

2022 年上海市金山区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ，那么下列等式中成立的是 ()

- A. $2a = 3b$ B. $\frac{a+1}{b+1} = \frac{3}{4}$ C. $\frac{a+b}{b} = \frac{5}{3}$ D. $\frac{a-b}{b} = \frac{1}{3}$.

【答案】C

【解析】

【分析】比例的性质为两内项之积等于两外项之积，据此可进行解答.

【详解】解：∵ $a:b=2:3$ 的两内项是 b 、2，两外项是 a 、3，

$$\therefore 3a=2b,$$

A: 由以上解释易知 A 选项错误，不符题意；

B: $(a+1) \times 3 = (b+1) \times 4$ ，即 $3a = 4b + 1$ ，故错误，不符题意；

C: $3 \times (a+b) = 5b$ ，即 $3a = 2b$ ，故正确，符合题意；

D: $3(a-b) = b$ ，即 $3a=4b$ ，故错误，不符题意；

故选 C.

【点睛】本题考查了比例的基本性质，掌握基本性质是解题关键.

2. 在比例尺是 1:200000 的地图上，两地的距离是 6cm，那么这两地的实际距离为 ()

- A. 1.2km B. 12km C. 120km D. 1200km.

【答案】B

【解析】

【分析】根据比例尺 = 图上距离：实际距离. 根据比例尺关系即可直接得出实际的距离.

【详解】解：根据比例尺 = 图上距离：实际距离，

得：两地的实际距离为 $6 \times 200000 = 1200000$ (cm) = 12 (km).

故选：B.

【点睛】本题考查了比例线段，解题关键是能够根据比例尺正确进行计算，注意单位的转换.

3. 如果点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP < BP$ ，那么 $\frac{AP}{BP}$ 的值等于 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2} + 1$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1$ C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据黄金分割点的定义，知 BP 是较长线段；则 $\frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【详解】解：由于 P 为线段 AB 的黄金分割点，
且 $AP < BP$ ，

$$\text{则 } \frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

故选：D.

【点睛】本题考查了黄金分割点，解题的关键是理解黄金分割点的概念，熟记黄金比的值进行计算.

4. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = a$ ， $AB = c$ ，那么 $\frac{a}{c}$ 的值等于（ ）

A. $\sin A$

B. $\cos A$

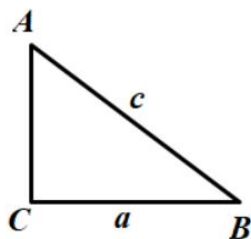
C. $\tan A$

D. $\cot A$

【答案】A

【解析】

【分析】根据三角函数的比值即可得出答案.



【详解】

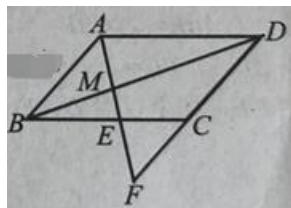
如图， $\sin A = \frac{a}{c}$.

故选：A.

【点睛】本题考查锐角三角函数， $\sin A = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$ ， $\cos A = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$ ， $\tan A = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}}$ ， $\cot A = \frac{\text{邻边}}{\text{对边}}$ ，掌握

三角函数的比值是解题的关键.

5. 如图， M 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点， AM 的延长线交 BC 于点 E ，交 DC 的延长线于点 F ，图中相似三角形有（ ）



A. 6 对

B. 5 对

C. 4 对

D. 3 对

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质得到 $AD \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ ， $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ ，根据相似三角形的判定定理解答即可。

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ ， $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AMD \sim \triangle EMB, \triangle EFC \sim \triangle AFD$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ ，

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle FEC, \triangle AMB \sim \triangle FMD$

$\therefore \triangle AFD \sim \triangle AEB$ ，

则图中相似三角形有 6 对，它们分别是： $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ ，

$\triangle AMD \sim \triangle EMB, \triangle EFC \sim \triangle AFD, \triangle AFD \sim \triangle AEB$ ， $\triangle ABE \sim \triangle FEC, \triangle AMB \sim \triangle FMD$ ，

故选：A.

【点睛】本题考查的是相似三角形的判定、平行四边形的性质，掌握相似三角形的判定定理是解题的关键。

6. 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{AG}$ 关于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的分解式是（ ）

- A. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ B. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ C. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ D. $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

【答案】C

【解析】

【分析】连接 AG 并延长，交 BC 于点 D 。由重心的性质可知， D 为 BC 中点，且 $\frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$ 。再根据题意可

求出 $AD = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ，即可由 $AG = \frac{2}{3}AD$ 求出结果。

【详解】如图，连接 AG 并延长，交 BC 于点 D 。

$\because$ 点 G 为重心，

$\therefore$ 点 D 为 BC 中点。

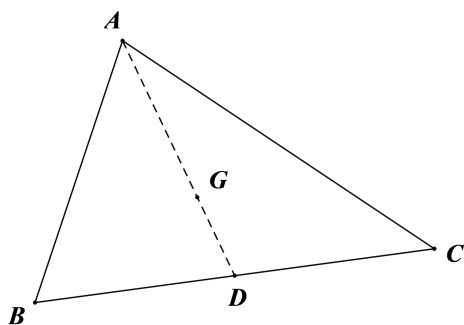
又 $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，

$\therefore 2AD = AB + AC = \vec{a} + \vec{b}$ ，即 $AD = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ，

$\therefore$ 重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2:1，

$\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ 。



故选：C.

