

2022 年上海市闵行区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，各边的长度都扩大 4 倍，那么锐角 B 的正切值（ ）

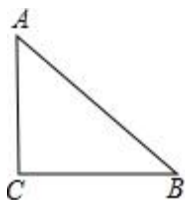
- A. 扩大 4 倍 B. 扩大 2 倍 C. 保持不变 D. 缩小 4 倍

【答案】C

【解析】

【分析】根据锐角三角函数的定义得出 $\tan B = \frac{AC}{BC}$ ，求出 $\frac{4AC}{4BC} = \frac{AC}{BC}$ ，再得出选项即可。

【详解】解：如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，则 $\tan B = \frac{AC}{BC}$ ，



$$\therefore \frac{4AC}{4BC} = \frac{AC}{BC},$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中，各边的长度都扩大 4 倍，那么锐角 B 的正切值保持不变，

故选：C.

【点睛】本题考查了解直角三角形，解题的关键是能根据锐角三角函数的定义得出 $\tan B = \frac{AC}{BC}$ 。

2. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 4$ ， $AC = 3$ ，那么 $\angle A$ 的三角比值为 $\frac{3}{5}$ 的是（ ）

- A. $\sin A$ B. $\cos A$ C. $\tan A$ D. $\cot A$

【答案】B

【解析】

【分析】根据锐角三角函数的正弦，余弦，正切，余切的定义判断即可。

【详解】解：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 4$ ， $AC = 3$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5},$$

故选：B.

【点睛】本题考查了锐角三角函数的定义，解题的关键是熟练掌握锐角三角函数的正弦，余弦，正切，余切的区别。

3. 下列二次函数与抛物线 $y = -x^2 + 2x - 3$ 的对称轴相同的函数是 ()

A. $y = -x^2 + 4x - 3$

B. $y = -2x^2 - 3x$

C. $y = 3x^2 + 6x - 7$

D. $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 5$

【答案】D

【解析】

【分析】通过抛物线对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 求解.

【详解】解：抛物线 $y = -x^2 + 2x - 3$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{2}{-2} = 1$,

选项 A 中抛物线对称轴为直线 $x = -\frac{4}{-2} = 2$, 不符合题意.

选项 B 中抛物线对称轴为直线 $x = -\frac{-3}{-4} = -\frac{3}{4}$, 不符合题意.

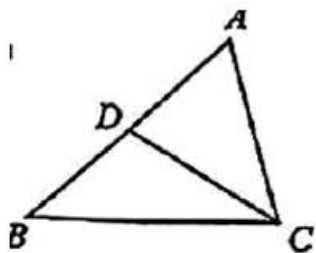
选项 C 中抛物线对称轴为直线 $x = -\frac{6}{6} = -1$, 不符合题意.

选项 D 中抛物线对称轴为直线 $x = -\frac{-1}{1} = 1$, 符合题意.

故选：D.

【点睛】本题考查二次函数的性质，解题的关键是掌握二次函数图象对称轴与系数的关系.

4. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，那么下列条件中不能判定 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ 的是 ()



A. $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC}$

B. $AC^2 = AD \cdot AB$

C. $\angle B = \angle ACD$

D. $\angle ADC = \angle ACB$

【答案】A

【解析】

【分析】由两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似可判断 A, B, 由两个角对应相等的两个三角形相似可判断 C, D, 从而可得答案.

【详解】解： $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC}$ 而行 $\angle ACD$, $\angle B$ 不一定相等，不能判断 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, 故 A 符合题意;

$$\because AC^2 = AD \cdot AB,$$

$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}, \text{ 而 } \angle A = \angle A,$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD$, 故 B 不符合题意;

$$\because \angle B = \angle ACD, \angle A = \angle A,$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD$, 故 C 不符合题意;

$$\because \angle ADC = \angle ACB, \angle A = \angle A,$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD$, 故 D 不符合题意;

故选 A

【点睛】 本题考查的是相似三角形的判定，掌握“两个角对应相等的两个三角形相似，两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似”是解本题的关键.

5. 如果 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$, 且 $\vec{c} \neq \vec{0}$, 下列结论正确的是

A. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

B. $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$

C. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同

D. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据向量的性质进行计算判断即可.

【详解】 解: 将 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ 代入 $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$,

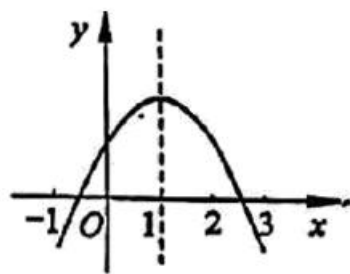
计算得: $\vec{a} = -2\vec{b}$ (方向相反).

故选: D

【点睛】 本题考查了向量的性质, 熟悉向量的性质是解题的关键.

6. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像如图所示, 现有以下结论: (1) $b > 0$; (2) $abc < 0$;

(3) $a - b + c > 0$; (4) $a + b + c > 0$; (5) $b^2 - 4ac > 0$; 其中正确的结论有 ()



A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个.

【答案】 C

【解析】

【分析】由抛物线的开口方向判断 a 与 0 的关系，由抛物线与 y 轴的交点判断 c 与 0 的关系，然后根据对称轴及抛物线与 x 轴交点情况进行推理，进而对所得结论进行判断.

