

2022 年上海市青浦区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题：(本大题共 6 题，每小题 4 分，满分 24 分) [每题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1. 下列图形，一定相似的是 ()

- A. 两个直角三角形 B. 两个等腰三角形 C. 两个等边三角形 D. 两个菱形

【答案】C

【解析】

【分析】根据相似图形的定义，结合图形，对选项一一分析，利用排除法求解.

【详解】解：A.两个直角三角形，不一定有锐角相等，故不一定相似；

B.两个等腰三角形顶角不一定相等，故不一定相似；

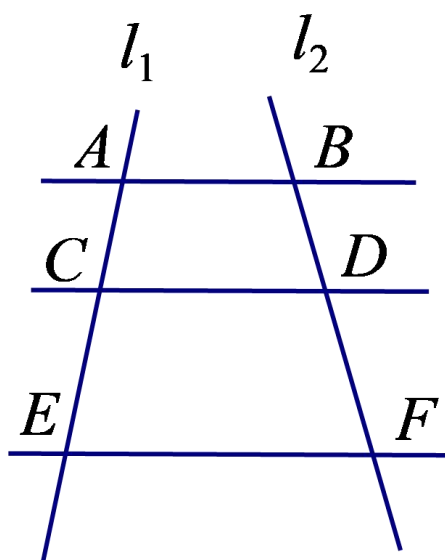
C.两个等边三角形，角都是 60° ，故相似；

D.任意两个菱形的对应边的比相等，但对应角不一定相等，故不一定相似；

故选 C.

【点睛】本题考查的是相似图形的概念，掌握对应角相等，对应边的比相等的多边形，叫做相似多边形是解题的关键.

2. 如图，已知 $AB \parallel CD \parallel EF$ ，它们依次交直线 l_1 、 l_2 于点 A 、 C 、 E 和点 B 、 D 、 F . 如果 $AC:CE=2:3$ ， $BD=4$ ，那么 BF 等于 ()



A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行线分线段成比例定理求解即可.

【详解】解: $\because AB \parallel CD \parallel EF$,

$$\therefore AC:CE = BD:DF,$$

$$\because AC:CE = 2:3, BD=4,$$

$$\therefore 2:3 = 4:DF,$$

$$\therefore DF=6,$$

$$\therefore BF=BD+DF=4+6=10,$$

故选: C.

【点睛】本题考查平行线分线段成比例定理、比例性质, 熟练掌握平行线分线段成比例定理及其应用是解答的关键.

3. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 那么 $\cot A$ 等于 ()

A. $\frac{AC}{BC}$

B. $\frac{AC}{AB}$

C. $\frac{BC}{AC}$

D. $\frac{BC}{AB}$

【答案】 A

【解析】

【分析】根据锐角 A 的邻边 a 与对边 b 的比叫做 $\angle A$ 的余切, 记作 $\cot A$.

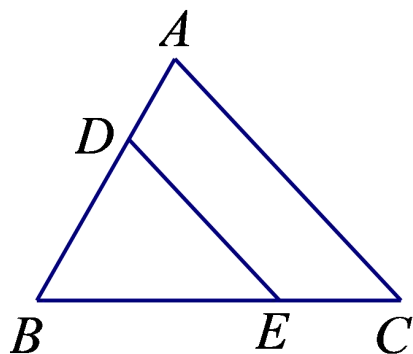
【详解】解: $\because \angle C=90^\circ$,

$$\therefore \cot A = \frac{AC}{BC},$$

故选: A.

【点睛】此题主要考查了锐角三角函数的定义, 关键是掌握余切定义.

4. 如图, 点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 BC 上, 下列条件中一定能判定 $DE \parallel AC$ 的是 ()



A. $\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{CE}$

B. $\frac{BD}{AD} = \frac{BE}{EC}$

C. $\frac{AD}{AB} = \frac{CE}{BE}$

D. $\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}$

【答案】 B

【解析】

【分析】如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边．根据平行线分线段成比例定理对各个选项进行判断即可．

【详解】A. 由 $\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{CE}$ ，不能得到 $DE \parallel BC$ ，故本选项不合题意；

B. 由 $\frac{BD}{AD} = \frac{BE}{EC}$ ，能得到 $DE \parallel BC$ ，故本选项符合题意；

C. 由 $\frac{AD}{AB} = \frac{CE}{BE}$ ，不能得到 $DE \parallel BC$ ，故本选项不合题意；

D. 由 $\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}$ ，不能得到 $DE \parallel BC$ ，故本选项不符合题意；

故选 B.

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理的应用，如果一条直线截三角形的两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边．

5. 如果 $\vec{a} = -2\vec{b}$ ($\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 均为非零向量)，那么下列结论错误的是 ()

- A. $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ B. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ C. $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$ D. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行向量以及模的定义的知识求解即可求得答案，注意掌握排除法在选择题中的应用．

【详解】解：A、正确，不符合题意．因为 $\vec{a} = -2\vec{b}$ 所以 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ；

B、正确，不符合题意．因为 $\vec{a} = -2\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ 均为非零向量)，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是方向相反的向量，即 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ；

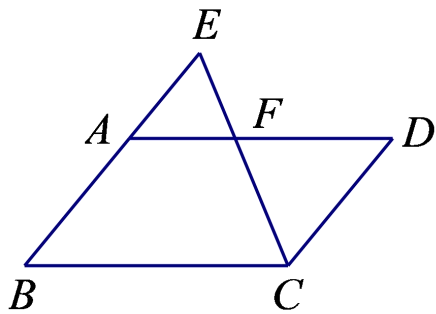
C、正确，不符合题意．由 $\vec{a} = -2\vec{b}$ 可得 $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$

D、错误，符合题意．因为 $\vec{a} = -2\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ 均为非零向量)，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是方向相反的向量，

故选：D.

