1:4，那么它们的对应角平分线的比为 ()

- A. 1:4 B. 1:2 C. 1:16 D. $1:\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据相似三角形的性质进行分析即可得到答案.

【详解】解： $\because$ 两个相似三角形的周长比为 1:4,

$$\therefore \text{两个相似三角形的相似比为 } 1:4,$$

$$\therefore \text{它们的对应角平分线之比为 } 1:4,$$

故选：A.

【点睛】本题考查了对相似三角形性质的理解. (1) 相似三角形周长的比等于相似比. (2) 相似三角形面积的比等于相似比的平方. (3) 相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比.

3. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是非零向量，下列条件中不能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的是 ()

- A. $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$ B. $\vec{a} = 3\vec{b}$ C. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ D. $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{c}, \vec{b} = -2\vec{c}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的条件是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反进行求解即可.

【详解】解：A、 $\because a = \frac{1}{2}b$ ， $\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同， $\therefore \vec{a} // \vec{b}$ ，故此选项不符合题意；

B、 $\because \vec{a} = 3\vec{b}$ ， $\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同， $\therefore \vec{a} // \vec{b}$ ，故此选项不符合题意；

C、由 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，只能说明 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的长度相同，并不能得到 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反， $\therefore$ 不能得到 $\vec{a} // \vec{b}$ ，故此选项符合题意；

D、 $\because \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{c}$ ， $\vec{b} = -2\vec{c}$ ， $\therefore \vec{b} = -4\vec{a}$ ， $\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反， $\therefore \vec{a} // \vec{b}$ ，故此选项不符合题意；

故选 C.

【点睛】本题主要考查了向量平行的条件，熟知两个向量平行的条件是方向相同或相反是解题的关键.

4. Rt $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $BC = 2$ ， $AC = 3$ ，下列各式中正确的是 ()

A. $\sin A = \frac{2}{3}$ B. $\cos A = \frac{2}{3}$ C. $\tan A = \frac{2}{3}$ D. $\cot A = \frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题可以利用锐角三角函数的定义以及勾股定理分别求解，再进行判断即可.

【详解】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $BC = 2$ ， $AC = 3$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{13},$$

A. $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ ，故此选项错误；

B. $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ ，故此选项错误；

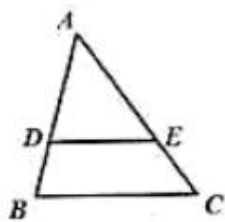
C. $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$ ，故此选项正确；

D. $\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$ ，故此选项错误.

故选 C.

【点睛】此题主要考查了锐角三角函数的定义以及勾股定理，熟练应用锐角三角函数的定义是解决问题的关键.

5. 如图，点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上，下列各比例式不一定能推得 $DE // BC$ 的是 ()



A. $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$ B. $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ C. $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ D. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据对应线段成比例，两直线平行，可得答案.

【详解】解：A、 $\because \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$ ， $\therefore DE \parallel BC$ ，不符合题意；

B、由 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ ，不一定能推出 $DE \parallel BC$ ，符合题意；

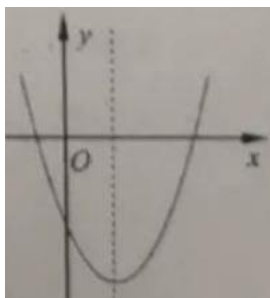
C、 $\because \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ ， $\therefore DE \parallel BC$ ，不符合题意；

D、 $\because \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ， $\therefore DE \parallel BC$ ，不符合题意.

故选：B.

【点睛】本题考查对应线段成比例，两直线平行，理解对应线段是解答此题的关键.

6. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如图所示，那么点 $P\left(b, \frac{a}{c}\right)$ 在（ ）



A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】根据对称轴的位置、开口方向、与 y 轴的交点的位置即可判断出 a 、 b 、 c 的符号，进而求出 $P\left(b, \frac{a}{c}\right)$ 的符号.

【详解】由函数图像可得：

$\because$ 抛物线开口向上，

$\therefore a > 0$,

又 $\because$ 对称轴在 y 轴右侧，

$\therefore -\frac{b}{2a} > 0$,

$$\therefore b < 0,$$

又 $\because$ 图象与 y 轴交于负半轴,

$$\therefore c < 0,$$

$$\therefore \frac{a}{c} < 0$$

$\therefore P\left(b, \frac{a}{c}\right)$ 在第三象限

故选: C

【点睛】考查二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 系数符号的确定. 根据对称轴的位置、开口方向、与 y 轴的交点的位置判断出 a 、 b 、 c 的符号是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: 如果 $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{x-y}{y} =$ _____

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】根据 $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, 可得 $x = \frac{2}{3}y$, 再代入即可求解.

【详解】解: $\because \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$,

$$\therefore x = \frac{2}{3}y,$$

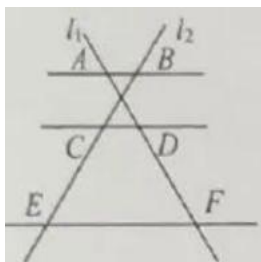
$$\therefore \frac{x-y}{y} = \frac{\frac{2}{3}y-y}{y} = -\frac{1}{3}.$$

故答案为: $-\frac{1}{3}$

【点睛】本题主要考查了比例的基本性质, 熟练掌握比例的基本性质是解题的关键.

8. 如图, 已知 $AB \parallel CD \parallel EF$ 它们分别交直线 l_1, l_2 于点 A, D, F 和点 B, C, E , 如果 $\frac{AD}{DF} = \frac{2}{3}$, $BE = 20$,

那么线段 BC 的长是 _____



【答案】 8

【解析】

【分析】 根据平行线分线段成比例定理即可得.