【详解】解：(1) $\because$ 函数开口向下， $\therefore a < 0$ ， $\because$ 对称轴在 y 轴的右边， $\therefore -\frac{b}{2a} > 0$ ， $\therefore b > 0$ ，故命题正确；

(2) $\because a < 0$ ， $b > 0$ ， $c > 0$ ， $\therefore abc < 0$ ，故命题正确；

(3) $\because$ 当 $x = -1$ 时， $y < 0$ ， $\therefore a - b + c < 0$ ，故命题错误；

(4) $\because$ 当 $x = 1$ 时， $y > 0$ ， $\therefore a + b + c > 0$ ，故命题正确；

(5) $\because$ 抛物线与 x 轴于两个交点， $\therefore b^2 - 4ac > 0$ ，故命题正确；

故选 C.

【点睛】本题考查了二次函数图象与二次函数系数之间的关系，会利用对称轴的范围求 $2a$ 与 b 的关系，以及二次函数与方程之间的转换，根的判别式的熟练运用.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 如果 $x:y = 5:2$ ，那么 $(x+y):y$ 的值为_____

【答案】 $\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】设 $x = 5k$ ， $y = 2k$ ，代入计算即可.

【详解】 $\because x:y = 5:2$ ，

$\therefore$ 设 $x = 5k$ ， $y = 2k$ ，

$\therefore (x+y):y = (5k+2k):2k = 7:2$ ，

故答案为： $\frac{7}{2}$.

【点睛】本题考查了比例的基本性质，熟练掌握性质，并灵活解题是解题的关键.

8. 已知线段 AB 的长为 2 厘米，点 P 是线段 AB 的黄金分割点，那么较长线段 AP 的长是 _____厘米.

【答案】 $(\sqrt{5}-1)$

【解析】

【分析】根据黄金分割： $AP:AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 解答即可.

【详解】解：根据题意， $AP:AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ， $AB = 2$ 厘米，

$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot AB = (\sqrt{5}-1)$ 厘米，

故答案为: $(\sqrt{5}-1)$.

【点睛】 本题考查黄金分割, 熟知黄金分割和黄金数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ = 较长线段: 全线段是解答的关键.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 4$, $\sin A = \frac{2}{3}$, 则 $AB =$ _____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 根据 $\sin A = \frac{2}{3}$, 即可求得 AB 的长.

【详解】 $\because BC = 4, \sin A = \frac{2}{3}$,

$$\therefore AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6.$$

故答案为 6.

【点睛】 本题考点: 锐角的正弦函数.

10. 两个相似三角形的面积之比是 $9:25$, 其中较大的三角形一边上的高是 5 厘米, 那么另一个三角形对应边上的高为 _____ 厘米.

【答案】 3

【解析】

【分析】 把面积之比转换成相似比, 在通过比例求出高

【详解】 $\because$ 两个三角形面积比为 $9:25$

$\therefore$ 两个三角形相似比为 $3:5$

设: 另一三角形对应边上的高为 x

$$\therefore \frac{x}{5} = \frac{3}{5}, \text{ 解得 } x=3$$

故答案为: 3

【点睛】 本题考查相似比和面积比的应用, 掌握他们的区别是本题关键.

11. $\vec{e}$ 为单位向量, $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 的方向相同, 且长度为 2, 那么 $\vec{a} =$ _____ $\vec{e}$

【答案】 2

【解析】

【分析】 两向量方向相同可做线性运算, 单位向量长度为 1, 故可得二者的数量关系.

【详解】 解: $\because \vec{e}$ 长度为 1, $\vec{a}$ 长度为 2, 二者方向相同

$\therefore$ 做线性运算可得 $\vec{a} = 2\vec{e}$

故答案为: 2.

【点睛】本题考查了向量的线性运算. 解题的关键在于明确向量是有大小和方向的量.

12. 如果抛物线 $y = x^2 + m + 1$ 的顶点是坐标轴的原点, 那么 m 的值是_____

【答案】 -1

【解析】

【分析】根据顶点为原点得出 $m+1=0$, 再解出 m 即可.

【详解】 $\because$ 该函数顶点是坐标轴的原点

$\therefore m+1=0$; 解得 $m=-1$

答案为: $m=-1$

【点睛】本题考查一元二次方程中参数的取值, 掌握各种典型函数图像的知识是关键.

13. 已知二次函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 图像的对称轴为直线 $x = 4$, 则 $f(1)$ _____ $f(3)$. (填“ $>$ ”或“ $<$ ”)

【答案】 $>$

【解析】

【分析】根据对称轴及开口方向确定其增减性即可确定答案.

【详解】解: $\because$ 二次函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = 4$,

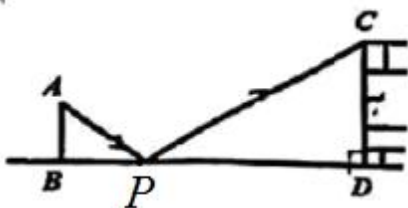
$\therefore$ 当 x 的取值越靠近 4 函数值就越小, 反之越大,

$\therefore f(1) > f(3)$,

故答案为: $>$.

【点睛】考查了二次函数的性质, 解题的关键是根据对称轴及开口方向确定其增减性.