【点睛】本题考查三角形重心的性质，向量的线性运算．掌握重心的性质是解答本题的关键．

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请直接将结果填入答题纸的相应位置】

7. 计算： $\frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b}) + 2\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

【解析】

【分析】先去括号，然后合并同类项即可．

【详解】解： $\frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b}) + 2\vec{b}$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2} \times 2\vec{b} + 2\vec{b}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

故答案为： $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

【点睛】本题考查了向量的线性运算．解题的关键在于理解向量的数乘与加减运算．

8. 如果两个相似三角形的面积比为 1:4，其中较大三角形的周长为 18，那么较小三角形的周长是_____.

【答案】 9

【解析】

【分析】根据面积之比得出相似比，然后利用周长之比等于相似比即可得出答案．

【详解】 $\because$ 两个相似三角形的面积比为 1:4，

$\therefore$ 两个相似三角形的相似比为 1:2，

$\therefore$ 两个相似三角形的周长也比为 1:2，

$\therefore$ 较大的三角形的周长为 18，

$\therefore$ 较小的三角形的周长为 $18 \times \frac{1}{2} = 9$.

故答案为：9.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质，掌握相似三角形的性质是解题的关键.

9. 抛物线 $y = ax^2$ 经过点 $(1, -2)$ ，那么这个抛物线的开口向_____.

【答案】 下

【解析】

【分析】 把点 $(1, -2)$ 代入 $y = ax^2$ ，可得 $a = -2$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because$ 抛物线 $y = ax^2$ 经过点 $(1, -2)$ ，

$$\therefore a = -2,$$

$$\therefore -2 < 0,$$

$\therefore$ 这个抛物线的开口向下.

故答案为：下

【点睛】 本题主要考查了二次函数的图象和性质，熟练掌握二次函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图象和性质是解题的关键.

10. 抛物线 $y = x^2 + 2x$ 的对称轴是_____.

【答案】 直线 $x = -1$.

【解析】

【详解】 试题分析： 先把一般式配成顶点式，根据二次函数的性质即可得到抛物线的对称轴.

$$y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1,$$

抛物线的对称轴为直线 $x = -1$.

故答案为直线 $x = -1$.

考点： 二次函数的性质.

11. 抛物线 $y = 3 - x^2$ 位于 y 轴左侧的部分是_____的. (填“上升”或“下降”)

【答案】 上升

【解析】

【分析】 根据二次函数图象的性质解答即可.

【详解】 解： $\because$ 二次项系数 $-1 < 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向下,

$\therefore$ 对称轴是直线 $y = 0$,

$\therefore$ 抛物线 $y = 3 - x^2$ 位于 y 轴左侧的部分是上升的.

故答案为：上升.

【点睛】 本题考查了二次函数图象的性质，熟练掌握二次函数 $y = ax^2 + k$ 的性质是解答本题的关键. 对于二次函数 $y = ax^2 + k (a, k \text{ 为常数}, a \neq 0)$ ，当 $a > 0$ 时，抛物线开口向上，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而减小，在

对称轴的右侧 y 随 x 的增大而增大；当 $a < 0$ 时，抛物线开口向下，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而增大，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而减小.

12. 在直角坐标平面内有一点 $A(1, 2)$ ，点 A 与原点 O 的连线与 x 轴的正半轴的夹角为 α ，那么 $\cot \alpha$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ ##0.5

【解析】

【分析】 如图所示，过点 A 作 $AB \perp x$ 轴于 B ，根据 $\cot \alpha = \frac{OB}{AB}$ 进行求解即可.

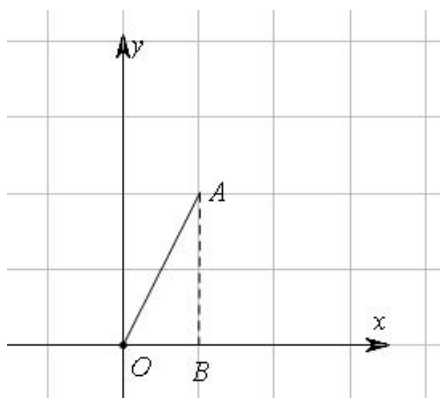
【详解】 解： 如图所示，过点 A 作 $AB \perp x$ 轴于 B ，

$\because A$ 点坐标为 $(1, 2)$ ，

$\therefore OB=1, AB=2$ ，

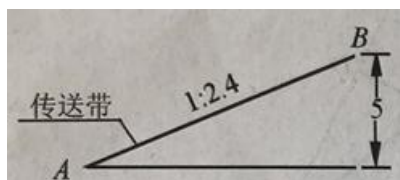
$\therefore \cot \alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{1}{2}$ ，

故答案为： $\frac{1}{2}$.