【详解】 解: $\because AB \parallel CD \parallel EF$,

$$\therefore \frac{BC}{CE} = \frac{AD}{DF} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore CE = \frac{3}{2}BC,$$

$$\because BC + CE = BE = 20,$$

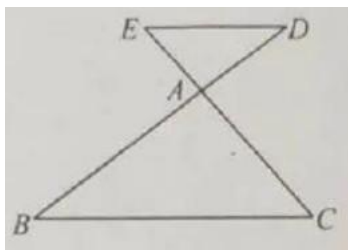
$$\therefore \frac{3}{2}BC + BC = 20,$$

解得 $BC = 8$,

故答案为: 8.

【点睛】 本题考查了平行线分线段成比例定理, 熟练掌握平行线分线段成比例定理是解题关键.

9. 如图, D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BA, CA 延长线上的点, $DE \parallel BC$, $EA:AC = 1:2$, 如果 $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$, 那么向量 $\overrightarrow{BC} =$ _____ (用向量 $\vec{a}$ 表示).



【答案】 $2\vec{a}$

【解析】

【分析】 由 $DE \parallel BC$, $EA:AC = 1:2$ 可得 $\triangle DEA \sim \triangle BCA$ 且相似比为 $1:2$, 故 $DE:BC = 1:2$, 又因为 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{ED}$ 方向相同, 故 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{ED} = 2\vec{a}$.

【详解】 $\because DE \parallel BC$

$$\therefore \angle DEA = \angle BCA, \quad \angle EDA = \angle CBA$$

$$\therefore \triangle DEA \sim \triangle BCA$$

又 $\because EA:AC = 1:2$

故 $\triangle DEA$ 和 $\triangle BCA$ 相似比为 1: 2

则 $DE: BC=1: 2$

故 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{ED} = 2\vec{a}$

故答案为: $2\vec{a}$.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定及性质和向量. 两角分别相等的两个三角形相似. 数乘向量: 实数 λ 和向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个向量, 记作 $\lambda\vec{a}$, 且 $\lambda\vec{a}$ 的长 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$.

10. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 那么 $\angle B =$ _____

【答案】 60°

【解析】

【分析】根据特殊角锐角三角函数值, 即可求解.

【详解】解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin B = \frac{AC}{AB}$,

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ.$$

故答案为: 60°

【点睛】本题主要考查了特殊角锐角三角函数值, 熟练掌握特殊角锐角三角函数值是解题的关键.

11. 已知一条抛物线经过点 $(0, 1)$, 且在对称轴右侧的部分是下降的, 该抛物线的表达式可以是 _____
(写出一个即可).

【答案】 $y = -x^2 + 1$

【解析】

【分析】首先根据在对称轴右侧部分是下降确定其开口方向, 然后根据经过的点的坐标确定解析式即可.

【详解】解: $\because$ 在对称轴右侧部分是下降,

$$\therefore \text{设抛物线的解析式可以为 } y = -x^2 + b,$$

$$\because \text{经过点 } (0, 1),$$

$$\therefore \text{解析式可以是 } y = -x^2 + 1,$$

故答案为: $y = -x^2 + 1$.

【点睛】本题考查了二次函数的性质, 掌握二次函数在对称轴两侧的增减性相反是解题的关键, 即根据增减性可以确定出开口方向进而确定出 a 的符号.

12. 如果抛物线 $y = -x^2 + bx - 1$ 的对称轴是 y 轴, 那么顶点坐标为 _____

【答案】(0, -1)

【解析】

【分析】由题意知 $x = -\frac{b}{2a} = 0$ ，即可解得抛物线为 $y = -x^2 - 1$ ，将 $x = 0$ 代入即可求得顶点坐标的纵坐标.

【详解】 $y = -x^2 + bx - 1$ 中 $a = -1$, $b = b$

$$\text{故 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2 \times (-1)} = 0$$

解得 $b = 0$

故抛物线为 $y = -x^2 - 1$

将 $x = 0$ 代入 $y = -x^2 - 1$ 有

$$y = -0^2 - 1 = -1$$

故顶点坐标为 (0, -1)

故答案为: (0, -1).

【点睛】本题考察了二次函数的图象及其性质，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$ ，与 y 轴的交点为 (0, c).

13. 已知某小山坡的坡长为 400 米、山坡的高度为 200 米，那么该山坡的坡度 $i =$ _____

【答案】1: $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据坡度的定义，求出水平距离，求山坡的高度与水平距离的比即可.

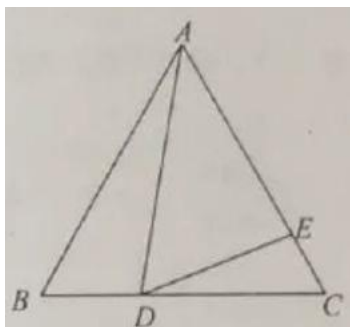
【详解】解：由勾股定理可知山坡的水平距离为： $\sqrt{400^2 - 200^2} = 200\sqrt{3}$ 米，

$$\therefore \text{坡度 } i = \frac{200}{200\sqrt{3}} = 1: \sqrt{3}.$$

故答案为: 1: $\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用，解答本题的关键是熟练运用勾股定理，明确坡度是山坡的高度与水平距离的比.

14. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形， D, E 分别是边 BC, AC 上的点， $\angle ADE = 60^\circ$ ，如果 $BD = 1$ ，那么 $CE =$ _____



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】由等边三角形的性质得出 $\angle B = \angle C = 60^\circ$ ，证明 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$ ，由相似三角形的性质得出

$\frac{AB}{DC} = \frac{BD}{CE}$ 则可求出答案.

