

2022 年上海市静安区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题

1. 下列实数中，有理数是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. π C. $\sqrt{4}$ D. $\sqrt[3]{9}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据实数的分类，即可解答.

【详解】 解： A、 $\sqrt{3}$ 是无理数，故选项错误，不符合题意；

B、 π 是无理数，故选项错误，不符合题意；

C、 $\sqrt{4}=2$ ，2 是有理数，故选项正确；

D、 $\sqrt[3]{9}$ 是无理数，故选项错误，不符合题意.

故选： C.

【点睛】 本题考查了实数的分类，解题的关键是熟记实数的分类.

2. 计算 $x \div 2x^2$ 的结果是 ()

- A. $\frac{2}{x}$ B. $\frac{1}{2x}$ C. $\frac{x}{2}$ D. $2x$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据单项式除法的运算法则解答即可.

【详解】 解： $x \div 2x^2 = \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x}$.

故选 B.

【点睛】 本题主要考查了单项式除法，把被除式与除式的系数和相同底数字母的幂分别相除，其结果作为商的因式.

3. 已知点 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 的反向延长线上，且 $ED \parallel BC$ ，如果 $AD: DB = 1: 4$ ， $ED = 2$ ，那么 BC 的长是 ()

- A. 8 B. 10 C. 6 D. 4

【答案】 C

【解析】

【分析】 由平行线的性质和相似三角形的判定证明 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，再利用相似三角形的性质和求解即可.

【详解】 解： $\because ED \parallel BC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ADE, \quad \angle ACB = \angle AED,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore BC : ED = AB : AD,$$

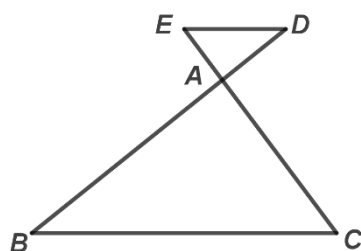
$$\therefore AD : DB = 1 : 4,$$

$$\therefore AB : AD = 3 : 1, \text{ 又 } ED = 2,$$

$$\therefore BC : 2 = 3 : 1,$$

$$\therefore BC = 6,$$

故选：C



【点睛】本题考查平行线的性质、相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解答的关键.

4. 将抛物线 $y = x^2 - 2x$ 向左平移 1 个单位，再向上平移 1 个单位后，所得抛物线的顶点坐标是 ()

A. (1, -1)

B. (-1, 1)

C. (1, 0)

D. (0, 0)

【答案】D

【解析】

【分析】求原抛物线的顶点坐标，根据平移得出新抛物线顶点坐标即可.

【详解】解：抛物线 $y = x^2 - 2x$ 化成顶点式为 $y = (x - 1)^2 - 1$ ，顶点坐标为 (1, -1)，将抛物线 $y = x^2 - 2x$ 向左平移 1 个单位，再向上平移 1 个单位后，所得抛物线的顶点坐标是 (0, 0)，
故选：D.

【点睛】本题考查了二次函数的顶点坐标与平移，解题关键是求出二次函数的顶点坐标.

5. 如果锐角 A 的度数是 25° ，那么下列结论中正确的是 ()

A. $0 < \sin A < \frac{1}{2}$

B. $0 < \cos A < \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3} < \tan A < 1$

D. $1 < \cot A < \sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据“正弦值随着角度的增大而增大”解答即可.

【详解】解：∵ $0^\circ < 25^\circ < 30^\circ$

$$\therefore 0 < \sin 25^\circ < \frac{1}{2}$$

$$\therefore 0 < \sin A < \frac{1}{2}.$$

故选 A.

【点睛】本题主要考查了锐角三角形的增减性，当角度在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 间变化时，①正弦值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小）；②余弦值随着角度的增大（或减小）而减小（或增大）；③正切值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小）.

6. 下列说法错误的是（ ）

- A. 任意一个直角三角形都可以被分割成两个等腰三角形
- B. 任意一个等腰三角形都可以被分割成两个等腰三角形
- C. 任意一个直角三角形都可以被分割成两个直角三角形
- D. 任意一个等腰三角形都可以被分割成两个直角三角形

【答案】B

【解析】

【分析】根据等腰三角形和直角三角形的性质判断各选项即可得出答案.

【详解】解：A、任意一个直角三角形一定能分成两个等腰三角形，本选项正确，不符合题意；

B、任意一个等腰三角形不一定能分成两个等腰三角形，本选项错误，符合题意；

C、任意一个直角三角形都可以被分割成两个直角三角形，本选项正确，不符合题意；

D、任意一个等腰三角形都可以被分割成两个直角三角形，本选项正确，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了等腰三角形和直角三角形的知识，解题的关键是能判断等腰三角形及直角三角形，可动手操作进行判断.

二、填空题

7. -5 的绝对值是_____.

【答案】5

【解析】

【分析】根据绝对值的定义计算即可.

【详解】解： $|-5|=5$,

故答案为：5.

【点睛】本题考查了绝对值的定义，掌握知识点是解题关键.