【点睛】本题考查了平面向量，注意，平面向量既有大小，又由方向，平行向量，也叫共线向量，是指方向相同或相反的非零向量．零向量和任何向量平行．

6. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在边 BA 的延长线上，联结 EC ，交边 AD 于点 F ，则下列结论一定正确的是 ()



- A. $\frac{EA}{AB} = \frac{AF}{BC}$ B. $\frac{EA}{AB} = \frac{FD}{AF}$ C. $\frac{AF}{BC} = \frac{EA}{CD}$ D. $\frac{EA}{EB} = \frac{AF}{AD}$

【答案】D

【解析】

【分析】由 $ABCD$ 是平行四边形，可得 $AD \parallel BC$ ，且 $AD = BC$ ，根据相似三角形对应边成比例，可以得出正确答案.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $AD \parallel BC$ ，且 $AD = BC$ ，

∴ $\triangle FAE \sim \triangle CBE$ ，

∴ $\frac{EA}{EB} = \frac{AF}{BC}$ (相似三角形对应边成比例)，

即 $\frac{EA}{EB} = \frac{AF}{AD}$

故选：D.

【点睛】本题主要考查相似三角形的判定和性质. 根据平行找出相似三角形，是解决本题的关键.

二、填空题：(本大题共 12 题，每小题 4 分，满分 48 分) [请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. 已知线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项，且 $a = 1$ ， $b = 3$ ，那么 $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】9

【解析】

【分析】根据线段比例中项的概念可得 $b^2 = ac$ ，然后求出 b 的值即可.

【详解】解：∵ 线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项，即 $a : b = b : c$ ， $b = 3$

∴ $b^2 = ac$ ，即 $ac = 9$ ，

∵ $a = 1$

∴ $c = 9$

故答案为：9.

【点睛】本题考查了比例线段：对于四条线段 a 、 b 、 c 、 d ，如果其中两条线段的比（即它们的长度比）与另两条线段的比相等，如 $a : b = c : d$ （即 $ad = bc$ ），我们就说这四条线段是成比例线段，简称比例线段.

8. 计算: $3\vec{a} - 2(\vec{a} - 2\vec{b}) =$ _____.

【答案】 $\vec{a} + 4\vec{b}$

【解析】

【分析】 先去括号, 然后计算加减法.

【详解】 解: 原式 $= 3\vec{a} - 2\vec{a} + 4\vec{b}$,
 $= \vec{a} + 4\vec{b}$,

故答案是: $\vec{a} + 4\vec{b}$.

【点睛】 本题主要考查了平面向量, 平面向量的运算法则与实数的运算法则相同.

9. 如果两个相似三角形的周长比为 2: 3, 那么它们的对应高的比为_____.

【答案】 2:3

【解析】

【分析】 根据相似三角形的周长比等于相似比可求得其相似比, 再根据对应高线的比等于相似比可得到答案.

【详解】 $\because$ 两个相似三角形的周长比为 2:3,
 $\therefore$ 两个相似三角形的相似比为 2:3,
 $\therefore$ 对应高线的比为 2:3,
故答案为: 2:3.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质, 掌握相似三角形的周长比、对应高线比等于相似比是解题的关键.

10. 二次函数 $y = -x^2 - x - 1$ 的图像有最_____点. (填“高”或“低”)

【答案】 高

【解析】

【分析】 根据二次函数图象的开口即可解答.

【详解】 解: $\because$ 二次函数 $y = -x^2 - x - 1$
 $\therefore$ 二次函数 $y = -x^2 - x - 1$ 的图像开口向下
 $\therefore$ 二次函数 $y = -x^2 - x - 1$ 的图像有最高点.
故答案是高.

【点睛】 本题主要考查了二次函数的性质, 对于 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 当 $a > 0$, 函数图象开口方向向上, 函数图象开口方向向下.

11. 将抛物线 $y = x^2$ 向下平移 2 个单位, 所得抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = x^2 - 2$

【解析】

【分析】根据“上加下减，左加右减”的原则进行解答即可.

【详解】解：将抛物线 $y=x^2$ 向下平移 2 个单位后所得新抛物线的表达式为 $y=x^2-2$.

故答案是： $y=x^2-2$.

【点睛】本题主要考查了二次函数的图象与几何变换，熟知“上加下减，左加右减”的原则是解答本题的关键.

12. 如果抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (其中 a 、 b 、 c 是常数，且 $a\neq 0$) 在对称轴左侧的部分是下降的，那么 a _____ 0. (填“<”或“>”)

【答案】 >

【解析】

【分析】根据抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在对称轴左侧的部分是下降的，即可得到答案.

【详解】解： $\because y=ax^2+bx+c$ 在对称轴左侧的部分是下降的，

$\therefore$ 函数图象的开口向上，

$\therefore a > 0$,

故答案为： > .

【点睛】本题考查二次函数的性质，解答本题的关键是明确题意，利用二次函数的性质解答.

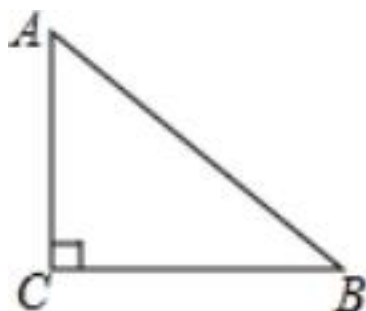
13. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，如果 $\tan \angle A=2$ ， $AC=3$ ，那么 $BC=$ _____.

