

九年级数学练习

一、选择题:

1. 下列图形中一定是相似形的是 ()

- A. 两个等边三角形
B. 两个菱形
C. 两个矩形
D. 两个直角三角形

【答案】 A

【解析】

【分析】 如果两个多边形的对应角相等，对应边的比相等，则这两个多边形是相似多边形.

【详解】 解: $\because$ 等边三角形的对应角相等，对应边的比相等，

$\therefore$ 两个等边三角形一定是相似形，

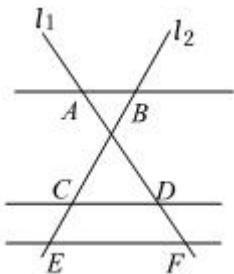
又 $\because$ 直角三角形，菱形的对应角不一定相等，矩形的边不一定对应成比例，

$\therefore$ 两个直角三角形、两个菱形、两个矩形都不一定是相似形，

故选: A.

【点睛】 本题主要考查了相似多边形的性质，相似多边形的性质为: ①对应角相等; ②对应边的比相等.

2. 如图，已知 $AB \parallel CD \parallel EF$ ，它们依次交直线 l_1 、 l_2 于点 A 、 D 、 F 和点 B 、 C 、 E ，如果 $AD: DF = 3: 1$ ， $BE = 10$ ，那么 CE 等于 ()



- A. $\frac{10}{3}$
B. $\frac{20}{3}$
C. $\frac{5}{2}$
D. $\frac{15}{2}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据平行线分线段成比例定理即可完成.

【详解】 $\because AB \parallel CD \parallel EF$

$$\therefore \frac{BC}{CE} = \frac{AD}{DF} = 3$$

$$\therefore BC = 3CE$$

$$\therefore BC + CE = 10$$

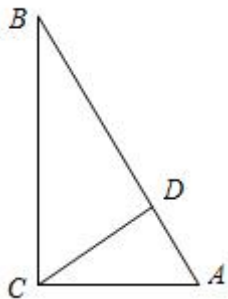
$$\therefore 3CE + CE = 10$$

$$\therefore CE = \frac{5}{2}$$

故选：C

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理，掌握此定理是关键.

3. 如图，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = \beta$, $CD \perp AB$ ，垂足为点 D ，那么下列线段的比值不一定等于 $\sin \beta$ 的是 ()



A. $\frac{AD}{BD}$

B. $\frac{AC}{AB}$

C. $\frac{AD}{AC}$

D. $\frac{CD}{BC}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据正弦定义解答即可.

【详解】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\sin \beta = \sin B = \frac{AC}{AB}$ ，故 B 正确，不符合题意；

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中， $\sin \beta = \sin B = \frac{CD}{BC}$ ，故 D 正确，不符合题意；

$$\because \angle ACD + \angle A = 90^\circ, \angle B + \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle B,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $\sin \beta = \sin \angle ACD = \frac{AD}{AC}$ ，故 C 正确，不符合题意；

无法说明 $\sin \beta = \frac{AD}{BD}$ ，故 A 不一定正确，符合题意.

故选：A.

【点睛】本题考查了锐角三角函数的概念，熟练掌握锐角三角函数的定义是解答本题的关键. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，若 $\angle C = 90^\circ$ ，则 $\angle A$ 的正弦等于 $\angle A$ 的对边比斜边， $\angle A$ 的余弦等于 $\angle A$ 的邻边比斜边， $\angle A$ 的正切等于 $\angle A$ 的对边比邻边.

4. 下列说法正确的是 ()

- A. 如果 $\vec{e}$ 为单位向量, 那么 $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}$ B. 如果 $\vec{a} = -\vec{b}$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- C. 如果 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 都是单位向量, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$ D. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$

【答案】B

【解析】

【分析】向量有方向, 大小, 加减运算, 根据相关的概念和运算方法即可求解.

【详解】解: A 选项, 如果 $\vec{e}$ 为单位向量, 且 $\vec{e}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相同, 那么 $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}$, 故不符合题意;

B 选项, 如果 $\vec{a} = -\vec{b}$, 大小相同, 方向相反, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 故符合题意;

C 选项, 如果 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 都是单位向量, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$, 方向不确定, 故不符合题意;

D 选项, 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$, 模相等, 方向不确定, 故不符合题意.

故选: B.

【点睛】本题主要考查向量的基本知识, 掌握向量的大小, 方向, 模的基础知识是解题的关键.

5. 抛物线 $y = 2x^2$ 向下平移 3 个单位长度后所得新抛物线的顶点坐标为 ()

- A. $(-3, 0)$ B. $(3, 0)$ C. $(0, -3)$ D. $(0, 3)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平移的性质, 求出新抛物线的解析式, 再求顶点坐标即可求解.

【详解】解: 抛物线 $y = 2x^2$ 向下平移 3 个单位得, $y = 2x^2 - 3$,

$\therefore$ 根据顶点坐标公式得, $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \times 2} = 0$, 把 $x = 0$ 代入 $y = 2x^2 - 3$ 得, $y = -3$,

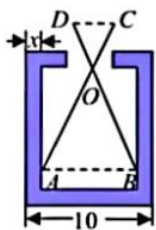
$\therefore$ 顶点坐标为: $(0, -3)$.

故选: C.

【点睛】本题主要考查函数的平移的性质, 顶点坐标的计算方法, 掌握平移的性质, 顶点坐标的计算公式是解题的关键.