14. 如图所示, 用手电来测量古城墙高度, 将水平的平面镜放置在点 P 处, 光线从点 A 出发, 经过平面镜反射后, 光线刚好照到古城墙 CD 的顶端 C 处. 如果 $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, $AB = 1.5$ 米, $BP = 1.8$ 米, $PD = 12$ 米, 那么该古城墙的高度是_____米



【答案】 10

【解析】

【分析】根据两个三角形相似、对应边长度比成比例求出古城墙高度.

【详解】 $\because$ 入射角=反射角

$\therefore$ 入射角的余角 $\angle APB =$ 反射角的余角 $\angle CPD$

又 $AB \perp BD$; $CD \perp BD$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle CDP$$

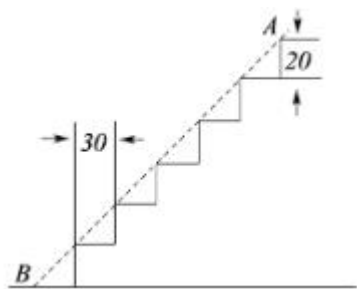
$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{CD}{PD} = \frac{1.5}{1.8} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore CD = PD \times \frac{5}{6} = 10$$

故答案为：10

【点睛】本题考查相似三角形在求建筑物的高度中的应用，找出比例是关键.

15. 如图，某幢楼的楼梯每一级台阶的高度为 20 厘米，宽度为 30 厘米，那么斜面 AB 的坡度为_____.



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

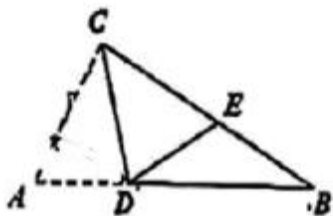
【分析】根据坡度的概念计算，得到答案.

【详解】解：斜面 AB 的坡度为： $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$,

故答案为： $\frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查的是解直角三角形的应用-坡度坡角问题，掌握坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比是解题的关键.

16. 如图，已知在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 1$, D 是 AB 边上一点，将 $\triangle ACD$ 沿 CD 翻折，点 A 恰好落在边 BC 上的点 E 处，那么 $AD =$ _____



【答案】 $\sqrt{3} - 1$

【解析】

【分析】翻折的性质可知 $AD = DE$, $AC = CE$, $\angle A = \angle CED$; 在 $Rt\triangle ABC$ 中有 $\angle A = 60^\circ$, $BC = \sqrt{3}$; $\angle CED = \angle B + \angle EDB$, 得 $\triangle DEB$ 是等腰三角形, $AD = DE = BE = BC - CE = BC - AC$ 即可求出长度.

【详解】解：翻折可知： $\triangle ACD \cong \triangle ECD$ ， $AD = DE$ ， $AC = CE$

$\because \angle B = 30^\circ$ ， $AC = 1$ ， $\angle ACB = 90^\circ$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $AB = 2AC = 2$

$\therefore \angle A = \angle CED = 60^\circ$ ， $BC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$\because \angle CED = \angle B + \angle EDB$

$\therefore \angle EDB = \angle B = 30^\circ$

$\therefore \triangle DEB$ 是等腰三角形

$\therefore DE = EB$

$\therefore AD = EB = BC - CE = \sqrt{3} - 1$

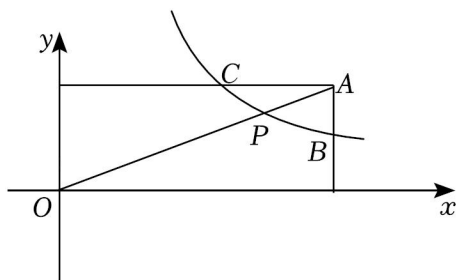
故答案为： $\sqrt{3} - 1$ 。

【点睛】 本题考查了轴对称的性质，等腰三角形的判定与性质，三角形的外角，勾股定理等知识点。解题的关键在于找出边相等的关系。

17. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 A 的坐标为 $(a, 3)$ ($a > 4$)，射线 OA 与反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图像

交于点 P，过点 A 作 x 轴的垂线交双曲线于点 B，过点 A 作 y 轴的垂线交双曲线于点 C，联结 BP、CP，

那么 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}$ 的值是_____



【答案】 1

【解析】

【分析】 求出 AO 的直线解析式 $y = \frac{3}{a}x$ ， 联立 $\begin{cases} y = \frac{12}{x} \\ y = \frac{3}{a}x \end{cases}$ ， 求出 $P(2\sqrt{a}, \frac{6\sqrt{a}}{a})$ ， 过 P 点作 $PM \perp AB$ 交于点

B , $PN \perp AC$ 交于点 N , 则 $C(a, \frac{12}{a})$, $B(4, 3)$, 分别求出 $AC = 3 - \frac{12}{a}$, $PN = a - 2\sqrt{a}$, $AB = a - 4$,

$PM = 3 - \frac{6\sqrt{a}}{a}$, 即可求 $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}(a-4)(3 - \frac{6\sqrt{a}}{a})$, $S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2}(a-2\sqrt{a})(3 - \frac{12}{a})$, 再求 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}$ 即可.