【答案】 6

【解析】

【分析】利用正切的定义求解.

【详解】解： $\because \angle C=90^\circ$,



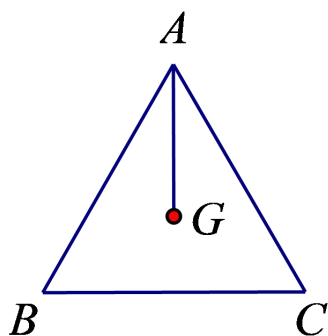
$$\therefore \tan \angle A = \frac{BC}{AC} = 2,$$

$$\therefore BC = 2AC = 2 \times 3 = 6.$$

故答案为： 6.

【点睛】本题考查了锐角三角函数的定义：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$. 锐角 A 的对边 a 与邻边 b 的比叫做 $\angle A$ 的正切，记作 $\tan A$.

14. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，边长为 3， G 是三角形的重心，那么 $GA=$ _____.



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 延长 AG 交 BC 于 D ，根据重心的概念得到 $AD \perp BC$ ， $BD=DC=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$ ，根据勾股定理求出 AD ，根据重心的概念计算即可．

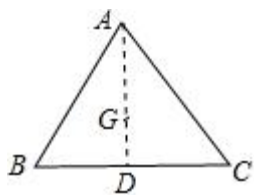
【详解】 解： 延长 AG 交 BC 于 D ，

$\because G$ 是三角形的重心，

$$\therefore AD \perp BC, BD=DC=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2},$$

$$\text{由勾股定理得, } AD=\sqrt{AB^2-DB^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

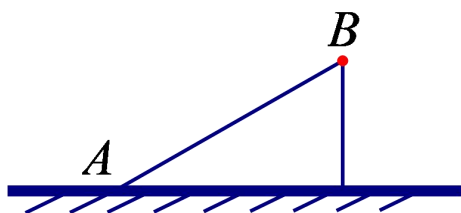
$$\therefore GA=\frac{2}{3}AD=\sqrt{3},$$



故答案为： $\sqrt{3}$ ．

【点睛】 本题考查的是等边三角形的性质、三角形的重心的概念，三角形的重心是三角形三条中线的交点，且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍．

15. 如图，如果小华沿坡度为 $1:\sqrt{3}$ 的坡面由 A 到 B 行走了 8 米，那么他实际上升的高度为_____米．



【答案】 4

【解析】

【分析】根据坡度的概念（把坡面的垂直高度 h 和水平方向的距离 l 的比叫做坡度）求出 $\angle A$ ，根据直角三角形的性质解答.

【详解】解： $\because i=1:\sqrt{3}$,

$$\therefore \tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

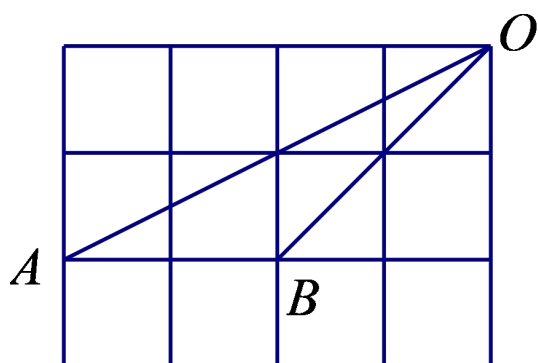
$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{上升的高度} = \frac{1}{2} AB = 4 \text{ (米)}.$$

故答案为 4.

【点睛】本题考查的是解直角三角形的应用-坡度坡角问题，掌握锐角三角函数的定义、坡度坡角的概念是解题的关键.

16. 如图，在边长相同的小正方形组成的网格中，点 A 、 B 、 O 都在这些小正方形的顶点上，那么 $\sin \angle AOB$ 的值为_____.



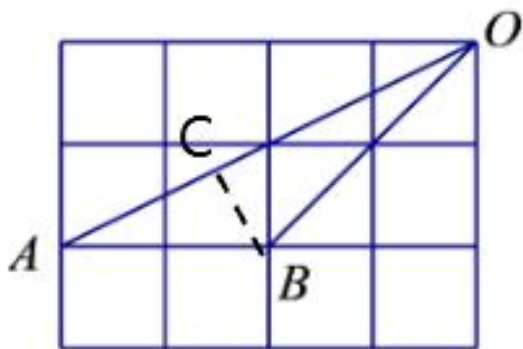
【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】

【分析】如图，过点 B 向 AO 作垂线交点为 C ，勾股定理求出 OB ， OA 的值， $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \times h = \frac{1}{2} AO \times BC$

求出 BC 的长, $\sin \angle AOB = \frac{BC}{OB}$ 求出值即可.

【详解】解: 如图, 过点 B 向 AO 作垂线交点为 C , O 到 AB 的距离为 h



$$\because AB = 2, \quad h = 2, \quad OA = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, \quad OB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \times h = \frac{1}{2} AO \times BC$$

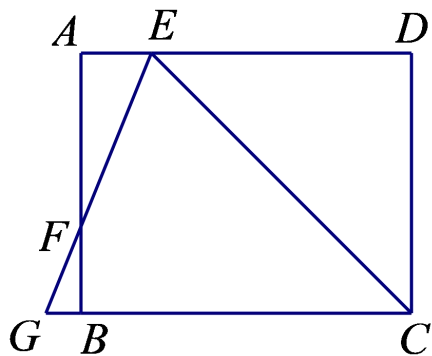
$$\therefore BC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \sin \angle AOB = \frac{BC}{OB} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

故答案为: $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

【点睛】本题考查了锐角三角函数值, 勾股定理. 解题的关键是表示出所需线段长.

17. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle BCD$ 的角平分线 CE 与边 AD 交于点 E , $\angle AEC$ 的角平分线与边 CB 的延长线交于点 G , 与边 AB 交于点 F , 如果 $AB = 3\sqrt{2}$, $AF = 2BF$, 那么 $GB =$ _____.



【答案】 $2 - \sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2} + 2$

【解析】

【分析】先说明三角形 CDE 为等腰直角三角形，并求得其斜边 CE 的长，然后再说明三角形 CEG 为等腰三角形，最后根据 $\triangle EFA \sim \triangle BGF$ 得出比例式，结合 $DF \cdot AF = 2BF^2$ 得出 CG 与 DE 的倍数关系，最后根据 $BG = BC + CG$ 进行计算即可.

【详解】解： $\because$ 矩形 $ABCD$ 中， $\angle BCD$ 的角平分线 CE 与 AD 交于 E ;

$$\therefore CD = AB = 3\sqrt{2}, \angle DCE = \angle BCE = 45^\circ,$$

$$\therefore CD = DE = 3\sqrt{2},$$

$\because$ 直角三角形 CDE ,

$$\therefore CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = 6,$$

又 $\because \angle AEC$ 的角平分线 EG 与 AB 交于点 F ,

$$\therefore \angle AEG = \angle CEG$$

$$\because AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle G = \angle AEG$$

$$\therefore \angle CEG = \angle G$$

$$\therefore CG = CE = 6,$$

$$\because \angle G = \angle AEF, \angle AFE = \angle BFG,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle BGF$$

$$\therefore \frac{GB}{AE} = \frac{FG}{EF} = \frac{FB}{AF} = \frac{BF}{2BF} = \frac{1}{2}$$

设 $BG = x$, $AE = 2x$, 则 $BC = AD = 3\sqrt{2} + 2x$

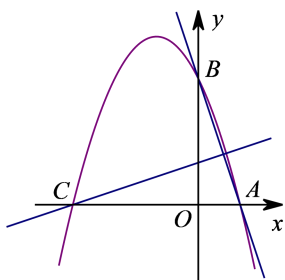
$$\therefore CG = BC + BG$$

$$\therefore 6 = 3\sqrt{2} + 2x + x, \text{ 解得 } x = 2 - \sqrt{2}.$$

故答案为: $2 - \sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查矩形的性质、相似三角形性质和判定以及等腰三角形的性质，证得三角形 CEG 为等腰三角形成为解答本题的关键.

18. 如图，一次函数 $y = ax + b (a < 0, b > 0)$ 的图像与 x 轴， y 轴分别相交于点 A ，点 B ，将它绕点 O 逆时针旋转 90° 后，与 x 轴相交于点 C ，我们将图像过点 A, B, C 的二次函数叫做与这个一次函数关联的二次函数. 如果一次函数 $y = -kx + k (k > 0)$ 的关联二次函数是 $y = mx^2 + 2mx + c (m \neq 0)$ ，那么这个一次函数的解析式为_____.



【答案】 $y = -3x + 3$

【解析】

【分析】由题意可知二次函数与坐标轴的三个交点坐标为 $(0, k)$, $(1, 0)$, $(-k, 0)$, 将其代入抛物线 $y = mx^2 + 2mx + c$ ($m \neq 0$) 即可得 m, k 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3m + k = 0 \\ km - 2m + 1 = 0 \end{cases}$, 即可解出 $\begin{cases} m = -1 \\ k = 3 \end{cases}$, 故这个一次函数的解析式为 $y = -3x + 3$.

【详解】一次函数 $y = -kx + k$ ($k > 0$) 与 y 轴的交点为 $(0, k)$, 与 x 轴的交点为 $(1, 0)$ 绕 O 点逆时针旋转 90° 后, 与 x 轴的交点为 $(-k, 0)$

即 $(0, k)$, $(1, 0)$, $(-k, 0)$ 过抛物线 $y = mx^2 + 2mx + c$ ($m \neq 0$)

$$\text{即} \begin{cases} k = c \\ m + 2m + c = 0 \\ k^2m - 2km + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} 3m + k = 0 \\ km - 2m + 1 = 0 \end{cases}$$

将 $m = \frac{-k}{3}$ 代入 $km - 2m + 1 = 0$ 有

$$(k-2) \cdot \frac{-k}{3} + 1 = 0$$

$$\text{整理得 } k^2 - 2k - 3 = 0$$

解得 $k=3$ 或 $k=-1$ (舍)

将 $k=3$ 代入 $m = \frac{-k}{3}$ 得 $m = -1$

$$\text{故方程组的解为} \begin{cases} m = -1 \\ k = 3 \end{cases}$$

则一次函数的解析式为 $y = -3x + 3$

故答案为: $y = -3x + 3$.

【点睛】本题考查了一次函数和二次函数的图象及其性质, 解二元一次方程组, 结合旋转的性质以及图象

得出抛物线与坐标轴的三个交点坐标是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分) [请将解题过程填入答题纸的相应位置]

19. 计算: $|\sin 45^\circ - 1| + 2\cos 30^\circ - (\tan 60^\circ)^0 - (\cot 60^\circ)^{-1}$.