6. 如图, 某零件的外径为 10cm, 用一个交叉卡钳 (两条尺长 AC 和 BD 相等) 可测量零件的内孔直径 AB . 如

果 $\frac{AC}{OC} = \frac{BD}{OD} = 3$, 且量得 $CD = 4\text{cm}$, 则零件的厚度 x 为 ()



- A. 2cm B. 1.5cm C. 0.5cm D. 1cm

【答案】 D

【解析】

【分析】 求出 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 相似，利用相似三角形对应边成比例列式计算求出 AB ，再根据外径的长度解答.

【详解】 解： $\because \frac{AC}{OC} = \frac{BD}{OD} = 3,$

$$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = 2,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle COD,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD,$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = 2,$$

$$\therefore CD = 4\text{cm},$$

$$\therefore AB = 8\text{ cm},$$

$$\therefore \text{外径为} 10\text{cm},$$

$$\therefore 8 + 2x = 10,$$

$$\therefore x = 1.$$

故选： D.

【点睛】 本题考查相似三角形的应用，解题的关键是利用相似三角形的性质求出 AB 的长.

二、填空题:

7 如果 $a = 3b(b \neq 0)$ ，那么 $\frac{a+b}{b} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 4

【解析】

【分析】 将 $a = 3b(b \neq 0)$ 代入 $\frac{a+b}{b}$ ，约分化简即可求解.

【详解】解： $\because a = 3b(b \neq 0)$,

$$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{3b+b}{b} = \frac{4b}{b} = 4,$$

故答案为：4.

【点睛】本题主要考查代入求值，掌握整体代入的方法，化简求值的方法是解题的关键.

8. 化简： $\frac{2}{3}(-3\vec{a} + \vec{b}) - \frac{2}{3}\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-2\vec{a}$

【解析】

【分析】根据有理数的混合运算，结合向量的加减运算即可求解.

【详解】解： $\frac{2}{3}(-3\vec{a} + \vec{b}) - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{2}{3} \times (-3\vec{a}) + \frac{2}{3} \times \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{b} = -2\vec{a},$

故答案为： $-2\vec{a}$.

【点睛】本题主要考查向量的加减运算，理解和掌握向量的加减运算方法，有理数的混合运算是解题的关键.

9. 已知 $f(x) = x^2 + 2x$ ，那么 $f(1)$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 3

【解析】

【分析】把 $x = 1$ 代入 $f(x) = x^2 + 2x$ 计算即可求解.

【详解】解： $f(1) = 1^2 + 2 \times 1 = 3,$

故答案为：3.

【点睛】本题主要考查的函数的代入求值，掌握函数的代入求值的计算方法是解题的关键.

10. 抛物线 $y = 2x^2$ 在对称轴的左侧部分是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的（填“上升”或“下降”）.

【答案】 下降

【解析】

【分析】根据二次函数的性质解答.

【详解】解： $\because a = 2 > 0,$

$\therefore$ 抛物线的开口向上，对称轴为直线 $x = 0$,

$\therefore$ 在对称轴左侧部分 y 随着 x 的增大而减小.

故答案为：下降.

【点睛】 本题主要考查抛物线的性质，熟记抛物线的性质是解题的关键.

11. 已知两个相似三角形的相似比为 2:3，那么这两个三角形的面积之比为_____.

【答案】 $4:9$

【解析】

【分析】 根据面积比等于相似比的平方，由此即可求解.

【详解】 解：根据面积比等于相似比的平方，得：这两个三角形的面积之比为 4:9，

故答案为：4:9.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质，掌握相似三角形中面积比等于相似比的平方是解题的关键.

12. 设点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$), $AB = 2$ ，那么线段 AP 的长是_____.

【答案】 $\sqrt{5}-1$

【解析】

【分析】 黄金分割点的值是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，根据黄金分割点的定义即可求解.

【详解】 解：∵点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$), $AB = 2$,

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore AP = \sqrt{5}-1,$$

故答案为： $\sqrt{5}-1$.

【点睛】 本题主要考查黄金分割点的定义，掌握黄金分割点的定义，比值是解题的关键.

13. 在直角坐标平面内有一点 $A(5,12)$ ，点 A 与原点 O 的连线与 x 轴的正半轴的夹角为 θ ，那么 $\sin \theta$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{12}{13}$

【解析】

【分析】 根据锐角三角函数的定义、坐标与图形性质以及勾股定理的知识求解即可.

【详解】 解：∵在直角坐标平面内有一点 $A(5,12)$,

$$\therefore OA = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13,$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{12}{13}.$$

故答案为: $\frac{12}{13}$.

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形、锐角三角函数的定义、坐标与图形性质以及勾股定理等知识点, 掌握锐角三角函数的定义成为解答本题的关键.

14. 已知 D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的点 (不与端点重合), 要使得 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 那么添加一个条件可以为 _____ (只填一个).

【答案】 $\angle ADE = \angle B$ 或 $\angle ADE = \angle C$ 或 $DE \parallel BC$

【解析】

【分析】 判断 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 根据相似的判断条件即可求解.

【详解】 解: 判断两个三角形相似的条件有: 有两个角对应相等, 则两个三角形相似; 两边对应成比例, 夹角相等, 则两个三角形相似; 过三角形两边的点的线段平行与第三边, 则两个三角形相似,

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE,$$

$\therefore$ 当 $\angle ADE = \angle B$ 时, $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似; 当 $\angle ADE = \angle C$ 时, $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似; 当 $DE \parallel BC$ 时, $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似.

故答案为: $\angle ADE = \angle B$ 或 $\angle ADE = \angle C$ 或 $DE \parallel BC$.

【点睛】 本题主要考查三角形相似的判定, 理解和掌握三角形相似的判定的条件是解题的关键.

15. 已知一斜坡的坡角为 30° , 则它坡度 $i =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 由于斜坡的坡角为 30° , 而坡度为坡角的正切, 由此即可确定个斜坡的坡度 i .