【详解】解: 设 AO 的解析式为 $y = kx$,

$$\therefore 3 = ak,$$

$$\therefore k = \frac{3}{a},$$

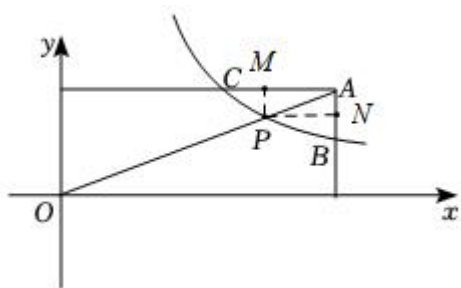
$$\therefore y = \frac{3}{a}x,$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{12}{x} \\ y = \frac{3}{a}x \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 2\sqrt{a} \\ y = \frac{6\sqrt{a}}{a} \end{cases},$$

$$\therefore P(2\sqrt{a}, \frac{6\sqrt{a}}{a}),$$

过 P 点作 $PM \perp AB$ 交于点 M , $PN \perp AC$ 交于点 N ,



$$\therefore C(a, \frac{12}{a}), B(4, 3),$$

$$\therefore AC = 3 - \frac{12}{a}, PN = a - 2\sqrt{a}, AB = a - 4, PM = 3 - \frac{6\sqrt{a}}{a},$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}(a-4)(3 - \frac{6\sqrt{a}}{a}),$$

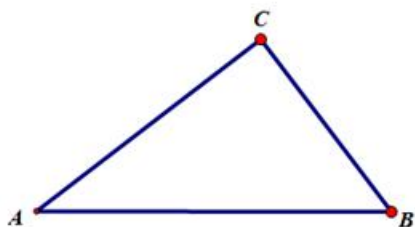
$$S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2}(a-2\sqrt{a})(3 - \frac{12}{a}),$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}} = \frac{3a-12+\frac{24\sqrt{a}}{a}-6\sqrt{a}}{3a-6\sqrt{a}-12+\frac{24\sqrt{a}}{a}} = 1,$$

故答案为：1.

【点睛】本题考查反比例函数的图象及性质，解题的关键是熟练掌握反比例函数的图象及性质.

18. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$ ，点 P 是 AC 边上一点，将 $\triangle ACB$ 沿着过点 P 的一条直线翻折，使得点 A 落在边 AB 上的点 Q 处，联结 PQ ，如果 $\angle CQB = \angle APQ$ ，那么 AQ 的长为_____

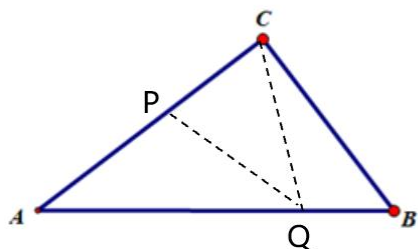


【答案】 $\frac{39}{5}$ 或 $7\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】由题意知， $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$ ， A 和 Q 关于过点 P 的直线对称，如图所示， $AP = PQ$ ， $\angle CQB = \angle APQ$ ，有 $\angle CPQ = \angle AQC$ ， $\angle QCP = \angle ACQ$ ，故有 $\triangle QPC \sim \triangle AQC$ ， $\frac{QP}{AQ} = \frac{QC}{AC} = \frac{PC}{QC}$ ；
 $\tan \angle A = \frac{\frac{1}{2}AQ}{AP} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10}$ 得 $\frac{AQ}{AP} = \frac{8}{5} = \frac{AQ}{QP}$ ，求出 QC ， PC ， AP 的值，进而得出 AQ 的值.

【详解】解：由题意知， A 和 Q 关于过点 P 的直线对称，如图所示



在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $BC = 6$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$$

$$\therefore AP = PQ, \angle CQB = \angle APQ$$

$$\therefore \angle A = \angle PQA, \angle CPQ = \angle AQC$$

$$\text{在 } \triangle QPC \text{ 和 } \triangle AQC \text{ 中 } \begin{cases} \angle QCP = \angle ACQ \\ \angle CPQ = \angle CQA \\ \angle PQC = \angle A \end{cases}$$

$$\therefore \triangle QPC \sim \triangle AQC$$

$$\therefore \frac{QP}{AQ} = \frac{QC}{AC} = \frac{PC}{QC}$$

$$\text{又} \because \cos \angle A = \frac{\frac{1}{2}AQ}{AP} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10}$$

$$\therefore \frac{AQ}{AP} = \frac{8}{5} = \frac{AQ}{QP}$$

$$\therefore \frac{QP}{AQ} = \frac{5}{8} = \frac{QC}{8} = \frac{PC}{QC}$$

$$\therefore QC = 5, PC = \frac{25}{8}, AP = AC - PC = 8 - \frac{25}{8} = \frac{39}{8}$$

$$\therefore AQ = \frac{39}{5}$$

故答案为: $\frac{39}{5}$.