【点睛】 本题主要考查了坐标与图形，三角函数，解题的关键在于能够根据题意得到 $\cot \alpha = \frac{OB}{AB}$.

13. 如图，某传送带与地面所成斜坡的坡度为 $i = 1:2.4$ ，它把物品从地面 A 送到离地面 5 米高的 B 处，则物体从 A 到 B 所经过的路程为_____.



【答案】 13m##13 米

【解析】

【分析】 根据坡度的概念求出 AF ，然后根据勾股定理计算即可.

【详解】 解： 如图，过 B 作 $BF \perp AF$ 于 F ，



由题意得, $BF = 5$ 米,

$\therefore$ 斜坡的坡度 $i = 1 : 2.4$,

$$\therefore \frac{BF}{AF} = \frac{1}{2.4}, \text{ 即 } \frac{5}{AF} = \frac{1}{2.4},$$

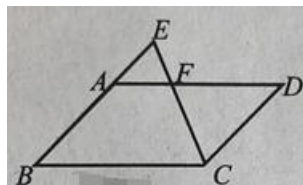
解得: $AF = 12$ (米),

由勾股定理得, $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (米).

故答案是: 13 米.

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形、坡比的计算、勾股定理等知识点, 将坡度问题转化为解直角三角形的问题成为解答本题的关键.

14. 如图, E 是 $\square ABCD$ 的边 BA 延长线上一点, CE 与 AD 相交于点 F , $AE = 1$, $AB = 2$, $BC = 3$, 那么 $AF =$ _____.



【答案】 1

【解析】

【分析】 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 得到 $AD \parallel BC$, 推出 $\triangle EAF \sim \triangle EBC$, 然后根据相似三角形的性质列比例式, 即可得到结论.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle EAF \sim \triangle EBC,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BC},$$

$$\because AE = 1, AB = 2, BC = 3,$$

$$\therefore BE = 3,$$

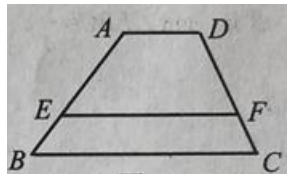
$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{AF}{3},$$

$$\therefore AF = 1.$$

故答案为：1.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质，平行四边形的性质，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

15. 如图， $AD \parallel EF \parallel BC$ ， $AE = 2BE$ ， $AD = 2$ ， $EF = 4$ ，那么 $BC = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】5

【解析】

【分析】如图所示，过点 A 作 $AH \parallel CD$ 交 EF 于 G ，交 BC 于 H ，先证明四边形 $ADCH$ 是平行四边形，得到 $CH=AD=2$ ，同理得到 $GF=AD=2$ ，再证明 $\triangle AEG \sim \triangle ABH$ ，得到 $\frac{AE}{AB} = \frac{EG}{BH}$ ，由 $AE=2BE$ ，得到

$AB=AE+BE=3BE$ ，则 $\frac{2}{3} = \frac{2}{BH}$ ，由此求解即可.

【详解】解：如图所示，过点 A 作 $AH \parallel CD$ 交 EF 于 G ，交 BC 于 H ，

$\because AD \parallel CH$ ， $AH \parallel CD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ADCH$ 是平行四边形，

$\therefore CH=AD=2$ ，

同理可证四边形 $ADFG$ 是平行四边形，

$\therefore GF=AD=2$ ，

$\therefore EG=EF-GF=2$ ，

$\because EF \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ABH$ ，

$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{EG}{BH}$ ，

$\because AE=2BE$ ，

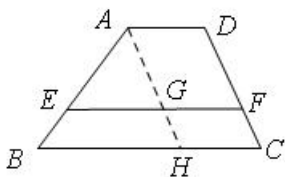
$\therefore AB=AE+BE=3BE$ ，

$\therefore \frac{2}{3} = \frac{2}{BH}$ ，

$\therefore BH=3$ ，

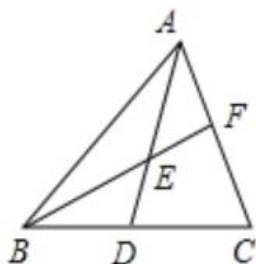
$\therefore BC=BH+CH=5$ ，

故答案为：5.



