

2022 年上海市长宁区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$, $AB = c$, 那么 BC 的长为 ()

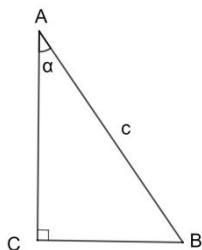
- A. $c \cdot \sin \alpha$ B. $c \cdot \tan \alpha$ C. $\frac{c}{\cos \alpha}$ D. $c \cdot \cot \alpha$

【答案】 A

【解析】

【分析】 画出 $\triangle ABC$, 根据三角函数进行解题即可.

【详解】 解: 由图可知,



$$\therefore \sin \alpha = \frac{BC}{c},$$

$$\therefore BC = c \cdot \sin \alpha.$$

故选: A.

【点睛】 本题主要考查三角函数的应用, 熟练掌握所学三角函数的性质是解题的关键.

2. 如果向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 方向相反, 且 $3|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么向量 $\vec{a}$ 用向量 $\vec{b}$ 表示为 ()

- A. $\vec{a} = 3\vec{b}$ B. $\vec{a} = -3\vec{b}$ C. $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{b}$ D. $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$

【答案】 D

【解析】

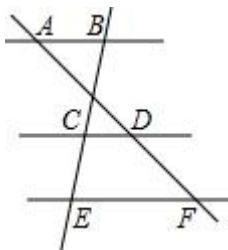
【分析】 根据向量的表示方法直接解答即可

【详解】 解: 向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 方向相反, 且 $3|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么向量 $\vec{a}$ 用向量 $\vec{b}$ 表示为 $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$

故选 D

【点睛】 本题考查了向量的表示方法, 理解 $3|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 是解题的关键.

3. 如图, 已知 $AB \parallel CD \parallel EF$, $AD: AF = 3: 5$, $BE = 12$, 那么 CE 的长等于 ()



A. 2

B. 4

C. $\frac{24}{5}$

D. $\frac{36}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行线分线段成比例得到 $\frac{BC}{12} = \frac{3}{5}$ ，然后利用比例性质计算出 BC ，从而求出 CE 即可.

【详解】解： $\because AB \parallel CD \parallel EF$,

$$\therefore \frac{BC}{BE} = \frac{AD}{AF}, \text{ 即 } \frac{BC}{12} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore BC = \frac{36}{5},$$

$$\therefore CE = BE - BC = 12 - \frac{36}{5} = \frac{24}{5},$$

故选 C.

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例，熟练掌握三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例.

4. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 $a > 0$ 、 $b < 0$ 、 $c > 0$) 一定不经过的象限是 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】C

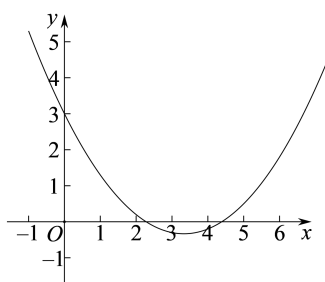
【解析】

【分析】根据二次函数的各项系数进行判断对称轴以及与 y 点的坐标，画出草图，进而即可求得答案

【详解】解： $\because a > 0$ 、 $b < 0$ 、 $c > 0$

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} > 0$ 则对称轴在 y 轴的右侧，且开口向上，

令 $x = 0, y = c > 0$ ，即抛物线与 y 点的坐标大于 0，如图，



故该函数的图象不经过第三象限

故选 C

【点睛】 本题考查了二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象与性质，掌握二次函数的图象与性质是解题的关键.

5. 下列命题中，说法正确的是 ()

- A. 所有菱形都相似
- B. 两边对应成比例且有一组角对应相等的两个三角形相似
- C. 三角形的重心到一个顶点的距离，等于它到这个顶点对边距离的两倍
- D. 斜边和直角边对应成比例，两个直角三角形相似

【答案】 D

【解析】

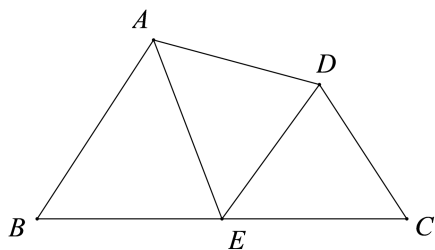
【分析】 根据相似多边形的性质，相似三角形的判定，三角形重心的性质逐项分析判断即可

- 【详解】 解： A. 所有菱形不一定相似，故该选项不正确，不符合题意；
- B. 两边对应成比例且夹角对应相等的两个三角形相似，故该选项不正确，不符合题意；
- C. 三角形的重心到一个顶点的距离，等于它到这个顶点对边中点距离的两倍，故该选项不正确，不符合题意；
- D. 斜边和直角边对应成比例，两个直角三角形相似，故该选项正确，符合题意；

故选 D

【点睛】 本题考查了相似多边形的性质，相似三角形的判定，三角形重心的性质，掌握以上知识是解题的关键.

6. 如图，点 E 是线段 BC 的中点， $\angle B = \angle C = \angle AED$ ，下列结论中，说法错误的是 ()



- A. $\triangle ABE$ 与 $\triangle ECD$ 相似
- B. $\triangle ABE$ 与 $\triangle AED$ 相似
- C. $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AD}$
- D. $\angle BAE = \angle ADE$

【答案】 D

【解析】

【分析】根据外角的性质可得 $\angle BAE = \angle DEC$ ，结合已知条件即可证明 $\triangle ABE \sim \triangle ECD$ ，从而判断 A，进而可得 $\frac{AB}{EC} = \frac{AE}{ED}$ ，根据 E 是中点，代换 $BE = CE$ ，进而根据两边成比例夹角相等可证 $\triangle ABE \sim \triangle AED$ ，进而判断 B，C，对于 D 选项，利用反证法证明即可。

【详解】解： $\because \angle AEC = \angle BAE + \angle B = \angle AED + \angle DEC$ ， $\angle AED = \angle B$

$$\therefore \angle BAE = \angle DEC$$

$$\text{又 } \angle B = \angle C$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ECD$$

故 A 选项正确

$$\because \triangle ABE \sim \triangle ECD$$

$$\therefore \frac{AB}{EC} = \frac{AE}{ED}$$

$\because E$ 为 BE 的中点

$$\therefore BE = CE$$

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{AE}{ED}$$

$$\text{又 } \angle B = \angle AED$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle AED$$

故 B、C 选项正确

$$\because \triangle ABE \sim \triangle AED$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE$$

$$\text{若 } \angle BAE = \angle ADE$$

$$\text{则 } \angle DAE = \angle ADE$$

$$\therefore AE = DE$$

根据现有条件无法判断 $AE = DE$ ，故 $\angle BAE \neq \angle ADE$

故 D 选项不正确

故选：D.