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ, AB = BC = AC = 3,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle BDA = 120^\circ,$$

$$\because \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDA + \angle EDC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle EDC,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{AB}{DC} = \frac{BD}{CE},$$

$$\because BD = 1,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 2,$$

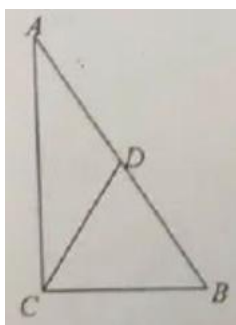
$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{1}{CE},$$

$$\therefore CE = \frac{2}{3},$$

故答案为： $\frac{2}{3}$.

【点睛】 本题考查了等边三角形的性质，相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

15. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是 AB 边上的中线， $CD = 5$ ， $BC = 6$ ， 则 $\cos\angle ACD$ 的值是



【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $AB=2CD=10$ ， $CD=AD$ ，然后根据余弦函数的定义列式求出 $\angle A$ 的余弦值，即为 $\cos \angle ACD$ 的值.

【详解】解： $\because CD$ 是 AB 边上的中线， $\angle ACB=90^\circ$ ，

$$\therefore AB=2CD=10, \quad CD=AD,$$

$$\therefore \angle ACD=\angle A, \quad AC=\sqrt{10^2-6^2}=8,$$

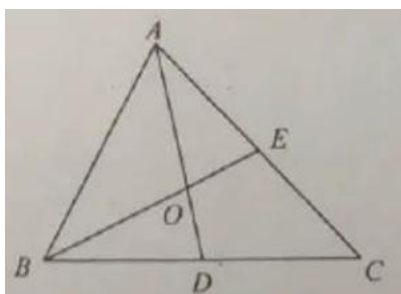
$$\therefore \cos \angle ACD=\cos \angle A=\frac{AC}{AB}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},$$

$$\therefore \cos \angle ACD \text{ 的值为 } \frac{4}{5}.$$

故答案为： $\frac{4}{5}$.

【点睛】本题考查了锐角三角函数的定义，勾股定理，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质，等边对等角的性质，求出 $\angle A=\angle ACD$ 是解本题的关键.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD, BE 相交于点 O ，如果 $\triangle AOE$ 的面积是 4，那么四边形 $OECD$ 的面积是



【答案】 8

【解析】

【分析】如图所示，连接 DE ，先推出 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，得到 $DE=\frac{1}{2}AB$ ， $DE \parallel AB$ ，即可证明

$\triangle ABO \sim \triangle DEO$, $\triangle CDE \sim \triangle CBA$, 得到 $\frac{OE}{OB} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$, 从而推出 $S_{\triangle ABO} = 8$, 即可得到

$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABE} = 24$, 再由 $\frac{S_{\triangle DEO}}{S_{\triangle ABO}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 即可得到 $S_{\triangle DEO} = 2$, 由 $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 得到

$S_{\triangle CDE} = 6$, 则 $S_{\text{四边形}OECD} = S_{\triangle DEO} + S_{\triangle CDE} = 8$.

【详解】解：如图所示，连接 DE ,

$\because AD, BE$ 分别是 BC, AC 边上的中线,

$\therefore D, E$ 分别是 BC, AC 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE = \frac{1}{2}AB, DE \parallel AB$,

$\therefore \triangle ABO \sim \triangle DEO, \triangle CDE \sim \triangle CBA$,

$\therefore \frac{OE}{OB} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle AOE}} = \frac{BO}{EO} = 2$,

$\therefore S_{\triangle ABO} = 8$,

$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle AOE} = 12$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABE} = 24$

$\therefore \frac{S_{\triangle DEO}}{S_{\triangle ABO}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

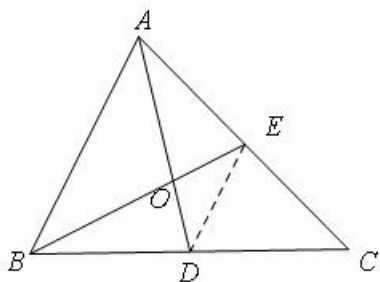
$\therefore S_{\triangle DEO} = 2$,

$\therefore \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

$\therefore S_{\triangle CDE} = 6$,

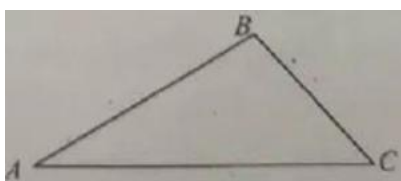
$\therefore S_{\text{四边形}OECD} = S_{\triangle DEO} + S_{\triangle CDE} = 8$,

故答案为：8.



【点睛】 本题主要考查了相似三角形的性质与判定，三角形中位线定理，熟知相似三角形的性质与判定条件是解题的关键.

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=4$ ， $AC=5$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转，使点 B 落在 AC 边上的点 D 处，点 C 落在点 E 处，如果点 E 恰好在线段 BD 的延长线上，那么边 BC 的长等于_____



【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 如图所示，连接 CE ，由旋转的性质可得： $AD=AB=4$ ， $BC=DE$ ， $\angle BCD=\angle DEA$ ， $AE=AC=5$ ，则 $CD=AC-AD=1$ ，然后证明 $\triangle BDC \sim \triangle ADE$ ，得到 $\frac{BC}{AE} = \frac{DC}{DE}$ ，即 $\frac{BC}{5} = \frac{1}{BC}$ ，则 $BC^2=5$ ，由此即可得到答案.

【详解】 解：如图所示，连接 CE ，

由旋转的性质可得： $AD=AB=4$ ， $BC=DE$ ， $\angle BCD=\angle DEA$ ， $AE=AC=5$ ，

$$\therefore CD=AC-AD=1$$

又 $\because \angle BDC=\angle ADE$ ，

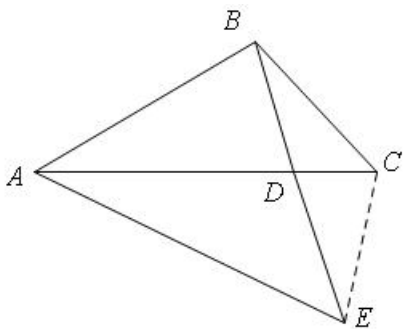
$$\therefore \triangle BDC \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{BC}{AE} = \frac{DC}{DE}, \text{ 即 } \frac{BC}{5} = \frac{1}{BC},$$

$$\therefore BC^2=5,$$

$$\therefore BC=\sqrt{5} \text{ (负值已经舍去),}$$

故答案为： $\sqrt{5}$.