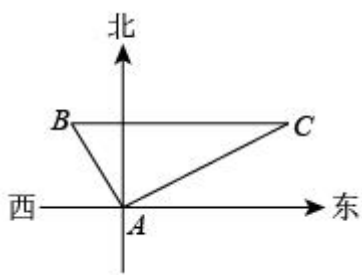
【详解】 解: $\because$ 斜坡的坡角为 30° ,

$$\therefore \text{这个斜坡的坡度 } i = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】 此题主要考查了解直角三角形应用-坡度的问题, 解题的关键是根据题意正确画出图形, 然后利用三角函数即可解决问题.

16. 如图, 一艘船从 A 处向北偏西 30° 的方向行驶 5 海里到 B 处, 再从 B 处向正东方向行驶 8 千米到 C 处, 此时这艘船与出发点 A 处相距 _____ 海里.

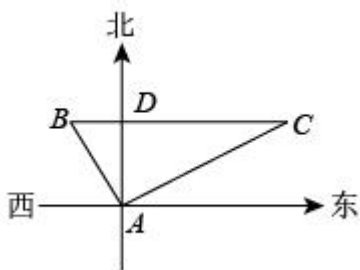


【答案】 7

【解析】

【分析】从A处向北偏西 30° 的方向行驶5海里到B处，可知 $\angle BAD = 30^\circ$ ， $AB = 5$ ，从B处向正东方向行驶8千米，可知 $BC = 8$ ，且 $\angle B = 60^\circ$ ，如图所示（见详解），根据直角三角形的勾股定理即可求解.

【详解】解：如图所示，



$$\therefore \angle BAD = 30^\circ, AB = 5,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}, AD = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\because BC = 8, \angle ADC = 90^\circ,$$

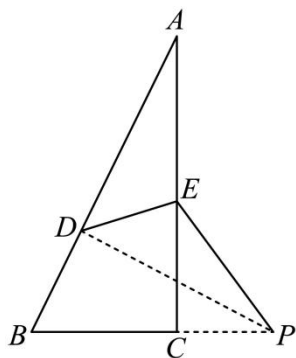
$$\therefore DC = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2} = 7,$$

故答案为：7.

【点睛】本题主要考查方位角与直角三角形的勾股定理的综合，掌握方位角的表示，角度的关系，勾股定理是解题的关键.

17. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 9$ ， $\cot A = 2$ ，点D在边AB上，点E在边AC上，将 $\triangle ABC$ 沿着折痕DE翻折后，点A恰好落在线段BC的延长线上的点P处，如果 $\angle BPD = \angle A$ ，那么折痕DE的长为_____.



【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F ，首先根据题意可证得 $DF \parallel BC$ ， $\angle BDP = 90^\circ$ ，

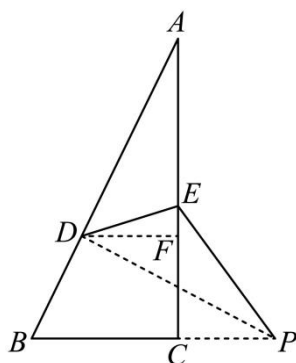
$\tan A = \tan \angle BPD = \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{PD} = \frac{1}{2}$ ，根据勾股定理即可求得 $BC = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ ， $AC = \frac{18\sqrt{5}}{5}$ ，再由折叠的性

质可知： $AE = PE$ ， $AD = PD$ ，即可求得 $BD = 3$ ， $AD = PD = 6$ ，再根据勾股定理即可求得 $BP = 3\sqrt{5}$ ，

$CP = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ ，由 $DF \parallel BC$ ，可证得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ， $\frac{DF}{BC} = \frac{AF}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ ，据此即可求得 $DF = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ ，

$AF = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ ， $FC = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ ，再根据勾股定理即可求得 $EC = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ ， $EF = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，据此根据勾股定理即可求得结果。

【详解】 解：如图：过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F ，



$\angle AFD = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore DF \parallel BC$ ， $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ，

$\because \angle BPD = \angle A$ ，

$\therefore \angle BPD + \angle B = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BDP = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\cot A = 2$ ，

$$\therefore \tan A = \frac{1}{\cot A} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan A = \tan \angle BPD = \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{PD} = \frac{1}{2}$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore 4BC^2 + BC^2 = 9^2,$$

$$\text{解得 } BC = \frac{9\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AC = \frac{18\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{由折叠的性质可知: } AE = PE, \quad AD = PD,$$

$$\therefore \tan \angle BPD = \frac{9 - PD}{PD} = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } PD = 6,$$

$$\therefore BD = 3, \quad AD = PD = 6$$

$$\text{在 Rt}\triangle BPD \text{ 中, } BD^2 + PD^2 = BP^2,$$

$$\therefore BP = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore CP = BP - BC = 3\sqrt{5} - \frac{9\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

$$\because DF \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{AF}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{DF}{\frac{9\sqrt{5}}{5}} = \frac{AF}{\frac{18\sqrt{5}}{5}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{解得 } DF = \frac{6\sqrt{5}}{5}, \quad AF = \frac{12\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore FC = AC - AF = \frac{18\sqrt{5}}{5} - \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ECP \text{ 中, } EC^2 + CP^2 = PE^2,$$

$$\therefore EC^2 + \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \left(\frac{18\sqrt{5}}{5} - EC\right)^2,$$

$$\text{解得 } EC = \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore EF = EC - FC = \frac{8\sqrt{5}}{5} - \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中, $DE^2 = DF^2 + EF^2$,

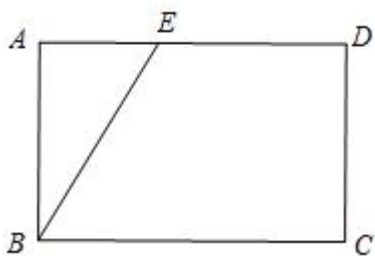
$$\therefore DE = \sqrt{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = 2\sqrt{2},$$

故答案为: $2\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了折叠的性质, 勾股定理, 相似三角形的判定与性质, 正切的定义, 作出辅助线及准确找到各线段之间的关系是解决本题的关键.