【点睛】本题考查了相似三角形的性质与判定，掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键。

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ ，那么 $\frac{2x}{x+y}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 根据比例的性质求得 $y = 2x$ ，代入代数式求值即可

【详解】 解： $\because \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

$$\therefore y = 2x$$

$$\therefore \frac{2x}{x+y} - \frac{2x}{x+2x} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

故答案为： $\frac{2}{3}$

【点睛】 本题考查了比例的性质，掌握比例的性质是解题的关键.

8. 抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 的顶点坐标是_____.

【答案】 (0, -1)

【解析】

【详解】 $\because a=2, b=0, c=-1, \therefore -\frac{b}{2a}=0, \frac{4ac-b^2}{4a}=-1$,

$\therefore$ 抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 的顶点坐标是(0, -1),

故答案为 (0, -1) .

9. 在比例尺为 1: 10000 的地图上，相距 5 厘米的两地 A、B 的实际距离为___米.

【答案】 500

【解析】

【分析】 设相距 5 厘米的两地 A、B 的实际距离为 x 厘米，根据题意可得方程 $\frac{5}{x} = \frac{1}{10000}$ ，解此方程即可求得答案.

【详解】 解： 设相距 5 厘米的两地 A、B 的实际距离为 x 厘米，

根据题意得： $\frac{5}{x} = \frac{1}{10000}$ ，

解得： $x=50000$ ，

经检验， $x=50000$ 是上述方程的解，

$$\therefore 50000\text{cm}=500\text{m},$$

∴相距 5 厘米的两地 A、B 的实际距离为 500m,

故答案为: 500.

【点睛】 本题考查比例线段, 比例尺. 解题的关键是注意理解题意, 根据题意列方程, 注意单位之间的换算.

10. 已知点 C 是线段 AB 的黄金分割点, 如果 $AC > BC$, $BC = 2$, 则 $AC =$ _____.

【答案】 $\sqrt{5} + 1$

【解析】

【分析】 根据黄金分割比可直接进行列式求解.

【详解】 解: ∵点 C 是线段 AB 的黄金分制点, 且 $AC > BC$, $BC = 2$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$AC = \frac{2BC}{\sqrt{5}-1} = \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5} + 1$$

故答案为: $\sqrt{5} + 1$.

【点睛】 本题主要考查了黄金分割点的定义, 即: 把一条线段分成两部分, 使其中较长的线段为全线段与较短线段的比例中项, 黄金分割比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

11. 如果两个相似三角形周长之比为 3:2, 那么这两个三角形的面积之比为_____.

【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】 根据相似三角形的周长比等于相似比, 面积比等于相似比的平方进行求解即可

【详解】 解: 两个三角形的周长比为 3:2,

∴两个三角形的相似比为 3:2,

∴两个三角形的面积比即为 9:4

故答案为: 9:4.

【点睛】 本题考查相似三角形的面积比, 本题难度不大, 主要是掌握相似三角形面积比等于边长的平方比.

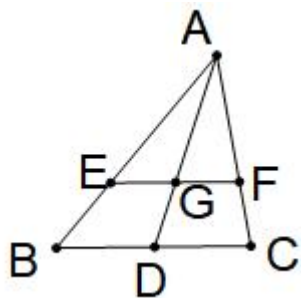
12. 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 作 BC 边的平行线与 AB 边交于点 E、与 AC 边交于点 F, 则 $\frac{EF}{BC} =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】先根据重心到顶点的距离等于到对边中点的距离的 2 倍得到 $\frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$ ，在根据 $EF \parallel BC$ 找到与 EF 、 BC 有关的比例即可.

【详解】如图所示，设 AG 交 BC 于 D



$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore AG = 2GD,$$

$$\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3},$$

$\because DE \parallel BC,$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ABD, \triangle AFG \sim \triangle ACD$$

$$\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{EG}{BD} = \frac{FG}{CD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore EG = \frac{2}{3}BD, FG = \frac{2}{3}CD$$

$$\therefore EF = EG + FG = \frac{2}{3}BD + \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}(BD + CD) = \frac{2}{3}BC$$

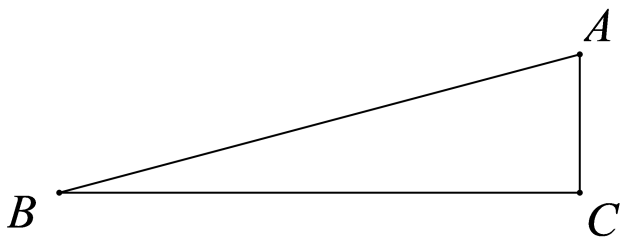
$$\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{2}{3}$$

故答案为: $\frac{2}{3}$

【点睛】本题考查了三角形的重心，平行线分线段成比例. 熟记三角形的重心到顶点的距离等于到对边中点的距离的 2 倍是解题的关键.

13. 如图，小明沿着坡度 $i = 1:2.4$ 的坡面由 B 到 A 直行走了 13 米时，他上升的高度

$AC =$ _____ 米.



【答案】 5

【解析】

【分析】 根据坡度的定义求得 $\frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$ ，即可求得 AC 的长

【详解】 解： $\because i = 1:2.4$

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2.4} = \frac{5}{12}$$

设 $AC = 5k$ ，则 $BC = 12k$

根据勾股定理可得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13k$

$$\because AB = 13$$

$$\therefore k = 1$$

$$\therefore AC = 5$$

故答案为： 5

【点睛】 考查了解直角三角形的应用一坡度坡角问题和勾股定理，熟悉且会灵活应用公式：坡度=垂直高度÷水平宽度是解题的关键。

14. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 2 (ab > 0)$ 与 y 轴交于点 A ,过点 A 作 x 轴的平行线交抛物线于点 B ,若 $AB = 2$,则点 B 坐标为_____.

【答案】 (-2, -2)

【解析】

【分析】 根据表达式求出 A 点坐标再根据 AB 平行于 x 轴， $AB=2$ 可得 B 点坐标为 (2, -2)、(-2, -2)，再

根据 $ab > 0$ 得 $-\frac{b}{2a} < 0$ ，所以 B 点坐标为 (-2, -2) .