8. 如果 $\sqrt{3-x}$ 在实数范围内有意义，那么实数 x 的取值范围是_____

【答案】 $x \leq 3$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件列出不等式，解不等式得到答案.

【详解】解：∵二次根式 $\sqrt{3-x}$ 在实数范围内有意义，

$$\therefore 3-x \geq 0,$$

解得， $x \leq 3$ ，

故答案为： $x \leq 3$.

【点睛】本题考查的是二次根式有意义的条件，掌握二次根式的被开方数是非负数是解题的关键.

9. 已知 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ ，那么 $\frac{b-a}{b+a}$ 的值是_____

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】根据题意设 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = k$ ，则 $a = 2k, b = 3k$ ，进而代入式子进行求值即可.

【详解】解：设 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = k$ ，则 $a = 2k, b = 3k$ ，

$$\frac{b-a}{b+a} = \frac{3k-2k}{3k+2k} = \frac{k}{5k} = \frac{1}{5}.$$

故答案为： $\frac{1}{5}$.

【点睛】本题考查代数式求值以及比例的性质，熟练掌握比例的性质是解题的关键.

10. 已知线段 $AB = 2\text{cm}$ ，点 P 是 AB 的黄金分割点，且 $AP > PB$ ，那么 AP 的长度是_____cm（结果保留根号）

【答案】 $\sqrt{5}-1$

【解析】

【分析】根据黄金分割的概念得到 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$ ，把 $AB = 2\text{cm}$ 代入计算求出 AP 即可得出答案.

【详解】解：∵点 P 是线段 AB 的黄金分割点（ $AP > BP$ ），

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2 = (\sqrt{5}-1)\text{cm},$$

故答案为： $\sqrt{5}-1$.

【点睛】本题考查了黄金分割点，熟练掌握黄金分割值是解题的关键.

11. 如果某抛物线开口方向与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的开口方向相同，那么该抛物线有最_____点（填“高”或

“低”)

【答案】低

【解析】

【分析】根据抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的形状开口方向向上即可得出结果.

【详解】解: $\because$ 抛物线开口方向与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的开口方向相同, 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 中, $a = \frac{1}{2} > 0$ 开口方向向上,

$\therefore$ 该抛物线有最低点,

故答案为: 低.

【点睛】本题考查了二次函数的性质, 掌握抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象开口向上是解题的关键.

12. 已知反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像上的三点 $(-2, y_1), (-1, y_2), (1, y_3)$, 判断 y_1, y_2, y_3 的大小关系: _____

(用“ $<$ ”连接)

【答案】 $y_2 < y_1 < y_3$

【解析】

【分析】可以把点 $(-2, y_1), (-1, y_2), (1, y_3)$ 的横坐标代入函数解析式求出各纵坐标后再比较大小.

【详解】解: $\because y = \frac{1}{x}$,

$\therefore$ 当 $x = -2$ 时, $y_1 = -\frac{1}{2}$;

当 $x = -1$ 时, $y_2 = -1$;

当 $x = 1$ 时, $y_3 = 1$.

$\therefore y_2 < y_1 < y_3$.

故答案为: $y_2 < y_1 < y_3$.

【点睛】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 解题的关键可以利用函数的增减性来判断, 也可以代入后比较.

13. 如果抛物线 $y = x^2 + mx + 4$ 的顶点在 x 轴上, 那么常数 m 的值是_____

【答案】 ± 4

【解析】

【分析】把二次函数一般式转化为顶点式, 求出其顶点坐标, 再根据顶点在 x 轴上确定其纵坐标为 0, 进而求出 m 的值.

【详解】 $\because y = x^2 + mx + 4 = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + 4 - \frac{m^2}{4},$

$\therefore$ 二次函数顶点坐标为 $\left(-\frac{m}{2}, 4 - \frac{m^2}{4}\right).$

$\because$ 顶点在 x 轴上,

$\therefore 4 - \frac{m^2}{4} = 0,$

$\therefore m = \pm 4.$

故答案为: $\pm 4.$

【点睛】 本题考查二次函数的一般式转化为顶点式的方法和坐标轴上点的坐标特征, 熟练掌握以上知识点是解题关键.

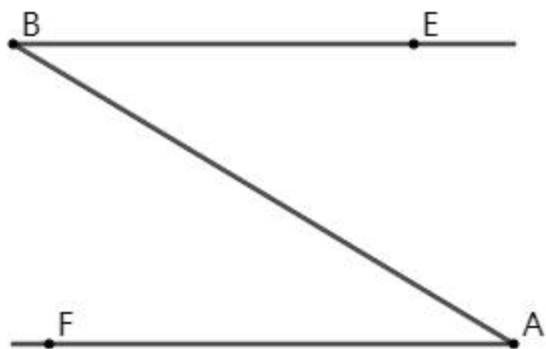
14. 如果在 A 点处观察 B 点的仰角为 α , 那么在 B 点处观察 A 点的俯角为_____ (用含 α 的式子表示)

【答案】 α

【解析】

【分析】 根据题意作出图形, 然后找出相应的仰角和俯角, 利用平行线的性质即可求解.