【答案】 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

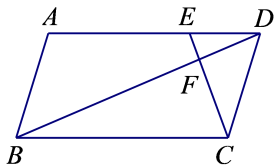
【解析】

【分析】 先进行绝对值的化简, 代入特殊角的三角函数值运算, 然后合并.

【详解】 解: 原式 $= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right| + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - (\sqrt{3})^0 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^{-1}$,
 $= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3}$,
 $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

【点睛】 本题考查了绝对值的性质, 特殊角的三角函数值, 解答本题的关键是掌握几个特殊角的三角函数值.

20. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上, CE 、 BD 相交于点 F , $BF=3DF$.



(1) 求 $AE:ED$ 的值;

(2) 如果 $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{EA} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{CF}$.

【答案】 (1) 2 (2) $\frac{3}{8}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}$

【解析】

【分析】 (1) 先根据平行四边形的性质得到 $AD \parallel BC$, $AD=BC$, 再利用平行线分线段成比例定理解答即可;

(2) 利用平面向量的三角形法则进行计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, AD=BC.$$

$$\therefore \frac{BC}{ED} = \frac{BF}{DF}.$$

$$\therefore BF=3DF,$$

$$\therefore \frac{BF}{DF} = 3.$$

$$\therefore \frac{BC}{ED} = 3.$$

$$\therefore \frac{AD}{ED} = 3, \text{ 即 } AE:ED=2.$$

【小问2 详解】

解: $\because AE:ED=2:1$,

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EA}.$$

$$\because \overrightarrow{EA} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \vec{b}.$$

$$\because \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC},$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a}.$$

$\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \frac{CF}{CE} = \frac{BF}{BD}.$$

$\because BF=3DF$,

$$\therefore \frac{BF}{BD} = \frac{3}{4}.$$

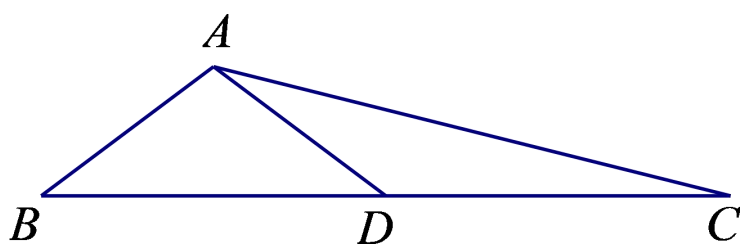
$$\therefore \frac{CF}{CE} = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore \overrightarrow{CF} = \frac{3}{4} \overrightarrow{CE}.$$

$$\therefore \overrightarrow{CF} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a} \right) = \frac{3}{8} \vec{b} - \frac{3}{4} \vec{a}.$$

【点睛】 本题考查平行四边形的性质、平行线分线段成比例定理、平面向量等知识点, 灵活应用相关知识成为解答本题的关键.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 BC 的中点, 联结 AD , $AB=AD$, $BD=4$, $\tan C = \frac{1}{4}$.



- (1) 求 AB 的长;
 (2) 求点 C 到直线 AB 的距离.

【答案】(1) $\frac{5}{2}$; (2) $\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AH \perp BD$, 垂足为点 H . 根据等腰三角形的性质求出 DH , 再根据 $\tan C = \frac{1}{4}$, 求出 AH , 利用勾股定理即可求出 AB ;

(2) 过点 C 作 $CG \perp BA$, 交 BA 的延长线于点 G , 根据 $\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{CG}{BC}$ 即可求出答案.

【详解】解: (1) $\because$ 过点 A 作 $AH \perp BD$, 垂足为点 H .

$$\therefore AB=AD,$$

$$\therefore BH=HD=\frac{1}{2}BD=2.$$

$\because$ 点 D 是 BC 的中点,

$$\therefore BD=CD.$$

$$\therefore BD=4,$$

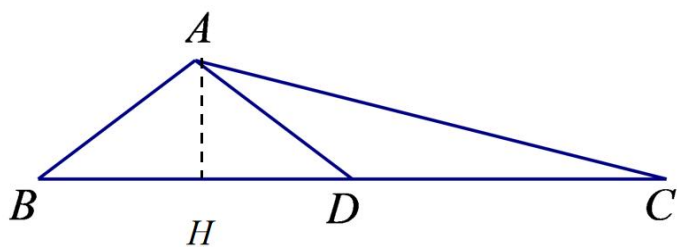
$$\therefore CD=4.$$

$$\therefore HC=HD+CD=6.$$

$$\because \tan C = \frac{1}{4}, \therefore \frac{AH}{HC} = \frac{1}{4}, \therefore AH = \frac{3}{2}.$$

$$\because AB = \sqrt{BH^2 + AH^2},$$

$$\therefore AB = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}.$$



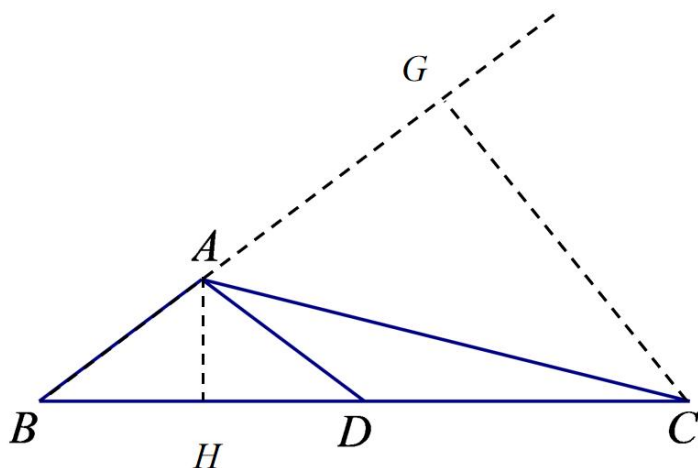
(2) 过点 C 作 $CG \perp BA$, 交 BA 的延长线于点 G .