18. 阅读: 对于线段 MN 与点 O (点 O 与 MN 不在同一直线上), 如果同一平面内点 P 满足: 射线 OP 与线段 MN 交于点 Q , 且 $\frac{OQ}{OP} = \frac{1}{2}$, 那么称点 P 为点 O 关于线段 MN 的“准射点”.

问题: 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 5$, 点 E 在边 AD 上, 且 $AE = 2$, 联结 BE . 设点 F 是点 A 关于线段 BE 的“准射点”, 且点 F 在矩形 $ABCD$ 的内部或边上, 如果点 C 与点 F 之间距离为 d , 那么 d 的取值范围为_____.



【答案】 $\frac{6}{5}\sqrt{5} \leq d \leq \sqrt{17}$

【解析】

【分析】设 AF 交 BE 于点 Q , 由点 F 是点 A 关于线段 BE 的“准射点”可得 $AQ = QF$, 过点 F 作 $GH \parallel BE$ 交 AD 于点 G , 交 BC 于点 H , 由平行线分线段成比例定理得 $AE = EG = 2$, $AQ' = Q'F'$, 连接 CG , 求出 CG 的长, 作 $CM \perp GH$ 于 M , 求出 CM 的长即可.

【详解】如图, 设 AF 交 BE 于点 Q ,

19. 计算: $\sqrt{12} + (\sqrt{3} - 1)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + \cos 30^\circ$.

【答案】 $3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据算术平方根的性质，负整数指数幂的性质，立方根的性质，特殊角的三角函数值分别化简后再计算加减法.

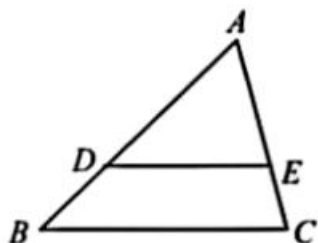
【详解】 $\sqrt{12} + (\sqrt{3} - 1)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + \cos 30^\circ$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$= 3\sqrt{3}.$$

【点睛】 此题考查计算能力，掌握算术平方根的性质，负整数指数幂的性质，立方根的性质，特殊角的三角函数值是解题的关键.

20. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 和 AC 上， $DE \parallel BC$ ，且 DE 经过 $\triangle ABC$ 的重心，设 $AB = a, AC = b$.



(1) $\overrightarrow{DE} =$ _____ (用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示);

(2) 求作: $a + \frac{1}{3}b$. (不要求写作法，但要指出所作图中表示结论的向量)

【答案】 (1) $\frac{2}{3}b - \frac{2}{3}a$

(2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 由 $DE \parallel BC$ ， DE 经过 $\triangle ABC$ 的重心，可得 $AD : AB = DE : BC = 2 : 3$ ，即可求得 $\overrightarrow{DE}$;

(2) 过点 B 作 $BD \parallel AC$ ，在 BD 上截取 $BE = \frac{1}{3}AC$ ，连接 AE ， $\overrightarrow{AE}$ 即为所求.

【小问 1 详解】

解: $\because DE \parallel BC$ ， DE 经过 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore AD:AB = DE:BC = 2:3,$$

$$\because AB = a, AC = b,$$

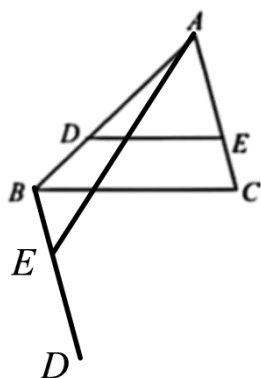
$$\therefore AD = \frac{2}{3}a, AC = \frac{2}{3}b,$$

$$\therefore DE = \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}a,$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}a.$$

【小问 2 详解】

如图：过点 B 作 $BD \parallel AC$ ，在 BD 上截取 $BE = \frac{1}{3}AC$ ，连接 AE ， $\overrightarrow{AE}$ 即为所求。



【点睛】本题主要考查了平面向量，解题的关键是熟练掌握平面向量的运算法则。

21. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 与 y 轴交于点 A ，其顶点坐标为 B 。

(1) 求直线 AB 的表达式；

(2) 将抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 沿 x 轴正方向平移 $m(m > 0)$ 个单位后得到的新抛物线的顶点 C 恰好落在反比例函数 $y = \frac{16}{x}$ 的图像上，求 $\angle ACB$ 的余切值。

【答案】(1) $y = x + 3$

(2) 4

【解析】

【分析】(1) 根据题意可知 $A(0, 3)$ ， $B(1, 4)$ ，用待定系数法即可求解；

(2) 由 $B(1, 4)$ 沿 x 轴正方向平移 m 个单位，得 $C(m+1, 4)$ ，顶点 C 恰好落在反比例函数的图像 $y = \frac{16}{x}$ 上，可求出 $m = 3$ ，延长 CB 交 y 轴的正半轴于点 D ，在 $Rt\triangle ADC$ 中，即可求解。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 与 y 轴交于点 A ，

$$\therefore A(0,3),$$

$$\text{由 } y = -x^2 + 2x + 3, \text{ 得 } y = -(x-1)^2 + 4,$$

$$\therefore B(1,4),$$

$$\text{设直线 } AB \text{ 的表达式为 } y = kx + b (k \neq 0),$$

$$\therefore \begin{cases} b = 3 \\ k + b = 4 \end{cases},$$

$$\therefore k = 1, b = 3,$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的表达式为 } y = x + 3.$$