【详解】 解: 如图所示: 在 A 点处观察 B 点的仰角为 α , 即 $\angle FAB = \alpha,$



$\because FA \parallel BE,$

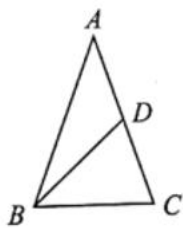
$\therefore \angle EBA = \angle FAB = \alpha,$

$\therefore$ 在 B 点处观察 A 点的俯角为 $\alpha,$

故答案为: $\alpha.$

【点睛】 题目主要考查仰角和俯角及平行线的性质, 理解题意, 作出相应的图形是解题关键.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 6, BC = 4,$ 点 D 在边 AC 上, $BD = BC,$ 那么 AD 的长是_____



【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】

【分析】根据等腰三角形的等边对等角可得 $\angle ABC = \angle C = \angle BDC$ ，根据相似三角形的判定证明 $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ ，根据相似三角形的性质求解即可。

【详解】解： $\because AB = AC, BD = BC,$

$$\therefore \angle ABC = \angle C, \angle C = \angle BDC,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{CD},$$

$$\because AB = AC = 6, BC = 4, BD = BC,$$

$$\therefore \frac{6}{4} = \frac{4}{CD},$$

$$\therefore CD = \frac{8}{3},$$

$$\therefore AD = AC - CD = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3},$$

故答案为： $\frac{10}{3}$.

【点睛】本题考查等腰三角形的性质、相似三角形的判定与性质，熟练掌握等腰三角形的性质和相似三角形的判定与性质是解答的关键。

16. 在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， DE 交边 AB 、 AC 分别于点 D 、 E ， 如果 $\triangle ADE$ 与四边形 $BCED$ 的面积相等， 那么 $AD: DB$ 的值为_____

【答案】 $\sqrt{2} + 1$

【解析】

【分析】由 $DE \parallel BC$ ， 可得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ， 又由 $\triangle ADE$ 的面积与四边形 $BCED$ 的面积相等， 根据相似三角形的面积比等于相似比的平方， 即可求得 $\frac{AD}{AB}$ 的值， 然后利用比例的性质可求出 $AD: DB$ 的值。

【详解】解： $\because DE \parallel BC,$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$\because \triangle ADE$ 的面积与四边形 $BCED$ 的面积相等,

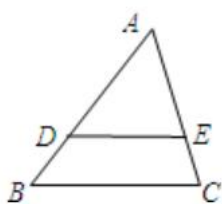
$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB-AD} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},$$

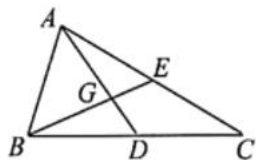
$$\therefore \frac{AD}{DB} = \sqrt{2} + 1.$$

故答案为: $\sqrt{2} + 1$.



【点睛】此题考查了相似三角形的判定与性质. 此题难度不大, 解题的关键是注意相似三角形的面积比等于相似比的平方定理的应用与数形结合思想的应用.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 中线 AD 、 BE 相交于点 G , 如果 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BC} =$ _____ (用含向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的式子表示)

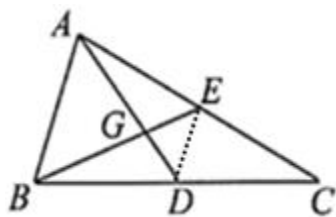


【答案】 $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】由 AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线, 可求得 $AE=EC$, $BD=DC$, 然后利用 $\triangle DEG \sim \triangle ABG$, 求得结果.

【详解】解: 连接 DE



$\because AD$ 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线,

$$\therefore AE=EC, BD=DC,$$

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore DE = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore \triangle DEG \sim \triangle ABG,$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{DG}{AG} = \frac{EG}{BG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AG=2DG, BG=2EG,$$

$$\therefore \overrightarrow{GD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \vec{a}, \quad -\frac{2}{3} \overrightarrow{BE} = -\frac{2}{3} \vec{b},$$

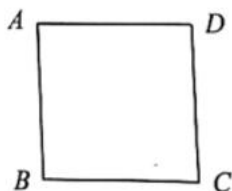
$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB} = \frac{1}{3} \vec{a} - (-\frac{2}{3} \vec{b}) = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{4}{3} \vec{b},$$

故答案为: $\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{4}{3} \vec{b}$.

【点睛】 本题考查了平面向量的知识. 此题难度不大, 注意掌握相似三角形判定的应用, 注意掌握数形结合思想的应用.

18. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, 将边 BC 绕着点 C 旋转, 当点 B 落在边 AD 的垂直平分线上的点 E 处时, $\angle AEC$ 的度数为_____

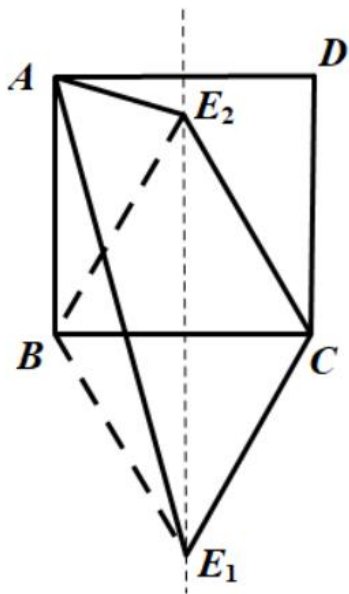


【答案】 45° 或 135°

【解析】

【分析】分两种情况分析: 当点 E 在 BC 下方时记点 E 为点 E_1 , 点 E 在 BC 上方时记点 E 为点 E_2 , 连接 BE_1 , BE_2 , 根据垂直平分线的性质得 $E_1B = E_1C$, $E_2B = E_2C$, 由正方形的性质得 $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 由旋转得 $BC = E_1C$, $BC = E_2C$, 故 $\triangle E_1BC$, $\triangle E_2BC$ 是等边三角形, $\triangle ABE_1$, $\triangle ABE_2$ 是等腰三角形, 由等边三角形和等腰三角形的求角即可.

【详解】



如图，当点 E 在 BC 下方时记点 E 为点 E_1 ，连接 BE_1 ，

$\because$ 点 E_1 落在边 AD 的垂直平分线，

$\therefore E_1B = E_1C$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = BC$ ，

$\because BC$ 绕点 C 旋转得 CE_1 ，

$\therefore BC = E_1C$ ，

$\therefore \triangle E_1BC$ 是等边三角形， $\triangle ABE_1$ 是等腰三角形，

$\therefore \angle CBE_1 = \angle BE_1C = 60^\circ$ ， $\angle ABE_1 = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ ，

$\therefore \angle AE_1B = \angle BAE_1 = (180^\circ - 150^\circ) \div 2 = 15^\circ$ ，

$\therefore \angle AE_1C = \angle BE_1C - \angle AE_1B = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$ ，

当点 E 在 BC 上方时记点 E 为点 E_2 ，连接 BE_2 ，

$\because$ 点 E_2 落在边 AD 的垂直平分线，

$\therefore E_2B = E_2C$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = BC$ ，

$\because BC$ 绕点 C 旋转得 CE_2 ，

$\therefore BC = E_2C$ ，

$\therefore \triangle E_2BC$ 是等边三角形， $\triangle ABE_2$ 是等腰三角形，

$$\therefore \angle CBE_2 = \angle BE_2C = 60^\circ, \quad \angle ABE_2 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AE_2B = \angle BAE_2 = (180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle AE_2C = \angle BE_2C + \angle AE_2B = 60^\circ + 75^\circ = 135^\circ.$$

故答案为: 45° 或 135° .

【点睛】本题考查正方形的性质、垂直平分线的性质、旋转的性质, 以及等边三角形与等腰三角形的判定与性质, 掌握相关知识点的应用是解题的关键.

三、解答题

19. 计算: $\frac{\tan 45^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \cot 30^\circ} - \sqrt{(\sin 30^\circ - 1)^2} + 2 \cos^2 45^\circ$

【答案】 $\frac{7}{6}$

【解析】

【分析】先将特殊角的锐角三角函数值代入, 再化简, 即可求解.

【详解】解: $\frac{\tan 45^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \cot 30^\circ} - \sqrt{(\sin 30^\circ - 1)^2} + 2 \cos^2 45^\circ$

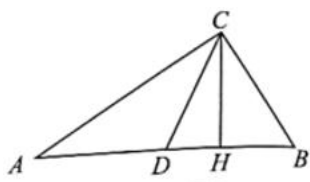
$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} + 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{7}{6}.$$

【点睛】本题主要考查了特殊角的锐角三角函数的混合运算, 熟练掌握特殊角的锐角三角函数值是解题的关键.

20. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 、 CH 分别是 AB 边上的中线和 AB 边上的高, $BC = \sqrt{14}$, $\cos \angle ACD = \frac{3}{4}$, 求 AB 、 CH 的长.



【答案】 CH 的长为 $\frac{3}{4}\sqrt{14}$, AB 的长为 $4\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】过 D 作 $DE \perp AC$ 于 E 可得 $AE = CE$, 然后求出 DE , 解直角三角形求出 AE , 进而求得 AC , 再运用

余弦的定义求得 AB ，最后根据三角形的面积公式求出 CH 即可.