【点睛】 本题主要考查了旋转的性质，相似三角形的性质与判定，熟知相似三角形的性质与判定条件是解题的关键.

18. 若抛物线 $y_1 = ax^2 + b_1x + c_1$ 的顶点为 A ，抛物线 $y_2 = -ax^2 + b_2x + c_2$ 的顶点为 B ，且满足顶点 A 在抛物线 y_2 上，顶点 B 在抛物线 y_1 上，则称抛物线 y_1 与抛物线 y_2 互为“关联抛物线”，已知顶点为 M 的抛物线 $y = (x-2)^2 + 3$ 与顶点为 N 的抛物线互为“关联抛物线”，直线 MN 与 x 轴正半轴交于点 D ，如果

$\tan \angle MDO = \frac{3}{4}$ ，那么顶点为 N 的抛物线的表达式为_____

【答案】 $y = -(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{57}{16}$

【解析】

【分析】 设顶点为 N 的抛物线顶点坐标 N 为 (a, b) ，由题意可知 $\frac{y_M}{|x_M - x_N|} = \frac{3}{4}$ ，即可求得 D 点坐标为 $(6, 0)$ ，则有直线 MD 解析式为 $y = -\frac{3}{4}(x-6)$ ，因为 N 点过直线 MD ， N 点也过抛物线 $y = (x-2)^2 + 3$ ，故

有 $\begin{cases} b = -\frac{3}{4}(a-6) \\ b = (a-2)^2 + 3 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = \frac{5}{4} \\ b = \frac{57}{16} \end{cases}$ ，故 N 点坐标为 $(\frac{5}{4}, \frac{57}{16})$ ，可设顶点为 N 的抛物线的表达式为

$y = a(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{57}{16}$ ，又因为 M 点过 $y = a(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{57}{16}$ ，即可解得 $a = -1$ ，故顶点为 N 的抛物线的表达式为 $y = -(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{57}{16}$.

【详解】 设顶点为 N 的抛物线顶点坐标 N 为 (a, b)

已知抛物线 $y = (x-2)^2 + 3$ 的顶点坐标 M 为 $(2, 3)$

$\therefore \tan \angle MDO = \frac{3}{4}$

$$\therefore \frac{y_M}{|x_M - x_N|} = \frac{3}{4}$$

$$\text{即 } \frac{3}{|2 - x_D|} = \frac{3}{4}$$

$$\text{解得 } x_D = 2 \pm 4$$

$\therefore$ 直线 MN 与 x 轴正半轴交于点 D

$\therefore D$ 点坐标为 $(6, 0)$

$$\text{则直线 } MD \text{ 解析式为 } y = -\frac{3}{4}(x - 6)$$

N 点在直线 MD $y = -\frac{3}{4}(x - 6)$ 上, N 点也在抛物线 $y = (x - 2)^2 + 3$

$$\text{故有 } \begin{cases} b = -\frac{3}{4}(a - 6) \\ b = (a - 2)^2 + 3 \end{cases}$$

$$\text{化简得 } \begin{cases} b = -\frac{3}{4}a + \frac{9}{2} \\ b = a^2 - 4a + 7 \end{cases}$$

$$\text{联立得 } -\frac{3}{4}a + \frac{9}{2} = a^2 - 4a + 7$$

$$\text{化简得 } a^2 - \frac{13}{4}a + \frac{5}{2} = 0$$

$$\text{解得 } a = \frac{5}{4} \text{ 或 } a = 2 \text{ (舍)}$$

$$\text{将 } a = \frac{5}{4} \text{ 代入 } b = \frac{3}{4}a - \frac{9}{2} \text{ 有}$$

$$b = -\frac{3}{4} \times \frac{5}{4} + \frac{9}{2} = -\frac{15}{16} + \frac{72}{16} = \frac{57}{16}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = \frac{5}{4} \\ b = \frac{57}{16} \end{cases}$$

$$\text{故 } N \text{ 点坐标为 } \left(\frac{5}{4}, \frac{57}{16} \right)$$

$$\text{则顶点为 } N \text{ 的抛物线的表达式为 } y = a\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{57}{16}$$

将 $(2, 3)$ 代入 $y = a(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{57}{16}$ 有

$$3 = a(2 - \frac{5}{4})^2 + \frac{57}{16}$$

$$\text{化简得 } 3 = \frac{9}{16}a + \frac{57}{16}$$

解得 $a = -1$

故顶点为 N 的抛物线的表达式为 $y = -(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{57}{16}$

故答案为: $y = -(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{57}{16}$.

【点睛】本题考察了二次函数的图象及其性质，三角函数的应用. 理解题意所述“关联抛物线”的特点，即若抛物线 $y_1 = ax^2 + b_1x + c_1$ 的顶点为 A ，抛物线 $y_2 = -ax^2 + b_2x + c_2$ 的顶点为 B ，且满足顶点 A 在抛物线 y_2 上，顶点 B 在抛物线 y_1 上是解题的关键.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 计算: $\frac{\tan 30^\circ}{2\cos 30^\circ} + \cot^2 45^\circ - \sin^2 45^\circ$.

【答案】 $\frac{5}{6}$

【解析】

【分析】先将特殊角锐角三角函数值代入，再化简即可求解.