【小问 2 详解】

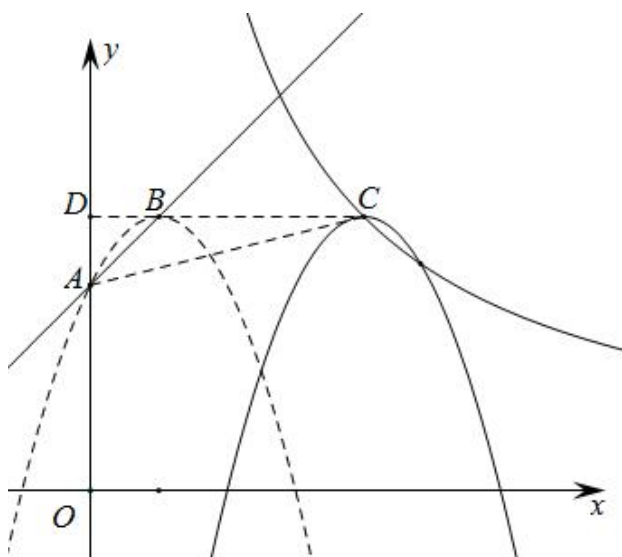
$$\text{解: 由 } B(1,4) \text{ 沿 } x \text{ 轴正方向平移 } m \text{ 个单位, 得 } C(m+1,4),$$

$$\text{又 } \because \text{顶点 } C \text{ 恰好落在反比例函数的图像 } y = \frac{16}{x} \text{ 上,}$$

$$\therefore 4(m+1) = 16.$$

$$\therefore m = 3, \text{ 即 } C(4,4),$$

如图所示, 延长 CB 交 y 轴的正半轴于点 D ,



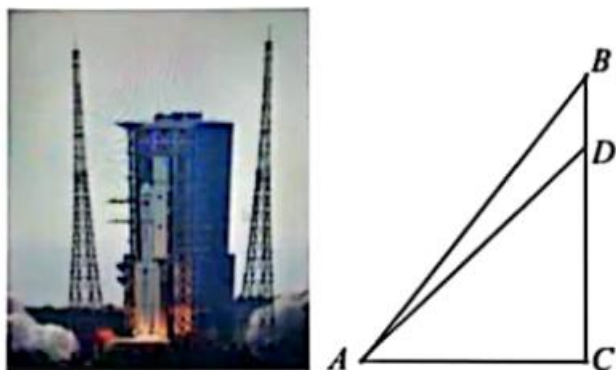
$$\text{得 } CD = 4, AD = 1,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADC \text{ 中, } \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \cot \angle ACB = \frac{CD}{AD} = 4.$$

【点睛】本题主要考查二次函数与一次函数，反比例函数的综合，掌握待定系数法求函数解析式，函数图像交点坐标的计算及余切值的计算方法是解题的关键。

22. 2022 年 11 月 12 日 10 时 03 分，搭载天舟五号货运飞船的长征七号遥六运载火箭，在海南文昌航天发射场成功发射。天舟五号货运飞船重约 13.6 吨，长度 $BD = 10.6$ 米，货物仓的直径可达 3.35 米，是世界现役货物运输能力最大、在轨支持能力最全面的货运飞船，堪称“在职最强快递小哥”。已知飞船发射塔垂直于地面，某人在地面 A 处测得飞船底部 D 处的仰角 45° ，顶部 B 处的仰角为 53° ，求此时观测点 A 到发射塔 CD 的水平距离（结果精确到 0.1 米）。（参考数据： $\sin 53^\circ \approx 0.80, \cos 53^\circ \approx 0.60, \tan 53^\circ \approx 1.33$ ）



【答案】此时观测点 A 到发射塔 CD 的水平距离为 32.1 米

【解析】

【分析】设此时观测点 A 到发射塔 CD 的水平距离为 x 米，在 $Rt\triangle ACD$ 中根据 $\tan \angle DAC = \frac{CD}{AC}$ 得到 $CD = x$ ，之后在 $Rt\triangle ACB$ 中根据 $\tan \angle BAC = \frac{BC}{AC}$ 得到 $BC = 1.33x$ ，根据 $BC - CD = 10.6$ 进而得到答案。

【详解】解：设此时观测点 A 到发射塔 CD 的水平距离为 x 米。

由题意，得 $BD = 10.6, \angle DAC = 45^\circ, \angle BAC = 53^\circ, \angle C = 90^\circ, AC = x$ 。

在 $Rt\triangle ACD$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle DAC = \frac{CD}{AC}$$

$$\therefore CD = AC \times \tan \angle DAC = x \tan 45^\circ = x$$

在 $Rt\triangle ACB$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC}$$

$$\therefore BC = AC \times \tan \angle BAC = x \tan 53^\circ = 1.33x$$

$$\therefore BD = 10.6$$

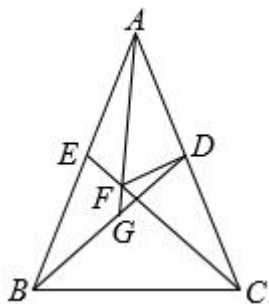
$$\therefore BC - CD = 10.6, \text{ 即 } 1.33x - x = 10.6;$$

$$x \approx 32.1 \text{ (米)}.$$

答：此时观测点 A 到发射塔 CD 的水平距离为 32.1 米.