【详解】解：过 D 作 $DE \perp AC$ 于 E ，则 $\angle AED = \angle CED = 90^\circ$ ，

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ACB,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$\because CD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore CE = AE, \text{ 即 } AC = 2CE$$

$$\because BC = \sqrt{14},$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} BC = \frac{\sqrt{14}}{2},$$

$$\because \cos \angle ACD = \frac{CE}{CD} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{设 } CE = 3x, CD = 4x,$$

$$\text{由勾股定理得: } DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \sqrt{(4x)^2 - (3x)^2} = \sqrt{7}x$$

$$\therefore \sqrt{7}x = \frac{\sqrt{14}}{2}, \text{ 即 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore AE = CE = 3x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore AC = AE + CE = 3\sqrt{2}$$

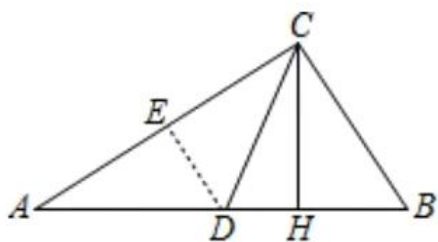
$$\because \cos \angle ACD = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}, \text{ 即 } \frac{3\sqrt{2}}{AB} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore AB = 4\sqrt{2}$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} \times AB \times CH$$

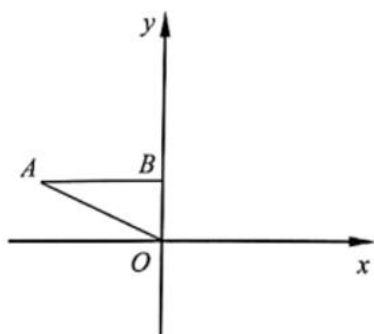
$$\therefore \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{14} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times CH, \text{ 解得: } CH = \frac{3}{4}\sqrt{14}.$$

$$\therefore CH \text{ 的长为 } \frac{3}{4}\sqrt{14}, AB \text{ 的长为 } 4\sqrt{2}.$$



【点睛】本题主要考查了解直角三角形、三角形的面积、勾股定理等知识点，正确求出 AC 的长是解答本题的关键.

21. 我们将平面直角坐标系 xOy 中的图形 D 和点 P 给出如下定义：如果将图形 D 绕点 P 顺时针旋转 90° 得到图形 D' ，那么图形 D' 称为图形 D 关于点 P 的“垂直图形”. 已知点 A 的坐标为 $(-2, 1)$ ，点 B 的坐标为 $(0, 1)$ ， $\triangle ABO$ 关于原点 O 的“垂直图形”记为 $\triangle A'B'O'$ ，点 A 、 B 的对应点分别为点 A' 、 B' 。



- (1) 请写出：点 A' 的坐标为_____；点 B' 的坐标为_____；
- (2) 请求出经过点 A 、 B 、 B' 的二次函数解析式；
- (3) 请直接写出经过点 A 、 B 、 A' 的抛物线的表达式为_____.

【答案】(1) $(1, 2)$ ； $(1, 0)$

$$(2) y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$$

$$(3) y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$$

【解析】

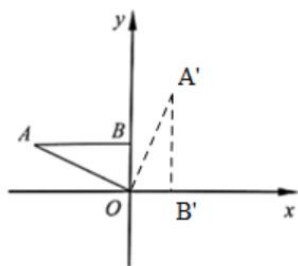
【分析】(1) 根据旋转的性质得出 $OB = OB'$ ， $AB = A'B'$ ；

(2) 利用待定系数法进行求解解析式即可；

(3) 利用待定系数法求解解析式即可，或利用与 (2) 中对对称轴相同，开口方向相反可以快速得出答案.

【小问 1 详解】

解：根据题意作下图：



根据旋转的性质得: $OB = OB' = 1$, $AB = A'B' = 0 - (-2) = 2$,

$\therefore A'(1, 2)$, $B'(1, 0)$,

故答案是: $(1, 2)$; $(1, 0)$;

【小问 2 详解】

解: 设过点 A 、 B 、 B' 的二次函数解析式为: $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$),

将点 $A(-2, 1)$, $B(0, 1)$, $B'(1, 0)$ 分别代入 $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) 中得:

$$\begin{cases} 1 = a(-2)^2 - 2b + c \\ 1 = c \\ 0 = a + b + c \end{cases},$$

解得: $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 1$,

$\therefore y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$;

【小问 3 详解】

解: 设过点 A 、 B 、 A' 的二次函数解析式为: $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$),

将点 $A(-2, 1)$, $B(0, 1)$, $A'(1, 2)$ 分别代入 $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) 中得:

$$\begin{cases} 1 = a(-2)^2 - 2b + c \\ 1 = c \\ 2 = a + b + c \end{cases},$$

解得: $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 1$,

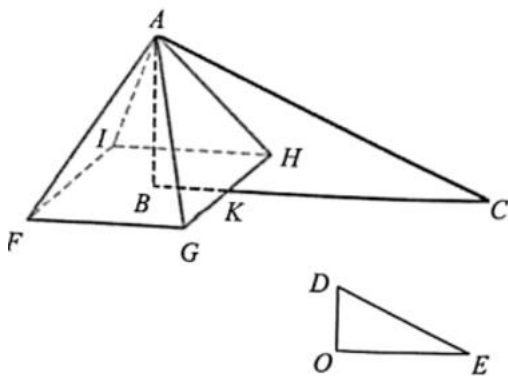
$\therefore y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$;

故答案为: $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.