【详解】解: $\frac{\tan 30^\circ}{2\cos 30^\circ} + \cot^2 45^\circ - \sin^2 45^\circ$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} + 1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{6}.$$

【点睛】本题主要考查了特殊角锐角三角函数值的混合运算，熟练掌握特殊角锐角三角函数值是解题的关键.

20. 已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图像经过 $A(2, -3), B(5, 0)$ 两点

(1) 求二次函数的解析式:

(2) 将该二次函数的解析式化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式, 并写出该二次函数图像的开口方向、顶点坐标和对称轴

【答案】(1) $y = x^2 - 6x + 5$

(2) $y = (x-3)^2 - 4$, 二次函数图像开口向上, 顶点坐标为 $(3, -4)$, 对称轴为直线 $x = 3$

【解析】

【分析】(1) 将两点坐标代入解析式, 解得 b, c 的值, 表达二次函数的解析式;

(2) 将二次函数的解析式进行配方写成顶点式, 顶点坐标为 $(-m, k)$, 对称轴为直线 $x = -m$.

【小问 1 详解】

解: 将 $A(2, -3)$, $B(5, 0)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$

$$\text{有} \begin{cases} -3 = 2^2 + 2b + c \\ 0 = 5^2 + 5b + c \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = -6 \\ c = 5 \end{cases}$$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = x^2 - 6x + 5$.

【小问 2 详解】

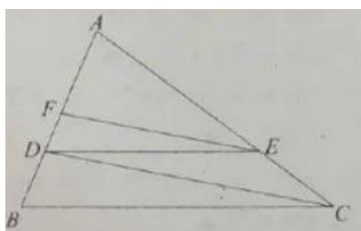
解: $y = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$

$\therefore y = (x-3)^2 - 4$

$\therefore a = 1 > 0$, 二次函数图像开口向上; 顶点坐标为 $(3, -4)$; 对称轴为直线 $x = 3$.

【点睛】 本题考查了二次函数的不同表达方式与函数图像. 解题的关键在于正确表示解析式的形式.

21. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $\frac{AF}{DF} = \frac{AD}{DB}$



(1) 求证 $EF \parallel CD$

(2) 如果 $\frac{EF}{CD} = \frac{4}{5}$, $AD = 15$, 求 DF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 3

【解析】

【分析】(1) 根据 $DE \parallel BC$, 可得 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, 从而得到 $\frac{AF}{DF} = \frac{AE}{EC}$, 进而得到 $\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AC}$, 可证得 $\triangle AEF \sim \triangle ACD$, 从而得到 $\angle AFE = \angle ADC$, 即可求证;

(2) 根据 $\triangle AEF \sim \triangle ACD$, 可得 $\frac{AF}{AD} = \frac{EF}{CD} = \frac{4}{5}$, 从而得到 $AF = 12$, 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},$$

$$\therefore \frac{AF}{DF} = \frac{AD}{DB},$$

$$\therefore \frac{AF}{DF} = \frac{AE}{EC},$$

$$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle ADC,$$

$$\therefore EF \parallel CD;$$

【小问 2 详解】

$$\because \triangle AEF \sim \triangle ACD, \quad \frac{EF}{CD} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{EF}{CD} = \frac{4}{5},$$

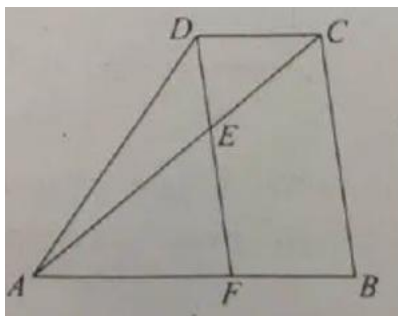
$$\because AD = 15,$$

$$\therefore AF = 12,$$

$$\therefore DF = AD - AF = 3.$$

【点睛】本题主要考查了平行分线段成比例, 相似三角形的判定和性质, 熟练掌握平行分线段成比例, 相似三角形的判定和性质定理是解题的关键.

22. 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 过点 D 作 $DF \parallel BC$, 分别交 AC 、 AB 点 E 、 F , 且满足 $AB \cdot AF = DF \cdot BC$.



(1) 求证: $\angle AEF = \angle DAF$

(2) 求证: $\frac{AF}{AB} = \frac{DE^2}{CD^2}$

【答案】(1) 答案见解析 (2) 答案见解析

【解析】

【分析】(1) 根据 $DF \parallel BC$, 得 $\frac{AF}{EF} = \frac{AB}{BC}$, 由 $AB \cdot AF = DF \cdot BC$, 得 $\frac{DF}{AF} = \frac{AB}{BC}$, $\angle AFE = \angle DFA$, 可证 $\triangle AEF \sim \triangle DAF$, 即可得答案;

(2) 根据 $AB \parallel CD$, 得 $\frac{DE}{CD} = \frac{EF}{AF}$, 由 $\frac{AF}{EF} = \frac{DF}{AF}$, 得 $\frac{DE^2}{CD^2} = \frac{EF}{DF}$, 再证四边形 $DFBC$ 是平行四边形, 得 $\frac{DE^2}{CD^2} = \frac{EF}{DF}$, 最后根据 $DF \parallel BC$, 即可得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because DF \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{FE}{BC},$$

$$\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{AB}{BC},$$

$$\because AB \cdot AF = DF \cdot BC,$$

$$\therefore \frac{DF}{AF} = \frac{AB}{BC},$$

$$\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{DF}{AF},$$

$$\because \angle AFE = \angle DFA,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle DAF;$$