【点睛】本题主要考查解直角三角形，掌握解直角三角形的方法是解题的关键.

23. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D、E 分别是边 AC、AB 的中点， $DF \perp AC$ ，DF 与 CE 相交于点 F，AF 的延长线与 BD 相交于点 G.



(1) 求证： $\angle ABD = \angle ACE$ ；

(2) 求证： $CD^2 = DG \cdot BD$.

【答案】(1) 详见解析

(2) 详见解析

【解析】

【分析】(1) 点 D、E 分别是边 AC、AB 的中点， $AB = AC$ ，可知 $AD = AE$ ，可证 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ ，由此即可求解；

(2) 根据题意可证 $\triangle BAD \sim \triangle AGD$ ，则 $AD^2 = DG \cdot BD$ ， $AD = CD$ ，由此即可求解.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 点 D、E 分别是边 AC、AB 的中点，

$$\therefore AD = \frac{1}{2} AC, AE = \frac{1}{2} AB,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AD = AE,$$

$$\because AD = AE, \angle DAB = \angle EAC, AB = AC;$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE.$$

【小问 2 详解】

证明： $\because$ 点 D 是边 AC 的中点， $DF \perp AC$ ，

$$\therefore FA = FC, AD = CD,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle FAD,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle GDA,$$

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle AGD,$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{GD},$$

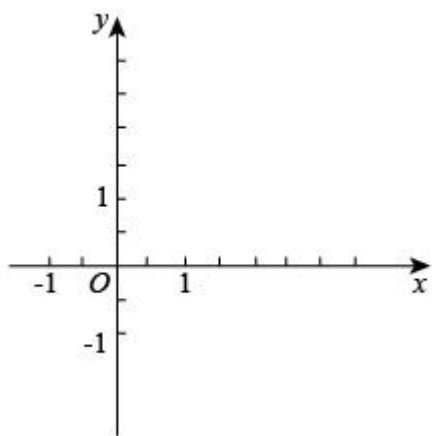
$$\therefore AD^2 = DG \cdot BD.$$

$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore CD^2 = DG \cdot BD.$$

【点睛】本题主要考查三角形全等的判定和性质，三角形相似的性质，掌握三角形全等的判定和性质，三角形相似的判定和性质是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx$ 经过 $A(-1, 3)$ 、 $B(2, 0)$ ，点 C 是该抛物线上的一个动点，连接 AC ，与 y 轴的正半轴交于点 D 。设点 C 的横坐标为 m 。



(1) 求该抛物线的表达式；

(2) 当 $\frac{DC}{AD} = \frac{3}{2}$ 时，求点 C 到 x 轴的距离；

(3) 如果过点 C 作 x 轴的垂线，垂足为点 E ，连接 DE ，当 $2 < m < 3$ 时，在 $\triangle CDE$ 中是否存在大小保持不变的角？如果存在，请指出并求其度数；如果不存在，请说明理由。

【答案】(1) $y = x^2 - 2x$

(2) $\frac{3}{4}$

(3) 存在; 45°

【解析】

【分析】(1) 用待定系数法求函数解析式即可;

(2) 过点 C 作 y 轴的垂线, 垂足为点 N , 过点 A 作 y 的垂线, 垂足为点 M , 设点 $C(m^2, m^2 - 2m)$, 证明 $\triangle AMD \sim \triangle CND$, 求出 $m_1 = -\frac{3}{2}$, $m_2 = \frac{3}{2}$, 然后分两种情况进行讨论, 求出结果即可;

(3) 过点 C 作 y 轴的垂线, 垂足为点 P , 过点 A 作 CP 的垂线, 垂足为点 Q , 设点 C 的坐标为 $(m, m^2 - 2m)$, 求出 $DP = -m^2 + 3m$, 得出 $EO = DO$, 在 $\text{Rt}\triangle DOE$ 中, 根据 $\angle DOE = 90^\circ$, $\tan \angle EDO = \frac{EO}{DO} = 1$, 得出 $\angle EDO = 45^\circ$, 即可得出答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx$ 经过 $A(-1, 3)$ 和 $B(2, 0)$,

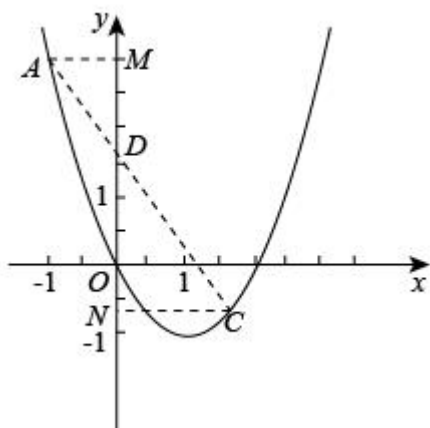
$$\therefore \begin{cases} a - b = 3 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases},$$

$$\therefore a = 1, b = -2,$$

$$\therefore \text{该抛物线的表达式为 } y = x^2 - 2x.$$

【小问 2 详解】

解: 过点 C 作 y 轴的垂线, 垂足为点 N , 过点 A 作 y 的垂线, 垂足为点 M , 如图所示:



设点 $C(m^2, m^2 - 2m)$,

$$\therefore A(-1, 3),$$

$$\therefore AM = 1, CN = |m|,$$

$$\therefore AM \perp y \text{ 轴}, CN \perp y \text{ 轴},$$

即 $\angle AMD = \angle CND = 90^\circ$,

$\therefore \angle MDA = \angle CDN$,

$\therefore \triangle AMD \sim \triangle CND$,

$$\therefore \frac{CN}{AM} = \frac{DC}{AD},$$

$$\text{即 } \frac{|m|}{1} = \frac{3}{2},$$

$$\text{解得: } m_1 = -\frac{3}{2}, \quad m_2 = \frac{3}{2},$$

$$\text{①当 } m = -\frac{3}{2} \text{ 时, 点 } C\left(-\frac{3}{2}, \frac{21}{4}\right),$$