【点睛】 本题考查了旋转的性质, 利用待定系数法求解解析式, 解题的关键是掌握待定系数法求解解析式.

22. 据说, 在距今 2500 多年前, 古希腊数学家就已经较准确地测出了埃及金字塔的高度, 操作过程大致如下: 如图所示, 设 AB 是金字塔的高, 在某一时刻, 阳光照射下的金字塔在底面上投下了一个清晰的阴影,

塔顶 A 的影子落在地面上的点 C 处，金字塔底部可看作正方形 $FGHI$ ，测得正方形边长 FG 长为 160 米，点 B 在正方形的中心， BC 与金字塔底部一边垂直于点 K ，与此同时，直立地面上的一根标杆 DO 留下的影子是 OE ，射向地面的太阳光线可看作平行线 ($AC \parallel DE$)，此时测得标杆 DO 长为 1.2 米，影子 OE 长为 2.7 米， KC 长为 250 米，求金字塔的高度 AB 及斜坡 AK 的坡度 (结果均保留四个有效数字)



【答案】金字塔的高度 AB 为 $\frac{440}{3}$ 米，斜坡 AK 的坡度为 1.833.

【解析】

【分析】根据同一时刻物高与影长成正比例列式计算即可.

【详解】解: $\because FGHI$ 是正方形, 点 B 在正方形的中心, $BC \perp HG$,

$$\therefore BK \parallel FG, BK = \frac{1}{2}FG = \frac{1}{2} \times 160 = 80,$$

$\therefore$ 根据同一时刻物高与影长成正比例,

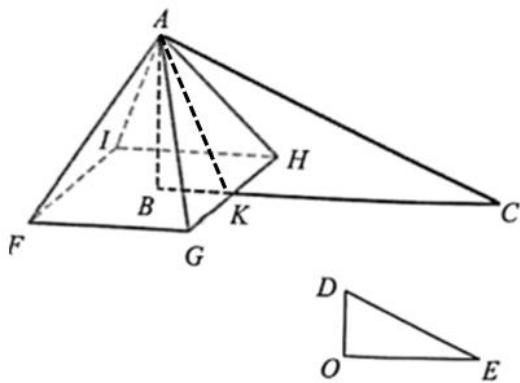
$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DO}{OE}, \text{ 即 } \frac{AB}{80 + 250} = \frac{1.2}{2.7},$$

$$\text{解得: } AB = \frac{440}{3} \text{ 米,}$$

连接 AK ,

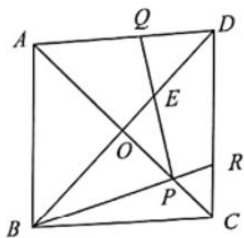
$$\frac{AB}{BK} = \frac{\frac{440}{3}}{80} = 1.833.$$

$\therefore$ 金字塔的高度 AB 为 $\frac{440}{3}$ 米, 斜坡 AK 的坡度为 1.833.



【点睛】本题考查了相似三角形的应用，只要是把实际问题抽象到相似三角形中，利用相似三角形的相似比，列出方程，通过解方程求解，解此题的关键是找到各部分以及与其对应的影长.

23. 如图，边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，点 Q 、 R 分别在边 AD 、 DC 上， BR 交线段 OC 于点 P ， $QP \perp BP$ ， QP 交 BD 于点 E .



(1) 求证: $\triangle APQ \sim \triangle DBR$;

(2) 当 $\angle QED$ 等于 60° 时，求 $\frac{AQ}{DR}$ 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

【解析】

【分析】(1) 根据正方形的性质，可得 $\angle CAD = \angle BDC = 45^\circ$ ， $\angle OBP + \angle OPB = 90^\circ$ ，再由 $QP \perp BP$ ，可得 $\angle OBP = \angle OPE$ ，即可求证；

(2) 设 $OE = a$ ，根据 $\angle QED$ 等于 60° ，可得 $\angle BEP = 60^\circ$ ，然后利用锐角三角函数，可得 $BD = 2OB = 6a$ ， $AP = OA + OP = (3 + \sqrt{3})a$ ，然后根据相似三角形的对应边成比例，即可求解.

【小问 1 详解】

证明：在正方形 $ABCD$ 中，

$\angle CAD = \angle BDC = 45^\circ$ ， $BD \perp AC$ ，

$\therefore \angle BOC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle OBP + \angle OPB = 90^\circ$ ，

$\because QP \perp BP$ ，

$\therefore \angle BPQ = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle OPE + \angle OPB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBP = \angle OPE,$$

$$\therefore \triangle APQ \sim \triangle DBR;$$

【小问 2 详解】

解：设 $OE = a$,

在正方形 $ABCD$ 中, $\angle POE = 90^\circ$, $OA = OB = OD$,

$$\therefore \angle QED \text{ 等于 } 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BEP = 60^\circ,$$