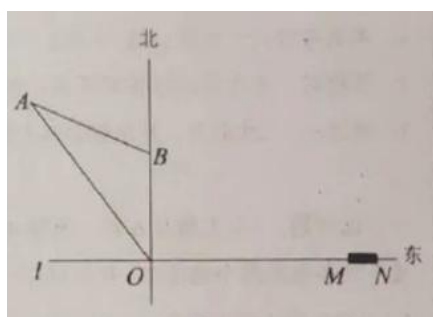
【小问 2 详解】

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{CD}{AF}, \\
&\therefore \frac{DE}{CD} = \frac{EF}{AF}, \\
&\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{DF}{AF}, \\
&\therefore \frac{EF}{AF} = \frac{AF}{DF}, \\
&\therefore \frac{DE^2}{CD^2} = \frac{EF}{AF} \times \frac{AF}{DF} = \frac{EF}{DF}, \\
&\because DF \parallel BC, AB \parallel CD, \\
&\therefore \text{四边形 } DFBC \text{ 是平行四边形}, \\
&\therefore DF = BC, \\
&\therefore \frac{DE^2}{CD^2} = \frac{EF}{DF} = \frac{EF}{BC}, \\
&\because DF \parallel BC, \\
&\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BC}, \\
&\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{DE^2}{CD^2}.
\end{aligned}$$

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例、相似三角形的判定与性质、平行四边形的判定与性质，做题的关键是相似三角形性质的灵活运用.

23. 如图，在东西方向的海岸线 l 上有一长为 1 千米的码头 MN ，在距码头西端 M 的正西方向 58 千米处有一观测站 O ，现测得位于观测站 O 的北偏西 37° 方向，且与观测站 O 相距 60 千米的小岛 A 处有艘轮船开始航行驶向港口 MN 。经过一段时间后又测得该轮船位于观测站 O 的正北方向，且与观测站 O 相距 30 千米的 B 处。



- (1) 求 AB 两地的距离：(结果保留根号)
- (2) 如果该轮船不改变航向继续航行，那么轮船能否行至码头 MN 靠岸？请说明理由 (参考数据： $\sin 37^\circ = 0.60$, $\cos 37^\circ = 0.80$, $\tan 37^\circ = 0.75$)

【答案】(1) $18\sqrt{5}$

(2) 不能, 理由见解析

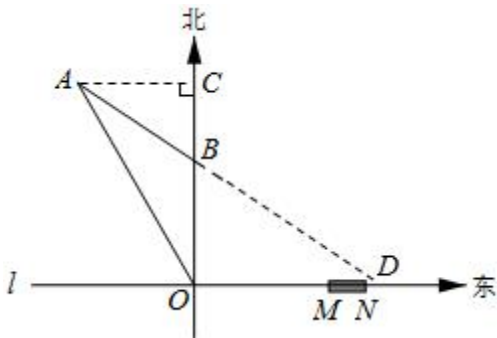
【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AC \perp OB$ 于点 C . 可知 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 根据勾股定理解答.

(2) 延长 AB 交 l 于 D , 比较 OD 与 OM 、 ON 的大小即可得出结论.

【小问 1 详解】

过点 A 作 $AC \perp OB$ 于点 C .



由题意, 得 $MN=1, OM=58, \angle AOB = 37^\circ, OA=60, OB=30$

$$\therefore AC = \sin \angle AOB \cdot OA = \sin 37^\circ \cdot 60 = 36, \quad OC = \cos \angle AOB \cdot OA = \cos 37^\circ \cdot 60 = 48$$

$$\therefore BC = OC - OB = 18$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{36^2 + 18^2} = 18\sqrt{5}$$

【小问 2 详解】

如果该轮船不改变航向继续航行, 那么轮船不能行至码头 MN 靠岸

延长 AB 交 l 于 D ,

$$\because AC \parallel OD$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBO$$

$$\therefore \frac{AC}{OD} = \frac{BC}{OB}$$

$$\therefore \frac{36}{OD} = \frac{18}{30}, \text{ 解得 } OD = 60$$

$$\because MN=1, OM=58$$

$$\therefore ON=59$$

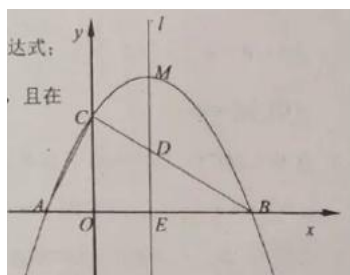
$$\therefore OM < ON < OD$$

$\therefore$ 如果该轮船不改变航向继续航行, 那么轮船不能行至码头 MN 靠岸

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用, 此题结合方向角, 考查了阅读理解能力、解直角三角形的能力. 计算出相关特殊角和作出辅助线构造相似三角形是解题的关键.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 - 3ax - 4a (a < 0)$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, B 两点与 y 轴

交于点 C ，点 M 是抛物线的顶点，抛物线的对称轴 l 与 BC 交于点 D ，与 x 轴交于点 E 。



(1) 求抛物线的对称轴及 B 点的坐标

(2) 如果 $MD = \frac{15}{8}$ ，求抛物线 $y = ax^2 - 3ax - 4a (a < 0)$ 的表达式；

(3) 在 (2) 的条件下，已知点 F 是该抛物线对称轴上一点，且在线段 BC 的下方， $\angle CFB = \angle BCO$ ，求点 F 的坐标

【答案】(1) 对称轴是 $x = 1.5$ ， $B(4, 0)$

$$(2) y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$$

$$(3) F\left(\frac{3}{2}, -5\right)$$

【解析】

【分析】(1) 根据二次函数抛物线的性质，可求出对称轴，即可得 B 点的坐标；

(2) 二次函数的 y 轴平行于对称轴，根据平行线分线段成比例用含 a 的代数式表示 DE 的长， $MD = \frac{15}{8}$ ，可表示 M 的纵坐标，然后把 M 的横坐标代入 $y = ax^2 - 3ax - 4a$ ，可得到关于 a 的方程，求出 a 的值，即可得答案；