【点睛】 本题考查了轴对称，相似三角形的判定与性质，正切值等知识点．解题的关键与难点在于相似比找出线段之间的数量关系．

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

$$19. \text{ 计算: } \tan 45^\circ + (\sqrt{3} - 1)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{4}{\sqrt{3} + 1}.$$

【答案】 $2\sqrt{3} - 2$

【解析】

【分析】 代入特殊角三角函数值，化简零指数幂，负整数指数幂，利用平方差公式进行二次根式分母有理化计算，然后再算加减．

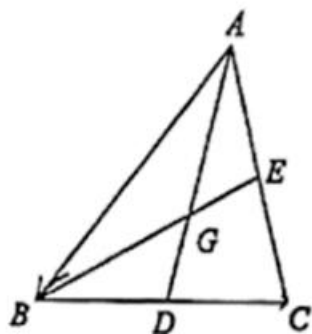
【详解】 解：原式 $= 1 + 1 - 2 + \frac{4(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)},$

$$= 1 + 1 - 2 + 2\sqrt{3} - 2,$$

$$= 2\sqrt{3} - 2.$$

【点睛】 本题考查二次根式的混合运算，理解 $a^0 = 1(a \neq 0)$ ， $a^{-p} = \frac{1}{a^p}(a \neq 0)$ ，解题的关键是熟记特殊角三角函数值，掌握利用平方差公式进行二次根式分母有理化计算．

20. 如图， AD, BE 是 $\triangle ABC$ 的中线，交于点 G ，且 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ．



(1) 直接写出向量 $\overrightarrow{AG}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式, $\overrightarrow{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 在图中画出向量 $\overrightarrow{BG}$ 在向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 方向上的分向量. (不要求写作法, 但要保留作图痕迹, 并写明结论)

【答案】 (1) $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$;

(2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据三角形中线性质和重心性质可得 $BD = \frac{1}{2}BC$, $AG = \frac{2}{3}AD$, 由 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ 求解即可;

(2) 过点 G 分别作 AB 、 BC 的平行线, 分别交 BC 、 AB 于 H 、 F , 作向量 $\overrightarrow{BF}$ 、 $\overrightarrow{BH}$ 即可.

【小问 1 详解】

解: $\because AD, BE$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, 交于点 G ,

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC, AG = \frac{2}{3}AD,$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

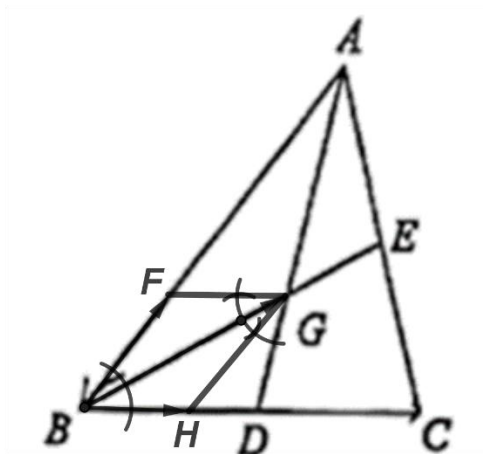
$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b};$$

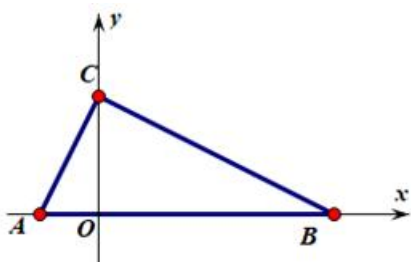
【小问 2 详解】

解: 如图所示, $\overrightarrow{BF}$ 、 $\overrightarrow{BH}$ 是向量 $\overrightarrow{BG}$ 在向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 方向上的分向量.



【点睛】 本题考查平面向量的线性运算、三角形的中线性质的性质、三角形的重心性质、尺规作图-作平行线，熟练掌握向量的线性运算，会作出一个向量在给定的两个不平行向量的方向上的分向量是解答的关键.

21. 如图， 已知在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $\tan \angle CAB = 2$ ， 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$ ， 点 B 在 x 轴正半轴上， 点 C 在 y 轴正半轴上.



- (1) 求经过 B 、 C 两点的直线的表达式.
- (2) 求图像经过 A 、 B 、 C 三点的二次函数的解析式.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$.

【解析】

【分析】 (1) 利用 $\tan \angle CAB = 2$ 先求解 C 的坐标，再证明 $\triangle CAO \sim \triangle BCO$, $\tan \angle CAO = \tan \angle BCO$, 再求解 B 的坐标，利用待定系数法求解 BC 的解析式即可；

(2) 根据抛物线与 x 轴的交点设抛物线为 $y = a(x+1)(x-4)$, 再把 C 的坐标代入求解 a 即可.

【小问 1 详解】

解: $\because \tan \angle CAB = 2$, 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$, $AO \perp CO$,

$\therefore \frac{OC}{OA} = 2$, 则 $OC = 2$, $C(0, 2)$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$ 且 $\angle AOC = 90^\circ$,

$$\angle CAO + \angle ACO = 90^\circ = \angle ACO + \angle BCO,$$

$$\angle CAO = \angle BCO, \tan \angle CAO = \tan \angle BCO,$$

$$\frac{OB}{OC} = 2, OB = 2OC = 4,$$

$$\therefore B(4, 0),$$

$$\text{设直线 } BC \text{ 为: } y = kx + b_1,$$

$$\begin{cases} 4k + b_1 = 0 \\ b_1 = 2 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b_1 = 2 \end{cases},$$

$$\text{所以直线 } BC \text{ 为: } y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

【小问 2 详解】

解: 设过 $A(-1, 0), B(4, 0), C(0, 2)$ 的抛物线为:

$$y = a(x+1)(x-4),$$

$$-4a = 2,$$

$$\text{解得: } a = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以抛物线为: } y = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2.$$