【详解】 解： $\because y = ax^2 + bx - 2 (ab > 0)$ ，

$\therefore$ 当 $x=0$ 时， $y=-2$ ，

$\therefore$ A 点坐标 (0, -2)，

又 $\because AB=2$, 直线 AB 平行 x 轴

$\therefore B$ 点坐标为 $(2, -2)$ 、 $(-2, -2)$,

$\because ab > 0$,

$\therefore -\frac{b}{2a} < 0$, 抛物线对称轴在 y 轴左侧,

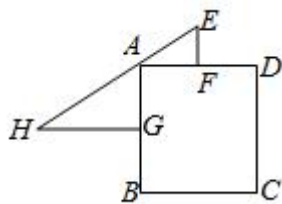
$\therefore B$ 点坐标为 $(-2, -2)$.

【点睛】 本题主要考查二次函数与 y 轴得交点, 二次函数对称轴和两点之间的距离, 熟练掌握二次函数基本性质是解决本题的关键.

15. 我国古代数学著作《九章算术》中记载: “今有邑方不知大小, 各中开门. 出北门三十步有木, 出西门七百五十步有木. 问邑方几何?” 示意图如图, 正方形 $ABCD$ 中, F 、 G 分别是 AD 和 AB 的中点,

若 $EF \perp AD$, $EF = 30$, $GH \perp AB$, $GH = 750$, 且 EH 过点 A , 那么正方形 $ABCD$ 的边长为

_____.



【答案】 300

【解析】

【分析】 设 $AF = x$, 根据题意证明 $\triangle EFA \sim \triangle AHG$, 从而得到对应边的比相等, 列出方程即可求得 AF , 进而求得正方形的边长

【详解】 解: $\because$ 正方形 $ABCD$ 中, F 、 G 分别是 AD 和 AB 的中点

$$\therefore AG = \frac{1}{2} AB, AF = \frac{1}{2} AD, \quad AD \perp AB$$

$$\therefore AG = AF$$

$$\because EF \perp AD, EF = 30, GH \perp AB, GH = 750$$

$$\therefore AF \parallel HG, \quad AG \parallel EF$$

$$\therefore \angle EAF = \angle AHG, \angle E = \angle HAG$$

$$\therefore \triangle EFA \sim \triangle AHG$$

设 $AF=AG=x$,

$$\therefore \frac{EF}{AG} = \frac{AF}{HG}$$

$$\text{即 } \frac{30}{x} = \frac{x}{750}$$

解得 $x=150$

$$\therefore AF=150$$

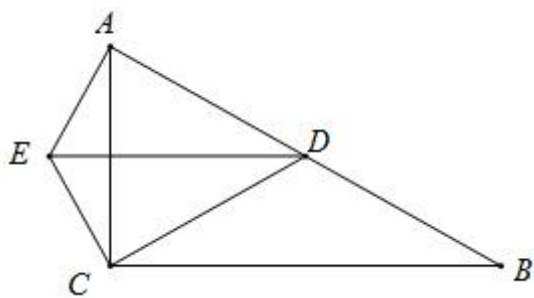
$$\therefore AD=2AF=2 \times 150=300$$

故答案为: 300

【点睛】 本题考查了相似三角形的应用, 正方形的性质, 掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

16. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\tan \angle BAC = \frac{3}{2}$, CD 是斜边 AB 上的中线, 点 E 是直线

AC 左侧一点, 联结 AE 、 CE 、 ED , 若 $EC \perp CD$, $\angle EAC = \angle B$, 则 $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值为_____.



【答案】 $\frac{13}{36}$

【解析】

【分析】 先证明 $\text{Rt}\triangle AED \cong \text{Rt}\triangle CED$, 则 $S_{\triangle AED} = S_{\triangle CED}$, 进而证明 $\triangle DAE \sim \triangle BCA$, 据 $\tan \angle BAC = \frac{3}{2}$ 求得相似比, 根据面积比等于相似比的平方即可求解

【详解】 解: $\because CD$ 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线,

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = AD$$

$$\therefore \angle DCA = \angle DAC$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle CAB + \angle B = 90^\circ$$

$$\because \angle EAC = \angle B$$

$$\therefore \angle EAC + \angle DAC = 90^\circ \text{ 即 } \angle EAD = 90^\circ$$

$$\text{又 } EC \perp CD$$

$$\therefore \angle ECD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EAD = \angle ECD$$

$$\therefore Rt\triangle AED \cong Rt\triangle CED$$

$$\therefore S_{\triangle AED} = S_{\triangle CED}$$

$$\because DA = DC, EA = EC$$

$$\therefore ED \perp AC$$

$$\text{又 } \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore BC \perp AC$$

$$\therefore ED \parallel BC$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B$$

$$\text{又 } \because \angle EAD = \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle BCA$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{BC}\right)^2$$

$$\because \tan \angle BAC = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{CB}{CA} = \frac{3}{2}$$

$$\text{设 } CB = 3k, \text{ 则 } AC = 2k$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{13}k$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{13}}{2}k$$

$$\because S_{\triangle AED} = S_{\triangle CED}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{BC}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\sqrt{13}}{2}k}{3k}\right)^2 = \frac{13}{36}$$

$$\text{故答案为: } \frac{13}{36}$$

【点睛】 本题考查了解直角三角形，三角形全等的性质与判定，相似三角形的性质与判定，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，垂直平分线的性质与判定，正切的定义，证明 $S_{\triangle AED} = S_{\triangle CED}$ 是解题的关键.

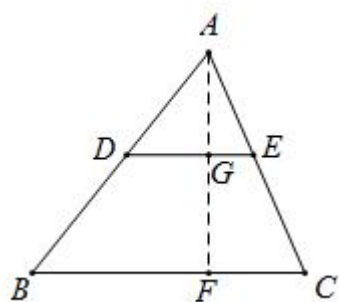
17. 定义: 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 和点 E 分别在 AB 边、 AC 边上, 且 $DE \parallel BC$, 点 D 、点 E 之间距离与直线 DE 与直线 BC 间的距离之比称为 DE 关于 BC 的横纵比. 已知, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 4$, BC 上的高长为 3 , DE 关于 BC 的横纵比为 $2:3$, 则 $DE =$ _____.