(3) 先证 $\triangle AOC \sim \triangle COB$ ，得 $\angle BCO = \angle CAO$ ，再求出 $\angle CAO = \angle CFB$ ，得 $\triangle AGC \sim \triangle FGB$ ，根据相似三角形对于高的比等于相似比，可得答案。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 二次函数 $y = ax^2 - 3ax - 4a$ ，

$$\therefore \text{对称轴是 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3a}{2a} = \frac{3}{2} = 1.5,$$

$$\therefore A(-1, 0),$$

$$\therefore 1 + 1.5 = 2.5,$$

$$\therefore 1.5 + 2.5 = 4,$$

$$\therefore B(4, 0);$$

【小问 2 详解】

$\because$ 二次函数 $y = ax^2 - 3ax - 4a$ ， C 在 y 轴上，

$\therefore C$ 的横坐标是 0, 纵坐标是 $-4a$,

$\because y$ 轴平行于对称轴,

$$\therefore \frac{DE}{CO} = \frac{BE}{BO},$$

$$\therefore \frac{DE}{-4a} = \frac{2.5}{4},$$

$$\therefore DE = -\frac{5}{2}a,$$

$$\therefore MD = \frac{15}{8},$$

$$\therefore M \text{ 的纵坐标是 } -\frac{5}{2}a + \frac{15}{8}$$

$\therefore M$ 的横坐标是对称轴 x ,

$$\therefore y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 a - 3 \times \frac{3}{2}a - 4a,$$

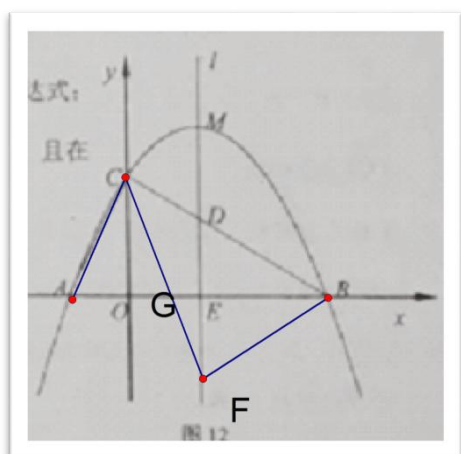
$$\therefore -\frac{5}{2}a + \frac{15}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 a - 3 \times \frac{3}{2}a - 4a,$$

$$\text{解这个方程组得: } a = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore y = ax^2 - 3ax - 4a = -\frac{1}{2}x^2 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)x - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2;$$

【小问 3 详解】

假设 F 点在如图所示的位置上, 连接 AC 、 CF 、 BF , CF 与 AB 相交于点 G ,



由 (2) 可知: $AO=1$, $CO=2$, $BO=4$,

$$\therefore \frac{AO}{CO} = \frac{1}{2}, \frac{CO}{BO} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AO}{CO} = \frac{CO}{BO},$$

$$\because \angle AOC = \angle COB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle COB,$$

$$\therefore \angle BCO = \angle CAO,$$

$$\because \angle CFB = \angle BCO,$$

$$\therefore \angle CAO = \angle CFB,$$

$$\because \angle AGC = \angle FGB,$$

$$\therefore \triangle AGC \sim \triangle FGB,$$

$$\therefore \frac{AC}{FB} = \frac{CO}{EF}, \quad \frac{AC^2}{FB^2} = \frac{CO^2}{EF^2}$$

设 $EF = x$,

$$\because BF^2 = BE^2 + EF^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{25}{4} + x^2, \quad AC^2 = 2^2 + 1^2 = 5, \quad CO^2 = 2^2 = 4,$$

$$\therefore \frac{AC^2}{FB^2} = \frac{CO^2}{EF^2} = \frac{5}{\frac{25}{4} + x^2} = \frac{4}{x^2},$$

解这个方程组得: $x_1 = 5, x_2 = -5$,

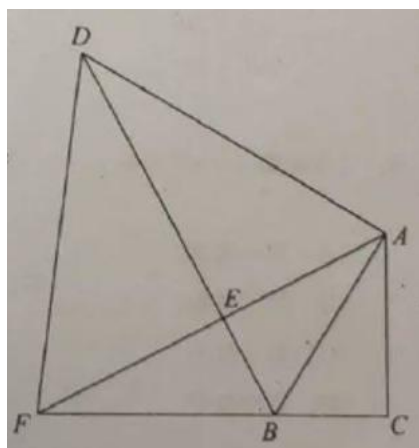
$\because$ 点 F 在线段 BC 的下方,

$\therefore x_1 = 5$ (舍去),

$\therefore F\left(\frac{3}{2}, -5\right)$.

【点睛】 本题考查了二次函数的性质、平行线分线段成比例、一元一次方程的解法、一元二次方程方程的解法、相似三角形的判定与性质，做题的关键是相似三角形的判定与性质的灵活运用.

25. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 与 $Rt\triangle ABD$ 中， $\angle ACB = \angle DAB = 90^\circ$ ， $AB^2 = BC \cdot BD$ ， $AB = 3$ ，过点 A 作 $AE \perp BD$ ，垂足为点 E ，延长 AE 、 CB 交于点 F ，连接 DF



(1) 求证: $AE = AC$;

(2) 设 $BC = x$, $\frac{AE}{EF} = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式及其定义域;

(3) 当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似时, 求边 BC 的长.

【答案】(1) 证明见解析

$$(2) y = \frac{9}{2x^2} - 1, \quad 0 < x < 3$$

$$(3) \sqrt{3} \text{ 或 } \frac{3}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 由题意可证得 $\triangle ABD \sim \triangle EBA$, $\triangle ABD \sim \triangle EBA$, 即 $\angle EAB = \angle CAB$, 则可得 $\triangle AEB \cong \triangle ACB$, 故 $AE = AC$.