$$\therefore \sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{CG}{BC},$$

$$\therefore \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{CG}{8}.$$

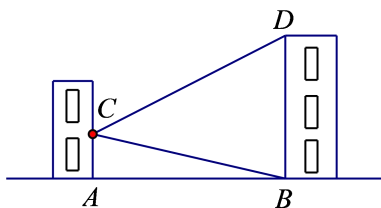
$$\therefore CG = \frac{24}{5}.$$

$\therefore$ 点 C 到直线 AB 的距离为 $\frac{24}{5}$



【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质,勾股定理以及锐角的三角比,熟练掌握锐角的三角比是解题的关键.

22. 如图, 某校的实验楼对面是一幢教学楼, 小张在实验楼的窗口 C ($AC \parallel BD$) 处测得教学楼顶部 D 的仰角为 27° , 教学楼底部 B 的俯角为 13° , 量得实验楼与教学楼之间的距离 $AB=20$ 米. 求教学楼 BD ($BD \perp AB$) 的高度. (精确到 0.1 米) (参考数据: $\sin 13^\circ \approx 0.22$, $\cos 13^\circ \approx 0.97$, $\tan 13^\circ \approx 0.23$, $\sin 27^\circ \approx 0.45$, $\cos 27^\circ \approx 0.89$, $\tan 27^\circ \approx 0.51$)

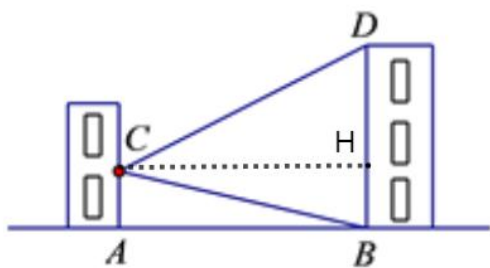


【答案】教学楼 BD 的高度约为 14.8 米.

【解析】

【分析】由题意过点 C 作 $CH \perp BD$ ，垂足为点 H ，进而依据 $\tan \angle DCH = \frac{DH}{CH}$ 和 $\tan \angle HCB = \frac{HB}{CH}$ 以及 $BD = HD + HB$ 进行分析计算即可得出答案.

【详解】解：过点 C 作 $CH \perp BD$ ，垂足为点 H ，



由题意，得 $\angle DCH = 27^\circ$ ， $\angle HCB = 13^\circ$ ， $AB = CH = 20$ （米），

在 $Rt\triangle DHC$ 中， $\therefore \tan \angle DCH = \frac{DH}{CH}$ ，

$$\therefore DH = \tan 27^\circ \times 20 \approx 10.2,$$

在 $Rt\triangle HCB$ 中， $\therefore \tan \angle HCB = \frac{HB}{CH}$ ，

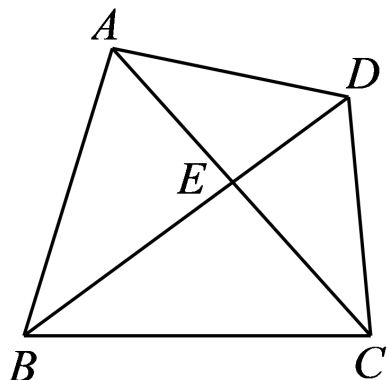
$$\therefore BH = \tan 13^\circ \times 20 \approx 4.6,$$

$$\therefore BD = HD + HB \approx 10.2 + 4.6 = 14.8 \text{（米）}.$$

答：教学楼 BD 的高度约为 14.8 米.

【点睛】本题考查解直角三角形的应用-仰角俯角问题，熟练掌握锐角三角函数的定义是解答本题的关键.

23. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， AC 、 BD 相交于点 E ， $\angle ABD = \angle CBD$ ， $DC^2 = DE \cdot DB$.



(1) 求证： $\triangle AEB \sim \triangle DEC$ ；

(2) 求证： $BC \cdot AD = CE \cdot BD$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\triangle DCB \sim \triangle DEC$, 推出 $\angle DCE = \angle DBC$, 再推出 $\angle DCE = \angle ABD$, 即可证明 $\triangle AEB \sim \triangle DEC$;

(2) 先证明 $\triangle AED \sim \triangle BEC$, 推出 $\angle ADE = \angle BCE$, 再证明 $\triangle BDA \sim \triangle BCE$, 即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because DC^2 = DE \cdot DB$,

$$\therefore \frac{DC}{DE} = \frac{DB}{DC},$$

又 $\because \angle CDE = \angle BDC$,

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle DBC,$$

$$\because \angle ABD = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle ABD,$$

又 $\because \angle AEB = \angle DEC$,

$$\therefore \triangle AEB \sim \triangle DEC;$$

【小问 2 详解】

$$\because \triangle AEB \sim \triangle DEC,$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{DE}{EC},$$

又 $\because \angle AED = \angle BEC$,

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BCE,$$

又 $\because \angle ABD = \angle DBC$,

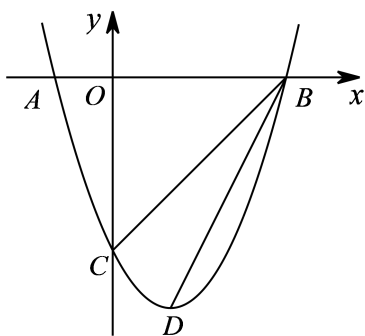
$$\therefore \triangle BDA \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{DA}{CE},$$

$$\therefore BC \cdot AD = CE \cdot BD.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 解决本题的关键是掌握相似三角形的判定与性质.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A $(-1, 0)$ 和点 B $(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 顶点为点 D .