在 $Rt\triangle OEP$ 中,

$$PE = \frac{OE}{\cos 60^\circ} = 2a, \quad OP = OE \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore QP \perp BP, \quad \angle BEP = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle PBE = 30^\circ,$$

$$\therefore BE = 2PE = 4a, \quad BP = PE \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}a,$$

$$\therefore OA = OB = BE - OE = 3a,$$

$$\therefore BD = 2OB = 6a,$$

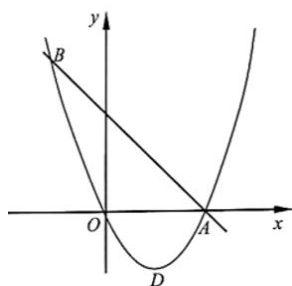
$$\therefore AP = OA + OP = 3a + \sqrt{3}a = (3 + \sqrt{3})a,$$

$$\therefore \triangle APQ \sim \triangle DBR,$$

$$\therefore \frac{AQ}{DR} = \frac{AP}{BD} = \frac{(3 + \sqrt{3})a}{6a} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}.$$

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定和性质, 解直角三角形, 熟练掌握相似三角形的判定和性质定理, 特殊角锐角三角函数值是解题的关键.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = x^2 + bx$ 经过点 $A(2, 0)$ 和点 $B(-1, m)$, 顶点为点 D .



(1) 求直线 AB 的表达式;

(2) 求 $\tan \angle ABD$ 的值;

(3) 设线段 BD 与 x 轴交于点 P , 如果点 C 在 x 轴上, 且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABP$ 相似, 求点 C 的坐标.

【答案】(1) $y = -x + 2$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $C(-10, 0)$ 或 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

【解析】

【分析】(1) 根据抛物线 $y = x^2 + bx$ 经过点 $A(2, 0)$ ，可得抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x$ ，再求出点 B 的坐标，即可求解；

(2) 先求出点 D 的坐标为 $D(1, -1)$ ，然后利用勾股定理逆定理，可得 $\triangle ABD$ 为直角三角形，即可求解；

(3) 先求出直线 BD 的解析式，可得到点 P 的坐标为 $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ，然后分两种情况讨论即可求解。

【小问1详解】

解：∵ 抛物线 $y = x^2 + bx$ 经过点 $A(2, 0)$ ，

∴ $2^2 + 2b = 0$ ，解得： $b = -2$ ，

∴ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x$ ，

当 $x = -1$ 时， $y = 3$ ，

∴ 点 B 的坐标为 $B(-1, 3)$ ，

设直线 AB 的解析式为 $y = kx + m (k \neq 0)$ ，

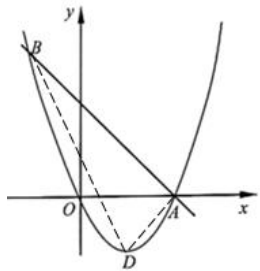
把 $A(2, 0)$ ， $B(-1, 3)$ ，代入得：

$$\begin{cases} 2k + m = 0 \\ -k + m = 3 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = -1 \\ m = 2 \end{cases},$$

∴ 直线 AB 的解析式为 $y = -x + 2$ ；

【小问2详解】

如图，连接 BD ， AD ，



$$\because y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1,$$

$$\therefore CQ=9,$$

$$\therefore OC=OQ+CQ=10,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } C(-10,0);$$

当 $\triangle ABP \sim \triangle ABC$ 时, $\angle APB = \angle ACB$, 此时点 C 与点 P 重合,

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } C\left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

综上所述, 点 C 的坐标为 $C(-10, 0)$ 或 $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

【点睛】本题主要考查了二次函数的图象和性质, 勾股定理逆定理, 锐角三角函数, 相似三角形的性质, 熟练掌握相关知识点, 并利用数形结合思想解答是解题的关键.

25. 如图 1, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD$ 的平分线 AE 交边 BC 于点 E , 已知 $AB=9$, $AE=6$, $AE^2 = AB \cdot AD$, 且 $DC \parallel AE$.

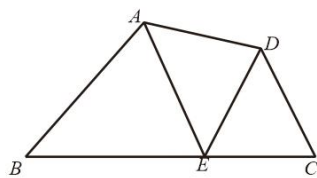


图1

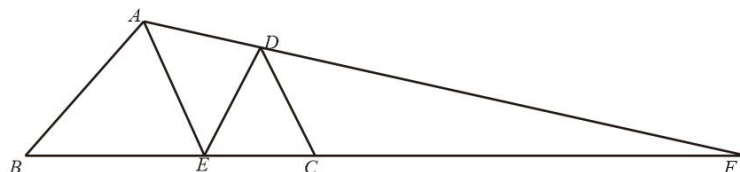


图2

(1) 求证: $DE^2 = AE \cdot DC$;

(2) 如果 $BE=9$, 求四边形 $ABCD$ 的面积;

(3) 如图 2, 延长 AD 、 BC 交于点 F , 设 $BE=x$, $EF=y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域.