【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 根据题意作出图形, 由平行可得相似, 列出比例式, 设 $DE = 2a$, 则 $GF = 3a$, 代入数值求解即可.

【详解】 如图, $AF \perp BC$ 于 F , 交 DE 于点 G ,



$\because DE \parallel BC$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$, $AG \perp DE$

$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AG}{AF}$, $AF = 3$

$\because DE$ 关于 BC 的横纵比为 $2:3$, $BC = 4$

$\therefore \frac{DE}{GF} = \frac{2}{3}$

设 $DE = 2a$, 则 $GF = 3a$

$\therefore AG = AF - GF = 3 - 3a$

$\therefore \frac{2a}{4} = \frac{3 - 3a}{3}$

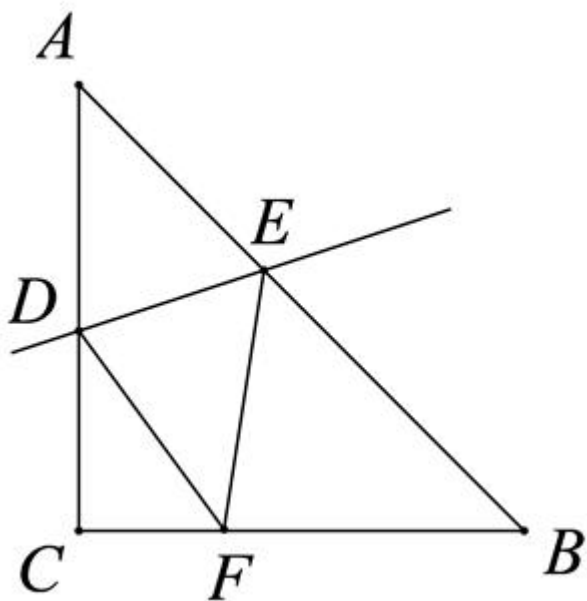
解得 $a = \frac{2}{3}$

$\therefore DE = \frac{4}{3}$

故答案为: $\frac{4}{3}$

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定, 理解横纵比的定义是解题的关键.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = 3$, 点 D 、 E 分别在 AC 边和 AB 边上, 沿着直线 DE 翻折 $\triangle ADE$, 点 A 落在 BC 边上, 记为点 F , 如果 $CF = 1$, 则 $BE =$ _____.

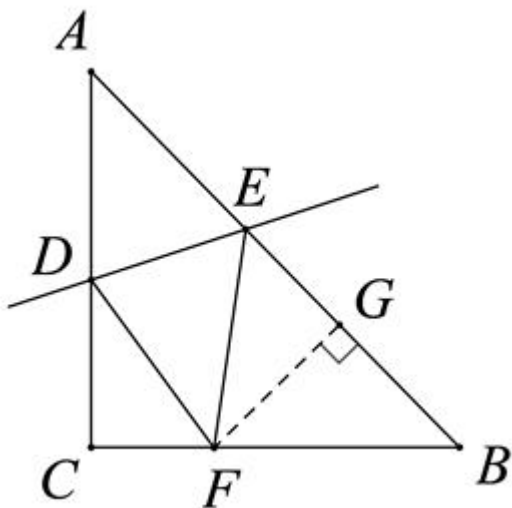


【答案】 $\frac{7}{4}\sqrt{2}$ 或 $\frac{7\sqrt{2}}{4}$

【解析】

【分析】 过点 F 作 $FG \perp AB$ 于点 G , 设 $BE = x$, 则 $AE = 3\sqrt{2} - x$, $EG = BE - BG = x - \sqrt{2}$, 解直角三角形 $\triangle EGF$ 即可求得 x , 即 BE 的值

【详解】 解: 如图, 过点 F 作 $FG \perp AB$ 于点 G



∵ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = 3$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 3\sqrt{2}, \quad \tan B = \frac{AC}{BC} = 1$$

$$\therefore \angle A = \angle B = 45^\circ$$

∴ $\triangle FGB$ 是等腰直角三角形

$$\therefore BG = FG = FB \cdot \sin B = \sqrt{2}$$

$$\text{设 } BE = x, \text{ 则 } AE = 3\sqrt{2} - x, \quad EG = BE - BG = x - \sqrt{2}$$

∵ 沿着直线 DE 翻折 $\triangle ADE$, 点 A 落在 BC 边上, 记为点 F ,

$$\therefore EA = EF = 3\sqrt{2} - x$$

$$\text{在 } Rt\triangle EFG \text{ 中, } EF^2 = EG^2 + FG^2$$

$$\text{即 } (3\sqrt{2} - x)^2 = (x - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$\text{解得 } x = \frac{7}{4}\sqrt{2}$$

$$\text{故答案为: } \frac{7}{4}\sqrt{2}$$

【点睛】 本题考查了勾股定理, 轴对称的性质, 解直角三角形, 根据题意构造直角三角形是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\cot 30^\circ - \frac{2\sin 60^\circ - \tan 45^\circ}{\sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ}$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 根据特殊角的三角函数值进行混合运算即可

【详解】 $\cot 30^\circ - \frac{2\sin 60^\circ - \tan 45^\circ}{\sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ}$

$$= \sqrt{3} - \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3} - 1}{1}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1$$

$$= 1$$

【点睛】 本题考查了特殊角的三角函数值的混合运算，牢记特殊角的三角函数值是解题的关键.

20. 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(0, 3), B(-1, 0)$.

(1) 求抛物线的表达式及其顶点坐标;

(2) 填空: 如果将该抛物线平移, 使它的顶点移到点 A 的位置, 那么其平移的过程是_____平移后的抛物线表达式是_____.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$; 顶点坐标为 (1, 2); (2) 向左平移 1 个单位, 向上平移 1 个单位; $y = -x^2 + 3$.

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法求抛物线解析式即可;

(2) 利用顶点式写出平移过程和所得新抛物线的表达式即可.

【详解】 解: (1) 把 $A(0, 3), B(-1, 0)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 得,

$$\begin{cases} c = 3 \\ -1 - b + c = 0 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$.