设直线 AC 的解析式为 $y = k_1x + b_1$ ($k_1 \neq 0$),

$$\text{将 } A(-1, 3), \quad C\left(-\frac{3}{2}, \frac{21}{4}\right) \text{ 代入得: } \begin{cases} 3 = -k_1 + b_1 \\ \frac{21}{4} = -\frac{3}{2}k_1 + b_1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = -\frac{9}{2} \\ b_1 = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的解析式为 } y = -\frac{9}{2}x - \frac{3}{2},$$

$$\text{令 } x = 0 \text{ 代入得: } y = -\frac{3}{2},$$

$$\text{则 } D\left(0, -\frac{3}{2}\right),$$

此时点 D 在 y 轴的负半轴, 不符合题意, 舍去;

$$\text{②当 } m = \frac{3}{2} \text{ 时, 点 } C\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right),$$

设直线 AC 的解析式为 $y = k_2x + b_2$ ($k_2 \neq 0$),

$$\text{将 } A(-1, 3), \quad C\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right) \text{ 代入得: } \begin{cases} 3 = -k_2 + b_2 \\ -\frac{3}{4} = \frac{3}{2}k_2 + b_2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_2 = -\frac{3}{2} \\ b_2 = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的解析式为 } y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2},$$

$$\text{令 } x=0 \text{ 代入得: } y = \frac{3}{2},$$

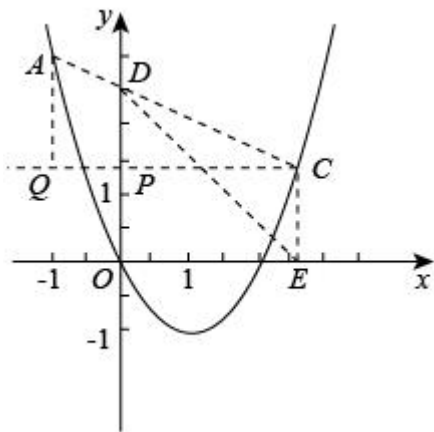
$$\text{则 } D\left(0, \frac{3}{2}\right), \text{ 符合题意,}$$

$$\text{则点 } C \text{ 到 } x \text{ 轴的距离为 } \frac{3}{4}.$$

【小问 3 详解】

解: 存在, $\angle DEC = 45^\circ$.

过点 C 作 y 轴的垂线, 垂足为点 P , 过点 A 作 CP 的垂线, 垂足为点 Q , 如图所示:



由题意得 $PQ=1$, 点 C 的坐标为 $(m, m^2 - 2m)$,

$$\because AQ \parallel y \text{ 轴, 得 } \frac{CP}{CQ} = \frac{DP}{AQ},$$

$$\therefore \frac{m}{m+1} = \frac{DP}{3 - (m^2 - 2m)},$$

$$\therefore DP = -m^2 + 3m,$$

$$\therefore DO = DP + PO, \quad PO = m^2 - 2m,$$

$$\therefore DO = m,$$

$$\therefore EO = m,$$

$$\therefore EO = DO,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DOE \text{ 中, } \angle DOE = 90^\circ, \tan \angle EDO = \frac{EO}{DO} = 1,$$

$$\therefore \angle EDO = 45^\circ$$

$$\because CE \parallel y \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle DEC = \angle EDO = 45^\circ.$$

【点睛】本题主要考查了二次函数的综合应用，求一次函数解析式，三角形相似的判定和性质，平行线的性质，特殊角的三角函数值，等腰三角形的判定和性质，解题的关键是作出辅助线，数形结合，注意分类讨论.

25. 如图 1, 点 D 为 $\triangle ABC$ 内一点, 联结 BD , $\angle CBD = \angle BAC$, 以 BD 、 BC 为邻边作平行四边形 $DBCE$, DE 与边 AC 交于点 F , $\angle ADE = 90^\circ$.

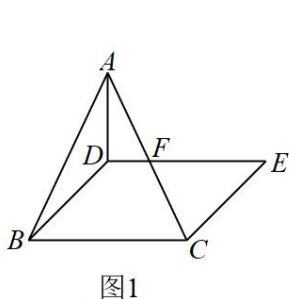


图1

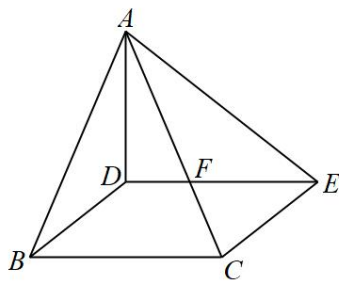


图2

(1) 求证: $\triangle ABC \sim \triangle ECF$;

(2) 延长 BD , 交边 AC 于点 G , 如果 $CE = FE$, 且 $\triangle ABC$ 的面积与平行四边形 $DBCE$ 面积相等, 求 $\frac{AG}{GF}$ 的值;

(3) 如图 2, 联结 AE , 若 DE 平分 $\angle AEC$, $AB = 5$, $CE = 2$, 求线段 AE 的长.