- (1) 求该抛物线的表达式及点 C 的坐标;
- (2) 联结 BC 、 BD , 求 $\angle CBD$ 的正切值;
- (3) 若点 P 为 x 轴上一点, 当 $\triangle BDP$ 与 $\triangle ABC$ 相似时, 求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = x^2 - 2x - 3$, 点 C 的坐标为 $(0, -3)$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $(-3, 0)$ 或 $(-\frac{1}{3}, 0)$

【解析】

【分析】(1) 把 A 、 B 两点坐标代入函数求出 b 、 c 的值即可求函数表达式; 再令 $x=0$, 求出 y 从而求出 C 点坐标;

(2) 先求 B 、 C 、 D 三点坐标, 再求证 $\triangle BCD$ 为直角三角形, 再根据正切的定义即可求出;

(3) 分两种情况分别进行讨论即可.

【小问 1 详解】

解: (1) 将 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$, 得

$$\begin{cases} 1 - b + c = 0, \\ 9 + 3b + c = 0. \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} b = -2, \\ c = -3. \end{cases}$$

所以, $y = x^2 - 2x - 3$.

当 $x=0$ 时, $y = -3$. $\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, -3)$.

【小问 2 详解】

解: 连接 CD , 过点 D 作 $DE \perp y$ 轴于点 E ,

$$\because y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1, -4)$.

$\because B(3, 0)$ 、 $C(0, -3)$ 、 $D(1, -4)$ 、 $E(0, -4)$,

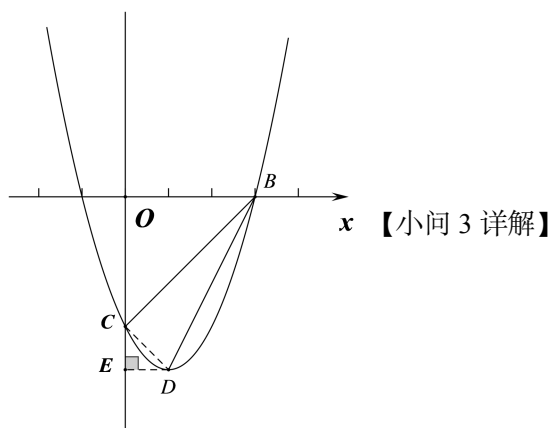
$\therefore OB = OC = 3$, $CE = DE = 1$,

$$\therefore BC=3\sqrt{2}, DC=\sqrt{2}, BD=2\sqrt{5}.$$

$$\therefore BC^2+DC^2=18+2=20=DB^2.$$

$$\therefore \angle BCD=90^\circ.$$

$$\therefore \tan \angle CBD = \frac{DC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$



$$\text{解: } \because \tan \angle ACO = \frac{AO}{OC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \angle ACO = \angle CBD.$$

$$\because OC=OB,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle ACO + \angle OCB = \angle CBD + \angle OBC.$$

$$\text{即: } \angle ACB = \angle DBO.$$

$\therefore$ 当 $\triangle BDP$ 与 $\triangle ABC$ 相似时, 点 P 在点 B 左侧.

$$(i) \text{ 当 } \frac{AC}{CB} = \frac{DB}{BP} \text{ 时,}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{BP}.$$

$$\therefore BP=6.$$

$$\therefore P(-3, 0).$$

$$(ii) \text{ 当 } \frac{AC}{CB} = \frac{BP}{DB} \text{ 时,}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{2}} = \frac{BP}{2\sqrt{5}}.$$

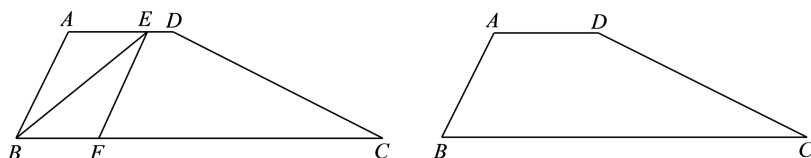
$$\therefore BP = \frac{10}{3}.$$

$$\therefore P(-\frac{1}{3}, 0).$$

综上，点 P 的坐标为 $(-3, 0)$ 或 $(-\frac{1}{3}, 0)$.

【点睛】本题是二次函数的综合题，掌握相关知识是解题的关键.

25. 在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = \sqrt{5}$ ， $AD = 2$ ， $DC = 2\sqrt{5}$ ， $\tan \angle ABC = 2$ (如图). 点 E 是射线 AD 上一点，点 F 是边 BC 上一点，联结 BE 、 EF ，且 $\angle BEF = \angle DCB$.



- (1) 求线段 BC 的长;
- (2) 当 $FB = FE$ 时，求线段 BF 的长;
- (3) 当点 E 在线段 AD 的延长线上时，设 $DE = x$ ， $BF = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出 x 的取值范围.