【答案】(1) 见解析 (2) $34\sqrt{2}$

$$(3) y = \frac{36x}{81-x^2} (3 < x < 9)$$

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\triangle ABE \sim \triangle AED$, 可得 $\angle AEB = \angle ADE$, 再由平行线性质可推出 $\angle ADE = \angle DCE$, 进而证得 $\triangle ADE \sim \triangle ECD$, 根据相似三角形性质可证得结论;

(2) 如图, 过点 B 作 $BG \perp AE$, 运用等腰三角形的性质可得 G 为 AE 的中点, 进而可证得 $\triangle ADE \cong \triangle ECD$

(SAS), 再求得 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times AE \times BG = 18\sqrt{2}$, 根据 $\triangle ABE \sim \triangle AED$ 且相似比为 3:2, 可求得

$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CDE} = 8\sqrt{2}$, 由 $S_{\text{四边形}ABCE} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle AED} + S_{\triangle CDE}$ 可求答案;

(3) 由 $\triangle ABE \sim \triangle AED$, 可求得: $DE = \frac{2}{3}x$, 进而得出 $DC = \frac{2}{27}x^2$, 再利用 $\triangle ADE \sim \triangle ECD$, 进而求得:

$CF = \frac{x^2}{81}EF$, 再结合题意得出答案.

【小问 1 详解】

$\because AE$ 平分 $\angle BAD$

$\therefore \angle BAE = \angle DAE$

$\because AE^2 = AB \cdot AD$

$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AD}$

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle AED$

$\because \angle ABE = \angle ADE$

$\therefore DC \parallel AE$

$\therefore \angle AED = \angle DCE, \angle AED = \angle CDE$

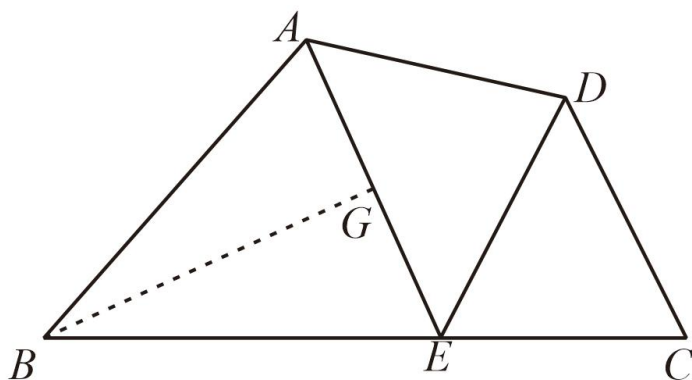
$\therefore \angle ADE = \angle DCE,$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ECD$

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{DE}{DC}$

$\therefore DE^2 = AE \cdot DC$

【小问 2 详解】



如图，过点 B 作 $BG \perp AE$

$\because BE = 9 = AB$

$\therefore \triangle ABE$ 是等腰三角形

$\therefore G$ 为 AE 的中点，

由 (1) 可得 $\triangle ADE$ 、 $\triangle ECD$ 也是等腰三角形，

$\because AE^2 = AB \cdot AD, AB = BE = 9, AE = 6$

$\therefore AD = 4, DE = 6, CE = 4, AG = 3$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ECD$ (SAS)

在 $Rt\triangle ABG$ 中，

$$BG = \sqrt{AB^2 - AG^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times AE \times BG = \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$$

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle AED$ 且相似比为 3:2

$$\therefore S_{\triangle ABE} : S_{\triangle AED} = 9:4$$

$$\therefore S_{\triangle AED} = S_{\triangle CDE} = 8\sqrt{2}$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle AED} + S_{\triangle CDE} = 18\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 34\sqrt{2}$$

【小问 3 详解】

由 (1) 知: $\triangle ABE \sim \triangle AED$

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{AE}{DE}$$

$$\therefore BE=x, AB=9, AE=6, AE^2 = AB \cdot AD, AD=4$$

$$\therefore \frac{9}{x} = \frac{6}{DE}$$

$$\therefore DE = \frac{2}{3}x$$

由 (1) 知: $DE^2 = AE \cdot DC$,

$$\therefore DC = \frac{2}{27}x^2$$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ECD$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{CE}{DE} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore CE = \frac{4}{9}x$$

$\therefore DC \parallel AE$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle DCF$$

$$\therefore \frac{CE}{EF} = \frac{EF - CF}{EF} = \frac{EF - \frac{x^2}{81}EF}{EF} = \frac{81 - x^2}{81}$$

$$y = EF = \frac{81}{81 - x^2} CE = \frac{81}{81 - x^2} \times \frac{4}{9}x = \frac{36x}{81 - x^2}$$

$$\therefore \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + AE > AB \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 6 > 9 \end{cases}$$

$$\therefore 3 < x < 9$$

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y = \frac{36x}{81-x^2}$, 定义域为 $3 < x < 9$

【点睛】 本题是相似三角形综合题, 考查了角平分线定义, 平行线的性质, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质, 等腰三角形的性质, 三角形面积等知识, 熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题关键.