【点睛】 本题考查的是锐角三角函数的应用，坐标与图形，利用待定系数法求解一次函数与二次函数的解析式，熟练的利用锐角三角函数求解 B, C 的坐标是解本题的关键。

22. 为了维护南海的主权，我国对相关区域进行海空常态化立体巡航. 如图，在一次巡航中，预警机沿 AE 方向飞行，驱护舰沿 BP 方向航行，且航向相同 ($AE \parallel BP$). 当预警机飞行到 A 处时，测得航行到 B 处的驱护舰的俯角为 45° ，此时 B 距离相关岛屿 P 恰为 60 千米；当预警机飞行到 C 处时，驱护舰恰好航行到预警机正下方 D 处，此时 $CD = 10$ 千米，当预警机继续飞行到 E 处时，驱护舰到达相关岛屿 P ，且测得 E 处的预警机的仰角为 22° . 求预警机的飞行距离 AE . (结果保留整数) (参考数据: $\sin 22^\circ \approx 0.37, \cos 22^\circ \approx 0.93, \tan 22^\circ \approx 0.40$.)



【答案】 预警机的飞行距离 AE 为 95 千米

【解析】

【分析】过 B 作 $BH \perp AE$ 于 H ，过 E 作 $EF \perp BP$ 交延长线于 F ，利用锐角三角函数解直角三角形求得 AH 、 PF 即可。

【详解】解：过 B 作 $BH \perp AE$ 于 H ，过 E 作 $EF \perp BP$ 交延长线于 F ，则 $\angle AHB = \angle EFP = 90^\circ$ ，

由题意， $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle EPF = 22^\circ$ ， $BH = CD = EF = 10$ 千米， $EH = BF$ ， $BP = 60$ 千米，

在 $\text{Rt}\triangle AHB$ 中， $\angle A = 45^\circ$ ， $BH = 10$ 千米，

$\therefore AH = BH = 10$ 千米，

在 $\text{Rt}\triangle EFP$ 中， $\angle EPF = 22^\circ$ ， $EF = 10$ 千米，

$$\therefore PF = \frac{EF}{\tan 22^\circ} \approx \frac{10}{0.4} = 25,$$

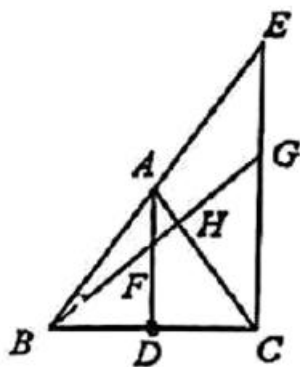
$\therefore AE = AH + HE = 10 + 60 + 25 = 95$ (千米)，

答：预警机的飞行距离 AE 为 95 千米。



【点睛】本题考查解直角三角形的实际应用，熟练掌握利用锐角三角函数解直角三角形，作垂线构造直角三角形是解答的关键。

23. 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 是边 BC 上的中点，过点 C 作 $CE \perp BC$ ，交 BA 的延长线于点 E ，过点 B 作 $BH \perp AC$ ，交 AD 于点 F ，交 AC 于点 H ，交 CE 于点 G 。



求证：

(1) $BC \cdot BH = CH \cdot EC$ ；

(2) $BC^2 = 4DF \cdot DA$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 利用已知条件证明 $\triangle BCE \sim \triangle CHB$ 即可；

(2) 通过证明 $\triangle ADC \sim \triangle BDF$ 得出 $\frac{DC}{DF} = \frac{AD}{BD}$ ，再根据 $BD = DC = \frac{1}{2}BC$ ，得出结论。

【小问 1 详解】

证明: $\because CE \perp BC, BH \perp AC,$

$$\therefore \angle BCE = \angle CHB = 90^\circ,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle CHB,$$

$$\therefore \frac{BC}{CH} = \frac{CE}{BH},$$

$$\therefore BC \cdot BH = CH \cdot EC;$$

【小问 2 详解】

证明: $\because AB = AC$, 点 D 是边 BC 上的中点,

$$\because AD \perp BC, BH \perp AC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle AHB = 90^\circ,$$

$$\because \angle DAC = \angle HAF,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle AFH,$$

$$\because \angle AFH = \angle BFD,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BFD,$$

$$\because \angle ADC = \angle BDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BDF,$$

$$\therefore \frac{DC}{DF} = \frac{AD}{BD},$$

$$\because BD = DC = \frac{1}{2}BC,$$

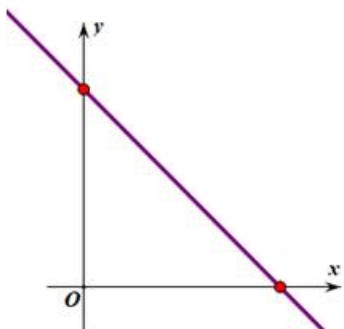
$$\therefore \frac{1}{4}BC^2 = AD \cdot DF,$$

$$\text{即 } BC^2 = 4DF \cdot DA.$$

【点睛】 本题考查了三角形相似的判定和性质以及直角三角形和等腰三角形的性质, 解题的关键是掌握相似三角形的判定定理进行证明.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = -x + 5$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B . 点

C 为抛物线 $y = ax^2 - 2a^2x + a^3 + \frac{1}{2}a$ 的顶点.