【答案】(1) 7 (2) $\frac{5}{2}$

$$(3) y = \frac{x^2 + 6x + 13}{7 + x} \left(0 < x \leq \frac{1 + \sqrt{145}}{2} \right)$$

【解析】

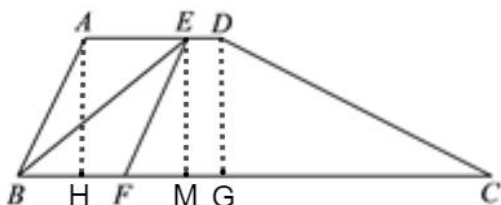
【分析】(1) 根据题意过点 A 、 D 分别作 $AH \perp BC$ 、 $DG \perp BC$ ，垂足分别为点 H 、点 G ，进而依据正切值和勾股定理进行分析计算即可；

(2) 由题意过点 E 作 $EM \perp BC$ ，垂足为点 M ，由 (1) 得， $\tan \angle C = \frac{DG}{GC} = \frac{1}{2}$ ，进而得出 $\frac{EM}{BM} = \frac{1}{2}$ ，最后利用勾股定理得出 $FM^2 + EM^2 = FE^2$ 进行计算即可；

(3) 根据题意过点 E 作 $EN \parallel DC$ ，交 BC 的延长线于点 N ，证明四边形 $DCNE$ 是平行四边形以及 $\triangle BEF \sim \triangle BNE$ ，进而过点 E 作 $EQ \perp BC$ ，垂足为点 Q 利用 $BE^2 = QE^2 + BQ^2$ 进行计算求解.

【小问 1 详解】

解：过点 A 、 D 分别作 $AH \perp BC$ 、 $DG \perp BC$ ，垂足分别为点 H 、点 G .



可得： $AD = HG = 2$ ， $AH = DG$,

$$\because \tan \angle ABC = 2, AB = \sqrt{5},$$

$$\therefore AH = 2, BH = 1,$$

$$\therefore DG = 2,$$

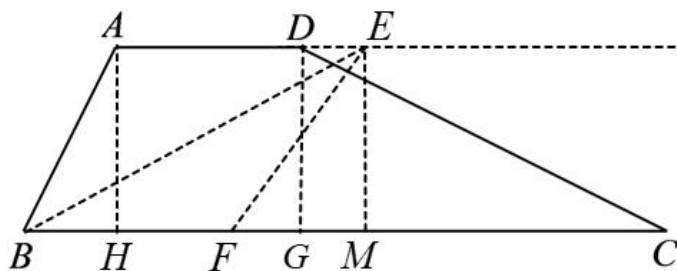
$$\because DC = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore CG = \sqrt{DC^2 - DG^2} = 4,$$

$$\therefore BC = BH + HG + GC = 1 + 2 + 4 = 7.$$

【小问 2 详解】

解：过点 E 作 $EM \perp BC$ ，垂足为点 M 。可得 $EM = 2$ ，



$$\text{由 (1) 得, } \tan \angle C = \frac{DG}{GC} = \frac{1}{2},$$

$$\because FB = FE,$$

$$\therefore \angle FEB = \angle FBE,$$

$$\because \angle FEB = \angle C,$$

$$\therefore \angle FBE = \angle C,$$

$$\therefore \tan \angle FBE = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{EM}{BM} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BM = 4,$$

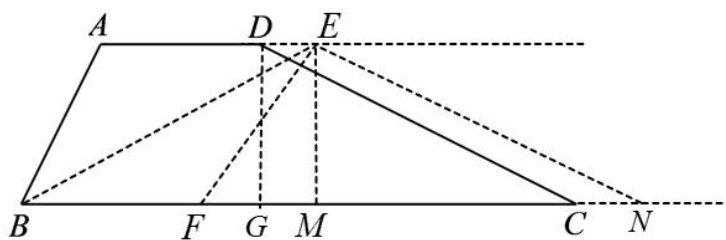
$$\because FM^2 + EM^2 = FE^2,$$

$$\therefore (4 - FB)^2 + 2^2 = FB^2,$$

$$\therefore BF = \frac{5}{2}.$$

【小问 3 详解】

解：过点 E 作 $EN \parallel DC$ ，交 BC 的延长线于点 N 。



$\because DE \parallel CN$,

$\therefore$ 四边形 $DCNE$ 是平行四边形,

$\therefore DE = CN$, $\angle DCB = \angle ENB$,

$\because \angle FEB = \angle DCB$,

$\therefore \angle FEB = \angle ENB$,

又 $\because \angle EBF = \angle NBE$,

$\therefore \triangle BEF \sim \triangle BNE$,

$$\therefore \frac{BF}{BE} = \frac{BE}{BN},$$

$$\therefore BE^2 = BF \cdot BN,$$

过点 E 作 $EM \perp BC$, 垂足为点 M . 可得 $EM = 2$, $BM = x + 3$.

$$\therefore BE^2 = ME^2 + BM^2 = (x + 3)^2 + 2^2 = x^2 + 6x + 13,$$

$$\therefore y(7 + x) = x^2 + 6x + 13,$$

$$\therefore y = \frac{x^2 + 6x + 13}{7 + x}$$

当 $y = 7$ 时, $x^2 - x - 36 = 0$,

$$\text{解得: } x = \frac{1 + \sqrt{145}}{2}, \quad (\text{负根舍去})$$

$$\therefore y = \frac{x^2 + 6x + 13}{7 + x} \left(0 < x \leq \frac{1 + \sqrt{145}}{2} \right).$$

【点睛】 本题主要考查四边形的综合问题, 熟练掌握平行四边形的判定与性质和勾股定理以及相似三角形的判定与性质利用数形结合思维分析是解题的关键.