所以这个二次函数的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$;

将 $y = -x^2 + 2x + 3$ 化成顶点式为 $y = -(x-1)^2 + 2$, 顶点坐标为 $(1, 2)$;

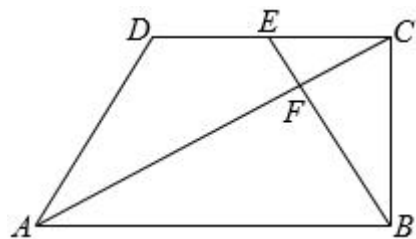
(2) 由于 $y = -x^2 + 2x + 3$ 的顶点坐标为 $(1, 2)$, 将该抛物线平移, 使它的顶点移到点 $A(0, 3)$ 的位置, 那么其平移的过程是向左平移 1 个单位, 向上平移 1 个单位;

所以新抛物线的解析式为 $y = -(x-0)^2 + 3$ 即 $y = -x^2 + 3$,

故答案为: 向左平移 1 个单位, 向上平移 1 个单位; $y = -x^2 + 3$.

【点睛】本题考查了二次函数图象与几何变换: 由于抛物线平移后的形状不变, 故 a 不变, 所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法: 一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标, 利用待定系数法求出解析式; 二是只考虑平移后的顶点坐标, 即可求出解析式.

21. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $AB:CD = 3:2$, 点 E 是边 CD 的中点, 联结 BE 交对角线 AC 于点 F , 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$.



(1) 用 $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AF}$;

(2) 求作 $\overrightarrow{BF}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的分向量.

(不要求写作法, 但要保留作图痕迹, 并指出所作图中表示结论的分向量)

【答案】(1) $\overrightarrow{AC} = \vec{n} + \frac{2}{3}\vec{m}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\vec{n} + \frac{1}{2}\vec{m}$; (2) 见详解.

【解析】

【分析】(1) 利用向量的表示方法, 表示出 $\overrightarrow{DC}$, 再由 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ 即可求出 $\overrightarrow{AC}$, 利用平行线段成比例, 求出 $AF = \frac{3}{4}AC$, 即可求出 $\overrightarrow{AF}$; (2) 利用向量中分向量的画法画图即可.

【详解】解: (1) $\because AB:CD = 3:2$, $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$,

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\vec{m},$$

$$\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{n},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \vec{n} + \frac{2}{3}\vec{m},$$

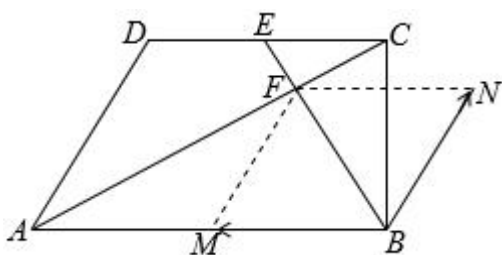
$$\because AB \parallel CD, AB:CD = 3:2, DE=EC,$$

$$\therefore AB:EC = AF:CF = 3:1,$$

$$\therefore AF = \frac{3}{4}AC$$

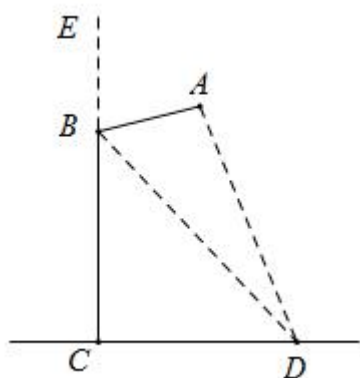
$$\therefore \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\left(\vec{n} + \frac{2}{3}\vec{m}\right) = \frac{3}{4}\vec{n} + \frac{1}{2}\vec{m}.$$

(2) $\overrightarrow{BF}$ 在 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ 方向上的分向量如图所示, $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}$ 即为所求;



【点睛】本题主要考查图形中向量的表示方法, 以及分向量在平行四边形中的画法, 熟练掌握向量的基本应用是解题的关键, 初中的向量问题只在上海地区出现, 其他地方在高中才会学到, 需要注意.

22. 如图, 某种路灯灯柱 BC 垂直于地面, 与灯杆 AB 相连. 已知直线 AB 与直线 BC 的夹角是 76° . 在地面点 D 处测得点 A 的仰角是 53° , 点 B 仰角是 45° , 点 A 与点 D 之间的距离为 3.5 米.



求: (1) 点 A 到地面的距离;

(2) AB 的长度. (精确到 0.1 米)

(参考数据: $\sin 53^\circ \approx 0.8, \cos 53^\circ \approx 0.6, \sin 76^\circ \approx 0.97, \cos 76^\circ \approx 0.24$)

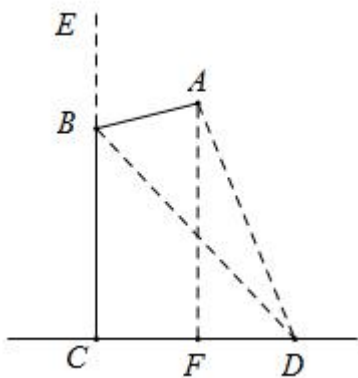
【答案】(1) 2.8 米; (2) AB 的长度为 0.6 米

【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AF \perp CD$ 交于点 F ，则 $\angle AFD = 90^\circ$ ，在 $Rt\triangle AFD$ 中，用三角函数即可得；

(2) 过点 A 作 $AH \perp EC$ 交于点 H ，根据 $\angle AFC = \angle FCH = \angle CHA = 90^\circ$ ，证明四边形 $AFCH$ 是矩形，则 $AH = FC$ ， $AF = HC$ ，设 $BC = x$ ，则 $HB = (2.8 - x)$ 米，根据三角形内角和定理得 $\angle DBC = \angle BDC = 45^\circ$ ，即 $BC = DC = x$ ，根据三角函数得 $DF = 2.1$ 米， $FC = AH = (x - 2.1)$ 米，在 $Rt\triangle AHB$ 中，根据三角函数得 $\tan \angle ABH \approx 4.04$ ，则 $AH \approx 4.04BH$ ，即可得 $x \approx 2.66$ ，则 $BH \approx 0.14$ ，根据三角函数即可得 $AB \approx 0.6$ 米。

【详解】解：(1) 过点 A 作 $AF \perp CD$ 交于点 F ，

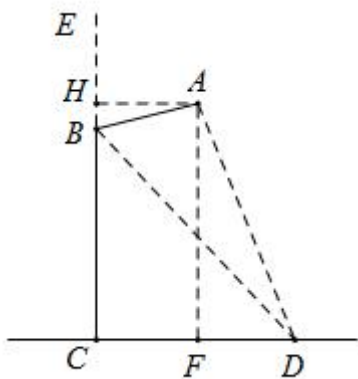


则 $\angle AFD = 90^\circ$ ，

在 $Rt\triangle AFD$ 中， $AF = AD \sin 53^\circ = 3.5 \times 0.8 \approx 2.8$ (米)，

即点 A 到地面的距离为 2.8 米；

(2) 过点 A 作 $AH \perp EC$ 交于点 H ，



在四边形 $AFCH$ 中， $\angle AFC = \angle FCH = \angle CHA = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $AFCH$ 是矩形，