【答案】(1) 详见解析

(2) 2

(3) $AE = 5\sqrt{2} - 2$

【解析】

【分析】(1) 平行四边形 $DBCE$ 中, $BC \parallel DE$, $\angle CBD = \angle E$, 可求出 $\angle BAC = \angle E$, $BC \parallel DE$, 由此即可求证;

(2) 延长 AD 交 BC 于点 H , 过点 A 作 $AQ \parallel BC$, 交射线 BG 于点 Q , $\triangle ABC \sim \triangle CEF$, 由 $\triangle ABC$ 的面积与平行四边形的面积相等, 可知 $AH = 2DH$, 由 $AQ \parallel BC$, 得 $\frac{AQ}{BH} = \frac{AD}{DH}$, 由 $DE \parallel BC$, 得

$\frac{DF}{CH} = \frac{AD}{AH}$, 设 $BH = 2x$, 则 $HC = 2x$, 进一步得 $AQ = 2x, DF = x$, 由此即可求解;

(3) 延长 BD , 交 AC 于点 M , 交边 AE 于点 P , 由 $\triangle ABC \sim \triangle CEF$, 可得 $\frac{AB}{CE} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{CF} = \frac{5}{2}$, 设 $BC = 5m, AC = 5n$, 得 $CF = 2m, EF = 2n$, 根据 $BD \parallel CE$, 得 $\frac{DM}{CE} = \frac{FM}{CF} = \frac{DF}{EF}, \frac{AM}{AC} = \frac{PM}{CE} = \frac{AP}{AE} = \frac{1}{2}$, 得 $CE = 2, PM = 1, FM = \frac{5}{2}n - 2m, DF = 5m - 2n$, 由此即可求解.

【小问 1 详解】

解: 在平行四边形 $DBCE$ 中, $BC \parallel DE$, $\angle CBD = \angle E$,

又 $\because \angle CBD = \angle BAC$,

$\therefore \angle BAC = \angle E$,

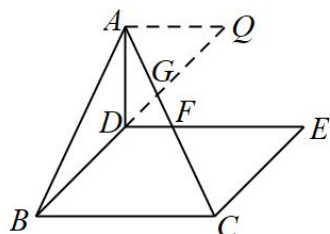
$\because BC \parallel DE$,

$\therefore \angle BCA = \angle EFC$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ECF$.

【小问 2 详解】

解: 如图所示, 延长 BD 交 AC 于点 G , 过点 A 作 $AQ \parallel BC$, 交射线 BG 于点 Q ,



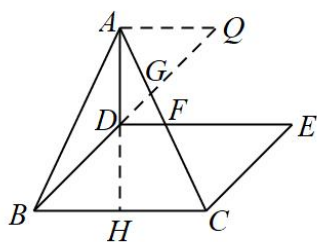
$\because \triangle ABC \sim \triangle ECF$,

$\therefore \frac{AB}{EC} = \frac{AC}{EF}$,

又 $\because CE = FE$,

$\therefore AB = AC$,

如图所示, 延长 AD 交 BC 于 H ,



由 $BC \parallel DE$ ，得 $\angle ADE = \angle AHC = 90^\circ$ ，即 $AH \perp BC$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积与平行四边形的面积相等，

$$\therefore \frac{1}{2} BC \cdot AH = BC \cdot DH, \text{ 即 } AH = 2DH,$$

$$\therefore AD = DH,$$

$$\therefore AB = AC, AH \perp BC,$$

$$\therefore BH = CH,$$

$$\therefore AQ \parallel BC, \text{ 得 } \frac{AQ}{BH} = \frac{AD}{DH},$$

$$\therefore DE \parallel BC, \text{ 得 } \frac{DF}{CH} = \frac{AD}{AH},$$

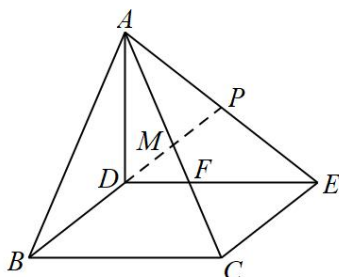
设 $BH = 2x$ ，则 $HC = 2x$ ，则 $AQ = 2x, DF = x$ ，

$$AQ \parallel BC, DE \parallel BC, \text{ 得 } DE \parallel AQ,$$

$$\therefore \frac{AG}{GF} = \frac{AQ}{DF} = 2.$$

【小问 3 详解】

解：如图所示，延长 BD ，交 AC 于点 M ，交边 AE 于点 P ，



由 $\triangle ABC \sim \triangle ECF$ ，

$$\therefore \frac{AB}{EC} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{CF} = \frac{5}{2},$$

设 $BC = 5m, AC = 5n$, 得 $CF = 2m, EF = 2n$,

由 $BD \parallel CE$, 得 $\angle PDE = \angle DEC$,

又 $\angle AED = \angle DEC$,

$\therefore \angle PDE = \angle AED$,

$\therefore PD = PE$,

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $\angle ADP + \angle PDE = 90^\circ, \angle DAE + \angle AED = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAE = \angle ADP$,

$\therefore PD = PA$,

$\therefore PE = PA, AE = 2DP$.

由 $BD \parallel CE$, 得 $\frac{DM}{CE} = \frac{FM}{CF} = \frac{DF}{EF}, \frac{AM}{AC} = \frac{PM}{CE} = \frac{AP}{AE} = \frac{1}{2}$,

由 $CE = 2, PM = 1$,

由 $FM = \frac{5}{2}n - 2m, DF = 5m - 2n$,

$\therefore \frac{\frac{5}{2}n - 2m}{2m} = \frac{5m - 2n}{2n} = \frac{DM}{2}$,

$\therefore n = \sqrt{2}m$,

$\therefore DM = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 2$,

由 $DP = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 2 + 1$, 得 $AE = 5\sqrt{2} - 2$.

【点睛】 本题主要考查三角形相似的判定和性质, 掌握三角形相似的判断和性质, 根据题意列出方程是关键.