(2) 可证得 $\triangle FEB \sim \triangle FCA$, 故有 $FC = \frac{FE \cdot AC}{BE}$, 在 $Rt \triangle AFC$ 中由勾股定理有 $AF^2 = FC^2 + AC^2$, 联立后化简可得出 $y = \frac{9}{2x^2} - 1$, BC 的定义域为 $0 < x < 3$.

(3) 由 (1) (2) 间可设 $BC = BE = x$, $DE = \frac{9-x^2}{x}$, $AE = \sqrt{9-x^2}$, $FE = \frac{2x^2\sqrt{9-x^2}}{9-2x^2}$, 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似时, 则有 $\triangle ACB \sim \triangle DEF$ 和 $\triangle ACB \sim \triangle FED$ 两种情况, 再由对应边成比例列式代入化简即可求得 x 的值.

【小问 1 详解】

$$\because AB^2 = BC \cdot BD$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$$

$$\text{又} \because \angle ACB = \angle DAB = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBA$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CAB$$

在 $Rt \triangle EBA$ 与 $Rt \triangle ABD$ 中

$$\angle AEB = \angle DAB = 90^\circ, \quad \angle ABD = \angle ABD$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle EBA$$

$$\therefore \angle ADB = \angle EAB$$

$$\therefore \angle EAB = \angle CAB$$

在 $Rt \triangle EBA$ 与 $Rt \triangle CAB$ 中

$$\angle EAB = \angle CAB$$

$$AB = AB$$

$$\angle ACB = \angle AEB = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle ACB$$

$$\therefore AE = AC$$

【小问 2 详解】

$$\because \angle ACB = \angle FEB = 90^\circ, \quad \angle F = \angle F$$

$$\therefore \triangle FEB \sim \triangle FCA$$

$$\therefore \frac{BE}{FE} = \frac{AC}{FC}$$

$$\therefore FC = \frac{FE \cdot AC}{BE}$$

在 $Rt \triangle AFC$ 中由勾股定理有 $AF^2 = FC^2 + AC^2$

$$\text{即 } (FE + AE)^2 = FC^2 + AC^2$$

$$\text{代入化简得 } FE^2 + AE^2 + 2 \cdot FE \cdot AE = \frac{FE^2 \cdot AC^2}{BE^2} + AC^2$$

由 (1) 问知 $AC = AE$, $BE = BC = x$

$$\text{则 } FE^2 + AE^2 + 2 \cdot FE \cdot AE = \frac{FE^2 \cdot AE^2}{x^2} + AE^2$$

$$\text{式子左右两边减去 } AE^2 \text{ 得 } FE^2 + 2 \cdot FE \cdot AE = \frac{FE^2 \cdot AE^2}{x^2}$$

$$\text{式子左右两边同时除以 } FE^2 \text{ 得 } 1 + 2 \cdot \frac{AE}{FE} = \frac{AE^2}{x^2}$$

$$\therefore \frac{AE}{EF} = y$$

$$\therefore 1 + 2y = \frac{AE^2}{x^2}$$

在 $Rt \triangle ABE$ 中由勾股定理有 $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2}$

$$\text{即 } AE = \sqrt{3^2 - x^2} = \sqrt{9 - x^2}$$

$$\therefore 1 + 2y = \frac{9 - x^2}{x^2}$$

$$\text{移项、合并同类项得 } y = \frac{9}{2x^2} - 1,$$

由图象可知 BC 的取值范围为 $0 < x < 3$.

【小问 3 详解】

由 (1)、(2) 问可得

$$BC = BE = x, \quad DE = \frac{9-x^2}{x}, \quad AE = \sqrt{9-x^2}, \quad FE = \frac{2x^2\sqrt{9-x^2}}{9-2x^2}$$

当 $\triangle ACB \sim \triangle DEF$ 时

由 (1) 问知 $\triangle AEB \sim \triangle DEF$

$$\text{即 } \frac{AE}{BE} = \frac{DE}{FE}$$

$$\text{则 } \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} = \frac{\frac{9-x^2}{x}}{\frac{2x^2\sqrt{9-x^2}}{9-2x^2}}$$

$$\text{化简为 } \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} = \frac{9-x^2}{x} \cdot \frac{9-2x^2}{2x^2\sqrt{9-x^2}}$$

$$\text{约分得 } 1 = \frac{9-2x^2}{2x^2}$$

$$\text{移向, 合并同类项得 } x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{则 } x = \frac{3}{2} \text{ 或 } x = -\frac{3}{2} \quad (\text{舍})$$

当 $\triangle ACB \sim \triangle FED$ 时

由 (1) 问知 $\triangle AEB \sim \triangle FED$

$$\text{即 } \frac{AE}{BE} = \frac{FE}{DE}$$

$$\text{则 } \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} = \frac{\frac{2x^2\sqrt{9-x^2}}{9-2x^2}}{\frac{9-x^2}{x}}$$

$$\text{化简得 } \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} = \frac{2x^2\sqrt{9-x^2}}{9-2x^2} \cdot \frac{x}{9-x^2}$$

$$\text{约分得 } \frac{1}{x} = \frac{2x^2}{9-2x^2} \cdot \frac{x}{9-x^2}$$

$$\text{移项得 } (9-2x^2)(9-x^2) = 2x^4$$

$$\text{去括号得 } 81 - 9x^2 - 18x^2 + 2x^4 = 2x^4$$

$$\text{移向、合并同类项得 } x^2 = 3$$

$$\text{则 } x = \sqrt{3} \text{ 或 } x = -\sqrt{3} \quad (\text{舍})$$

综上所述当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似时， BC 的长为 $\sqrt{3}$ 或 $\frac{3}{2}$.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定及证明，全等三角形的判定及证明，勾股定理，需熟练掌握相似三角形和全等三角形的判定及性质，本题解题过程中计算过程较复杂繁琐，耐心细致的计算是解题的关键.