$\therefore AH = FC$ ， $AF = HC$ ，

设 $BC = x$ ，则 $HB = (2.8 - x)$ 米，

$\because \angle DBC = 45^\circ$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle DCB - \angle BCD = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle BDC = 45^\circ,$$

$$\therefore BC = DC = x \text{ (米)},$$

$$\therefore DF = AD \cos \angle ADF = 3.5 \times 0.6 = 2.1 \text{ (米)},$$

$$\therefore FC = AH = (x - 2.1) \text{ 米},$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle AHB \text{ 中, } \tan \angle ABH = \frac{AH}{BH} = \frac{\sin \angle ABF}{\cos \angle ABF} \approx \frac{0.97}{0.24} \approx 4.04,$$

$$\therefore AH \approx 4.04BH,$$

$$\therefore x - 2.1 \approx 4.04 \times (2.8 - x)$$

$$x - 2.1 \approx 11.312 - 4.04x$$

$$5.04x \approx 13.412$$

$$x \approx 2.66,$$

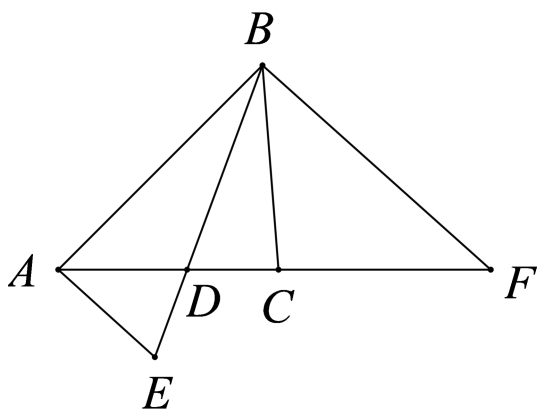
$$\therefore BH = 2.8 - 2.66 \approx 0.14 \text{ (米)},$$

$$\therefore \cos \angle ABH = \cos \angle 76^\circ = \frac{BH}{AB} \approx 0.24,$$

$$\therefore AB \approx \frac{BH}{\cos \angle 76^\circ} \approx \frac{BH}{0.24} \approx \frac{0.14}{0.24} \approx 0.6 \text{ (米)}.$$

【点睛】 本题考查了三角函数，矩形的判定与性质，解题的关键是掌握并灵活运用这些知识点.

23. 如图，线段 BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 E 、点 F 分别在线段 BD 、 AC 的延长线上，联结 AE 、 BF ，且 $AB \cdot BD = BC \cdot BE$.



(1) 求证: $AD = AE$;

(2) 如果 $BF = DF$ ，求证: $AF \cdot CD = AE \cdot DF$.

【答案】 (1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据 $AB \cdot BD = BC \cdot BE$ 可得 $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BD}$ ，根据线段 BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，可得 $\angle ABE = \angle CBD$ ，即可证明 $\triangle ABE \sim \triangle CBD$ ，进而可得 $\angle AEB = \angle CDB$ ，根据对顶角相等可得 $\angle ADE = \angle CDB$ ，等量代换可得 $\angle ADE = \angle AED$ ，根据等边对等角即可证明 $AD = AE$

(2) 由 $BF = DF$ ，可得 $\angle FDB = \angle FBD$ ，证明 $\triangle FBC \sim \triangle FAB$ ，可得 $AF \cdot CF = FB^2$

根据 $DF = AF - AD$ ， $DC = DF - FC$ ，代入进行变形即可证明 $AF \cdot CD = AE \cdot DF$

【详解】证明：(1) $\because AB \cdot BD = BC \cdot BE$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BD}$$

$\because$ 线段 BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$$\therefore \angle ABE = \angle CBD$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CBD$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CDB$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CDB$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED$$

$$\therefore AD = AE$$

(2) $\because BF = DF$

$$\therefore \angle FDB = \angle FBD$$

设 $\angle DBA = \angle DBC = \alpha$ ， $\angle DAB = \theta$

则 $\angle BDF = \alpha + \theta = \angle FBD$

$$\therefore \angle CBF = \angle FBD - \angle DBC = \alpha + \theta - \alpha = \theta = \angle BAD$$

即 $\angle CBF = \angle BAF$

又 $\angle F = \angle F$

$$\therefore \triangle FBC \sim \triangle FAB$$

$$\therefore \frac{FB}{FA} = \frac{FC}{FB} \text{ 即 } AF \cdot CF = FB^2$$

又 $BF = DF$

$$\therefore DF^2 = AC \cdot AF$$

$\because DF = AF - AD$ ，

$$\therefore (AF - AD) \cdot DF = AF \cdot CF$$

即 $AF \cdot DF - AD \cdot DF = AF \cdot CF$

$$\therefore AF \cdot DF - AF \cdot CF = AD \cdot DF$$

$$\text{即 } AF \cdot (DF - CF) = AD \cdot DF$$

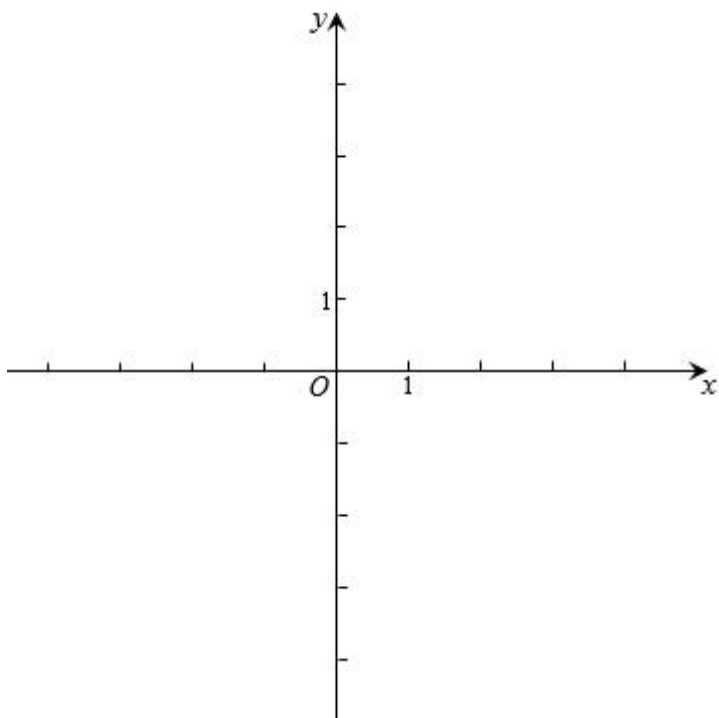
$$\therefore AF \cdot CD = AD \cdot DF$$