(1) 用含 a 的代数式表示顶点 C 的坐标:

(2) 当顶点 C 在 $\triangle AOB$ 内部, 且 $S_{\triangle AOC} = \frac{5}{2}$ 时, 求抛物线的表达式:

(3) 如果将抛物线向右平移一个单位, 再向下平移 $\frac{1}{2}$ 个单位后, 平移后的抛物线的顶点 P 仍在 $\triangle AOB$ 内, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $C(a, \frac{1}{2}a)$

(2) $y = 2x^2 - 8x + 9$;

(3) $1 < a < 3$

【解析】

【分析】(1) 利用配方法将抛物线解析式化为顶点式即可解答;

(2) 求出点 A 、 B 的坐标, 利用三角形面积公式求解 a 值即可解答;

(3) 根据点的坐标平移规律“右加左减, 上加下减”得出 P 点坐标, 再根据条件得出 a 的一元一次不等式组, 解不等式组即可求解

【小问 1 详解】

解: 抛物线 $y = ax^2 - 2a^2x + a^3 + \frac{1}{2}a = a(x-a)^2 + \frac{1}{2}a$,

$\therefore$ 顶点 C 的坐标为 $(a, \frac{1}{2}a)$;

【小问 2 详解】

解: 对于 $y = -x + 5$, 当 $x=0$ 时, $y=5$, 当 $y=0$ 时, $x=5$,

$\therefore A(5, 0), B(0, 5)$,

$\because$ 顶点 C 在 $\triangle AOB$ 内部, 且 $S_{\triangle AOC} = \frac{5}{2}$,

$\therefore \frac{1}{2} \times 5 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{5}{2}$,

$\therefore a=2$,

∴ 抛物线的表达式为 $y = 2x^2 - 8x + 9$;

【小问 3 详解】

解：由题意，平移后的抛物线的顶点 P 的坐标为 $(a+1, \frac{1}{2}a - \frac{1}{2})$,

∵ 平移后的抛物线的顶点 P 仍在 $\triangle AOB$ 内,

$$\therefore \begin{cases} a+1 > 0 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} > 0 \\ -(a+1) + 5 > \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \end{cases},$$

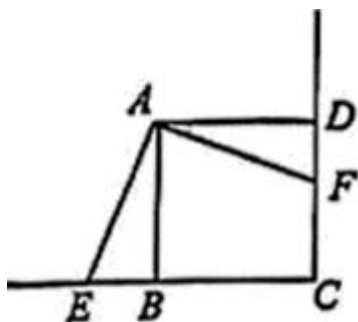
解得： $1 < a < 3$,

即 a 的取值范围为 $1 < a < 3$.

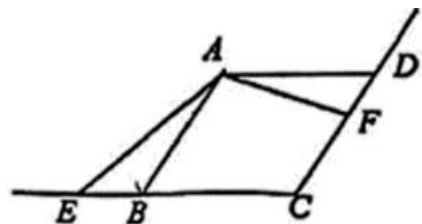
【点睛】 本题考查求二次函数的顶点坐标和表达式、二次函数的图象平移、一次函数的图象与坐标轴的交点问题、坐标与图象、解一元一次不等式组，熟练掌握相关知识的联系与运用，第 (3) 小问正确得出不等式组是解答的关键.

25. 已知四边形 $ABCD$ 是菱形， $AB = 4$ ， 点 E 在射线 CB 上， 点 F 在射线 CD 上， 且 $\angle EAF = \angle BAD$.

(1) 如图， 如果 $\angle BAD = 90^\circ$ ， 求证： $AE = AF$ ；



(2) 如图， 当点 E 在 CB 的延长线上时， 如果 $\angle ABC = 60^\circ$ ， 设 $DF = x$, $\frac{AF}{AE} = y$ ， 试建立 y 与 x 的函数关系式， 并写出 x 的取值范围



(3) 联结 AC , $BE = 2$ ， 当 $\triangle AEC$ 是等腰三角形时， 请直接写出 DF 的长.

【答案】(1) 证明过程详见解答;

$$(2) y = \frac{4-x}{4} (0 < x < 4)$$

$$(3) DF = \frac{8}{5} \text{ 或 } \frac{16}{7}$$

【解析】

【分析】(1) 先证明四边形 $ABCD$ 是正方形, 再证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$, 从而命题得证;

(2) 在 AD 上截取 $DG = DF$, 先证明 $\triangle DGF$ 是正三角形, 再证明 $\triangle ABE \sim \triangle AGF$, 进一步求得结果;

(3) 当 $AE = AC$ 时, 作 $AH \perp CE$ 于 H , 以 F 为圆心, DF 为半径画弧交 AD 于 G , 作 $FN \perp AD$ 于 N , 证明 $\triangle ABH \sim \triangle FND$, $\angle AGF = \angle ABE$, 可推出 $\frac{DG}{DF} = \frac{1}{2}$, 再证明 $\triangle ABE \sim \triangle AGF$, 可推出 $\frac{4-DG}{4} = \frac{GF}{2}$, 从而求得 DF , 当 $AC = CE = 6$ 时, 作 $AH \perp CE$ 于 H , 以 F 为圆心, DF 为半径画弧交 AD 于 G , 作 $FN \perp AD$ 于 N , 作 $BM \perp AC$ 于 M , 先根据 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM = \frac{1}{2} BC \cdot AH$ 求得 AH , 进而求得 BH , 根据 $\triangle ABH \sim \triangle FGN$, $\triangle ABE \sim \triangle AFF$, $\frac{DG}{GF} = \frac{1}{4}$ 和 $\frac{4+DG}{GF} = \frac{1}{2}$, 从而求得 DF , 根据三角形三边关系否定 $AE = CE$, 从而确定 DF 的结果.