$$\text{又 } AD = AE$$

$$\therefore AF \cdot CD = AE \cdot DF$$

【点睛】本题考查了相似三角形的性质与判定，对于第二问恒等式的证明，不能直接找到对应的相似三角形，解题的关键是要理清各相等线段之间的关系。

24. 抛物线 $y = ax^2 + 2ax + c$ 与 x 轴相交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 左侧)，与 y 轴交于点 $C(0, 3)$ ，其顶点 D 的纵坐标为 4.



- (1) 求该抛物线的表达式；
- (2) 求 $\angle ACB$ 的正切值；
- (3) 点 F 在线段 CB 的延长线上，且 $\angle AFC = \angle DAB$ ，求 CF 的长.

【答案】(1) 抛物线的表达式为 $y = -x^2 - 2x + 3$ ；(2) $\tan \angle ACB = 2$ ；(3) $CF = \frac{6\sqrt{10}}{5}$

【解析】

【分析】(1) 点 $C(0, 3)$ 代入 $y = ax^2 + 2ax + c$ 即可得出 c 的值，再根据点 D 的纵坐标得出 a 的值，由此得出点 D 的坐标；

(2) 过点 B 作 $BE \perp AC$ ，求出交点坐标，得出 $A(-3,0)$ ， $B(1,0)$ ；由面积公式列出方程计算出 BE 、 EC 的长度，即可得出 $\angle ACB$ 的正切值；

(3) 过点 D 作 $DM \perp x$ 轴，过点 A 作 $AN \perp BC$ ，得出 $\tan \angle DAB$ ；证明 $\triangle OBC \sim \triangle NBA$ ，根据相似比得出 NB 、 NA 的长度，根据线段加减推论出 CF 的长度。

【详解】解：(1) 把点 $C(0,3)$ 代入 $y = ax^2 + 2ax + c$ 得： $c = 3$

$$\therefore y = ax^2 + 2ax + 3$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{2a}{2a} = -1$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } \therefore y = a - 2a = -a + 3$$

$\therefore$ 顶点 D 的纵坐标为 4.

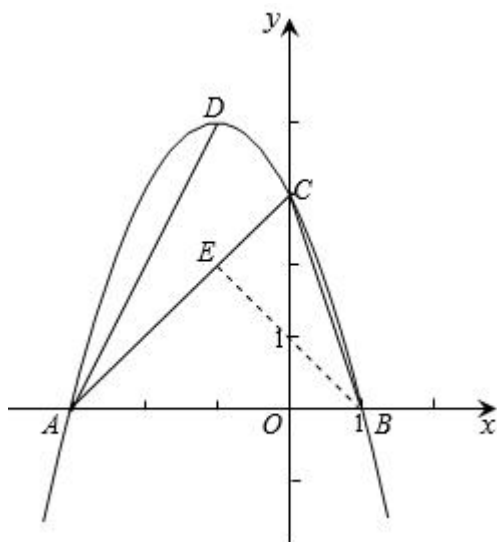
$$\therefore -a + 3 = 4$$

$$a = -1$$

$$\therefore D(-1,4)$$

故抛物线的表达式为 $y = -x^2 - 2x + 3$

(2) 过点 B 作 $BE \perp AC$ 交于 E 点，



$$\text{令 } y = -x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\text{则 } x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\therefore x_1 = -3 \quad x_2 = 1$$

故 $A(-3,0)$, $B(1,0)$

$$\therefore AB = 1 - (-3) = 4 \quad OC = 3$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

$$\therefore A(-3,0) \quad C(0,3)$$

$$\therefore AC = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times BE$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times BE = 6$$

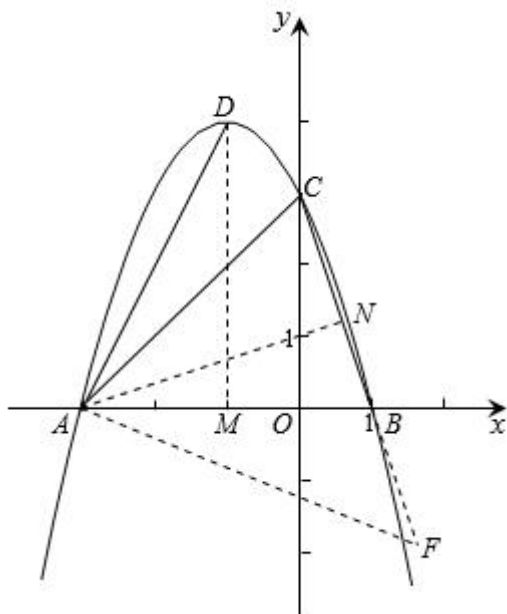
$$\therefore BE = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore BC^2 = OC^2 + OB^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$\therefore EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{10 - 8} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{BE}{EC} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

(3) 过点 D 作 $DM \perp x$ 轴, 过点 A 作 $AN \perp BC$,



$$\therefore D(-1,4) \quad \therefore M(-1,0)$$

$$\therefore A(-3,0)$$

$$\therefore AM = 2 \quad DM = 4$$

$$\therefore \tan \angle DAB = \frac{DM}{AM} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\because AN \perp BC$$

$$\therefore \angle ANB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ANB = \angle BOC$$

$$\because \angle ABN = \angle OBC$$

$$\therefore \triangle OBC \sim \triangle NBA$$

$$\therefore \frac{OB}{NB} = \frac{OC}{NC} = \frac{BC}{BA}$$

$$\therefore \frac{1}{NB} = \frac{3}{NC} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$NB = \frac{2\sqrt{10}}{5} \quad NA = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

$$\because \angle DAB = \angle AFC$$

$$\therefore \tan \angle DAB = \tan \angle AFC = 2$$

$$\therefore \tan \angle AFC = \frac{AN}{NF} = 2$$

$$\therefore \frac{\frac{6\sqrt{10}}{5}}{NF} = 2$$

$$NF = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

当点 F 在 CB 延长线上, F 只能在第四象限, 故 $CF = NF + CN$

$$\because BC = \sqrt{10}NB = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

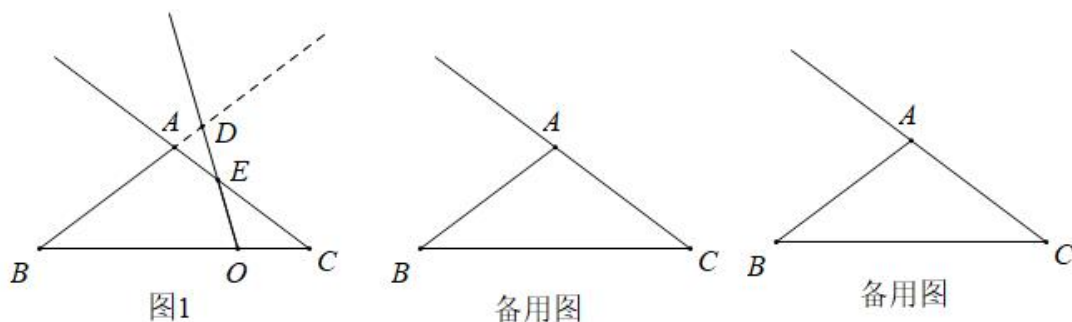
$$\because CN = BC - NB = \sqrt{10} - \frac{2\sqrt{10}}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\therefore CF = \frac{3\sqrt{10}}{5} + \frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

【点睛】此题是二次函数综合题, 主要考查了待定系数法, 勾股定理逆定理, 锐角三角函数, 相似三角形的性质, 解题关键是确定出抛物线解析式, 是一道中等难度的中考常考题.

25. 已知, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5, BC = 8$, 点 E 是射线 CA 上的动点, 点 O 是边 BC 上的

动点，且 $OC = OE$ ，射线 OE 交射线 BA 于点 D 。



(1) 如图 1，如果 $OC = 2$ ，求 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ODB}}$ 的值；

(2) 联结 AO ，如果 $\triangle AEO$ 是以 AE 为腰的等腰三角形，求线段 OC 的长；

(3) 当点 E 在边 AC 上时，联结 BE 、 CD ， $\angle DBE = \angle CDO$ ，求线段 OC 的长。

【答案】 (1) 0.09, (2) $\frac{25}{13}$, (3) $8 - \sqrt{39}$

【解析】

【分析】 (1) 证 $\triangle ABC \sim \triangle OEC$ 和 $\triangle OBD \sim \triangle AED$ ，求出相似比，利用相似三角形的性质可求；

(2) 设 $AE = OE = OC = x$ ，根据 (1) 中相似列出比例式即可求解；

(3) 证明 A 、 B 、 O 、 E 四点共圆，得出 $AO \parallel DC$ ，设 $OC = x$ ， $OB = 8 - x$ ，利用相似列出比例式求解即可。

【详解】解：(1) $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because OC = OE,$$

$$\therefore \angle OEC = \angle C,$$

$$\therefore \angle B = \angle OEC,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle OEC,$$

$$\therefore \frac{AC}{OC} = \frac{BC}{CE},$$

$$\therefore \frac{5}{2} = \frac{8}{CE},$$

$$\therefore CE = 3.2,$$

$$\therefore AE = 1.8;$$

$$\because \angle AED = \angle OEC = \angle B, \quad \angle D = \angle D,$$

$$\therefore \triangle OBD \sim \triangle AED,$$

$$\therefore \frac{AE}{OB} = \frac{1.8}{6} = 0.3,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ODB}} = 0.3^2 = 0.09.$$

(2) $\because \triangle AEO$ 是以 AE 为腰的等腰三角形,

$$\therefore AE = OE,$$

$$\because OC = OE,$$

$$\therefore \text{设 } AE = OE = OC = x,$$

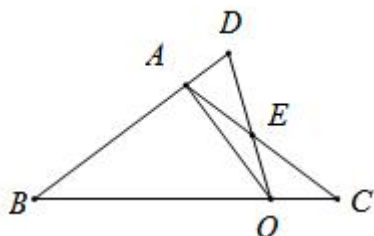
由 (1) 得, $\triangle ABC \sim \triangle OEC$,

$$\therefore \frac{AC}{OC} = \frac{BC}{CE},$$

$$\therefore \frac{5}{x} = \frac{8}{5-x},$$

解得, $x = \frac{25}{13}$, 经检验, $x = \frac{25}{13}$ 是原方程的解;

则 OC 的长是为 $\frac{25}{13}$.



(3) 由 (1) 得, $\angle B = \angle OEC$,

$$\because \angle OEC + \angle OEA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle OEA = 180^\circ,$$

$\therefore A, B, O, E$ 四点共圆,

$$\therefore \angle DBE = \angle AOD,$$

$$\because \angle DBE = \angle CDO,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle CDO,$$

$$\therefore AO \parallel DC,$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle CDE, \triangle ABO \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \frac{AO}{DC} = \frac{BO}{CB}, \frac{AO}{DC} = \frac{AE}{CE},$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{BO}{CB},$$

设 $OC=x$, $OB=8-x$,

$$\because \triangle ABC \sim \triangle OEC,$$

$$\therefore \frac{AC}{OC} = \frac{BC}{CE},$$

$$\therefore \frac{5}{x} = \frac{8}{CE},$$

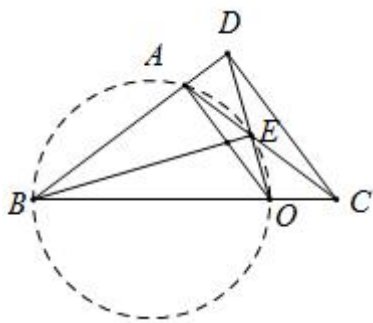
解得, $CE=1.6x$,

$$\therefore AE=5-1.6x$$

$$\therefore \frac{5-1.6x}{1.6x} = \frac{8-x}{8},$$

解得, $x_1=8-\sqrt{39}$, $x_2=8+\sqrt{39}$ (舍去),

则 OC 的长是为 $8-\sqrt{39}$.



【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质，圆内接四边形，解题关键是熟练运用相似三角形的判定和性质进行证明推理和计算.