【小问 1 详解】

解: 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle BAE = \angle ABC = \angle ADF = 90^\circ$, $AD = AB$,

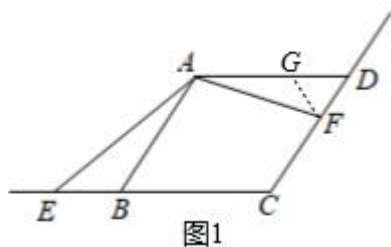
$\therefore \angle BAE = \angle DAF$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF (ASA)$,

$\therefore AE = AF$;

【小问 2 详解】

解: 如图 1,



在 AD 上截取 $DG = DF$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore \angle ADF = \angle ABC = 60^\circ$, $AD = AB = 6$,

$\therefore \triangle DGF$ 是正三角形,

$$\therefore \angle DFG = 60^\circ, \quad GF = DF = DG = x,$$

$$\therefore \angle AGF = \angle ABE = 120^\circ, \quad AG = 4 - x,$$

$$\because \angle BAE = \angle DAF,$$

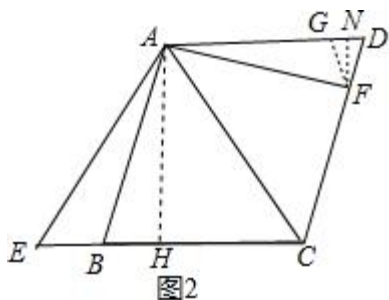
$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle AGF,$$

$$\therefore \frac{AF}{AE} = \frac{AG}{AB},$$

$$\therefore y = \frac{4-x}{4} (0 < x < 4);$$

【小问 3 详解】

如图 2,



当 $AE = AC$ 时, 作 $AH \perp CE$ 于 H , 以 F 为圆心, DF 为半径画弧交 AD 于 G , 作 $FN \perp AD$ 于 N ,

$$\therefore CH = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2} \times (4+2) = 3, \quad \angle FND = \angle AHB = 90^\circ, \quad \angle D = \angle FGD, \quad DG = 2DN,$$

$$\therefore BH = BC - CH = 4 - 3 = 1,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore \angle D = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle ABH \sim \triangle FND, \quad \angle AGF = \angle ABE,$$

$$\therefore \frac{DN}{DF} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{DG}{GF} = \frac{1}{2} \text{ ①},$$

$$\because \angle BAE = \angle DAF,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle AGF,$$

$$\therefore \frac{AG}{AB} = \frac{GF}{BE},$$

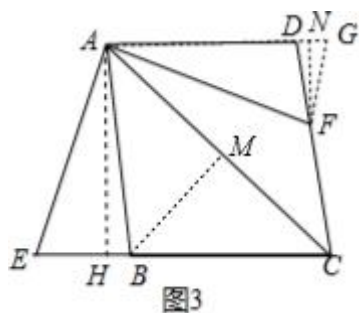
$$\therefore \frac{4-DG}{4} = \frac{GF}{2} \text{ ②},$$

由①②得,

$$GF = \frac{8}{5},$$

$$\therefore DF = \frac{8}{5},$$

如图 3,



当 $AC = CE = 6$ 时, 作 $AH \perp CE$ 于 H , 以 F 为圆心, DF 为半径画弧交 AD 于 G , 作 $FN \perp AD$ 于 N , 作 $BM \perp AC$ 于 M ,

$$\therefore CM = \frac{1}{2}AC = 3,$$

$$\therefore BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \sqrt{7},$$

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BM = \frac{1}{2}BC \cdot AH \text{ 得,}$$

$$6\sqrt{7} = 4 \cdot AH,$$

$$\therefore AH = \frac{3\sqrt{7}}{2},$$

$$\therefore BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{1}{2},$$

由第一种情形知: $\triangle ABH \sim \triangle FGN$, $\triangle ABE \sim \triangle AFF$,

$$\therefore \frac{GN}{FG} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{8}, \quad \frac{AG}{GF} = \frac{AB}{BE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{DG}{GF} = \frac{1}{4} \text{ ①, } \frac{4+DG}{GF} = \frac{1}{2} \text{ ②,}$$

由①②得,

$$GF = \frac{16}{7},$$

$$\therefore DF = \frac{16}{7},$$

$$\therefore AB + BE > AE,$$

$$\therefore BC + BE > AE,$$

即 $CE > AE$,

综上所述: $DF = \frac{8}{5}$ 或 $\frac{16}{7}$.

【点睛】 本题考查了菱形性质，正方形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，面积法等知识，解题的关键是作辅助线，构造相似三角形.