【点睛】 本题主要考查了相似三角形的性质与判定，平行四边形的性质与判定，熟知相关知识是解题的关键.

16. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, E 是 AD 的中点, BE 的延长线交 AC 于点 F , 那么 $\frac{AF}{CF} = \underline{\hspace{2cm}}$.

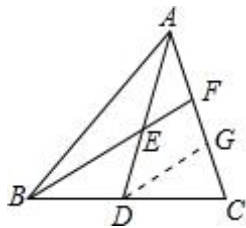


【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 根据题意先过 D 作 BF 的平行线, 交 AC 边于 G , 得出 $DG \parallel BF$, 再根据 D 为 BC 中点可得出 $\triangle CDG \sim \triangle CBF$, 即 $\frac{CG}{CF} = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{2}$, $CG = \frac{1}{2} FC = FG$; 同理得出 $\triangle AEF \sim \triangle ADG$, $AF = \frac{1}{2} AG = FG$, 从而得出 $AF = FG = GC$, 即可得出 $\frac{AF}{CF}$ 的值.

【详解】 解: 过 D 作 BF 的平行线, 交 AC 边于 G , 如下图所示:



$\because D$ 为 BC 中点, $DG \parallel BF$,

$\therefore \angle CGD = \angle CFB$,

又 $\because \angle C = \angle C$,

$\therefore \triangle CDG \sim \triangle CBF$,

$\therefore \frac{CG}{CF} = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{2}$, 即: $CG = \frac{1}{2} CF = FG$,

又 E 为 AD 的中点, BE 的延长线交 AC 于 F , $DG \parallel BF$,

同理可得: $\triangle AEF \sim \triangle ADG$,

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AG} = \frac{1}{2}, \text{ 即: } AF = \frac{1}{2} AG = FG,$$

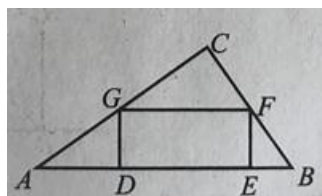
$$\therefore AF = FG = GC,$$

$$\therefore \frac{AF}{CF} = \frac{AF}{FG + GC} = \frac{1}{2}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点睛】 本题考查平行线分线段成比例, 用到的知识点是相似三角形的判定与性质, 解题的关键在于找出条件判断两个三角形相似, 再运用相似三角形的性质求解.

17. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 矩形 $DEFG$ 的边 DE 在边 AB 上, 顶点 F 、 G 分别在边 BC 、 AC 上, 如果 $\triangle BEF$ 、 $\triangle ADG$ 、 $\triangle CFG$ 的面积分别是 1、2、3, 那么矩形 $DEFG$ 的面积等于_____.



【答案】 6

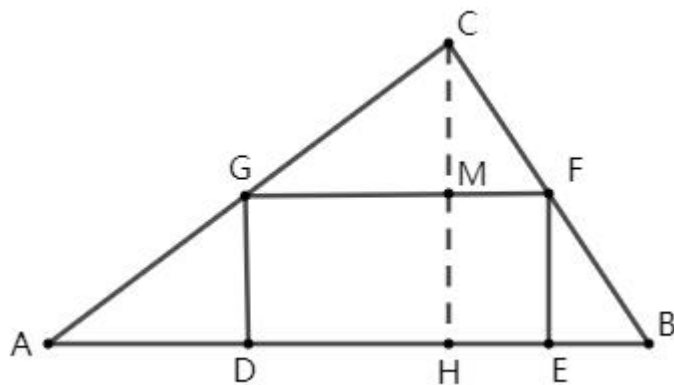
【解析】

【分析】 过点 C 作 $CH \perp AB$, 交 AB 、 GF 于点 H 、 M , 由矩形的性质及相似三角形的判定定理可得 $\triangle CGF \sim \triangle CAB$, 利用相似三角形的性质可得 $\frac{GF}{AB} = \frac{CM}{CH}$, 根据 $\triangle BEF$ 与 $\triangle ADG$ 的面积分别为 1 和 2, 且高相等,

可得 $\frac{BE}{AD} = \frac{1}{2}$, 设 $DE = x$, $EF = y$, $BE = a$, 则 $AD = 2a$, $\triangle CGF$ 的高为 $CM = \frac{6}{x}$, $CH = y + \frac{6}{x}$,

将其代入 $\frac{GF}{AB} = \frac{CM}{CH}$, 求解即可得.

【详解】 解: 如图所示, 过点 C 作 $CH \perp AB$, 交 AB 、 GF 于点 H 、 M ,



$$\because CH \perp AB,$$

$$\therefore CM \perp GF,$$

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 为矩形,

$$\therefore GF \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CGF \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{GF}{AB} = \frac{CM}{CH},$$

$\therefore$ $\triangle BEF$ 与 $\triangle ADG$ 的面积分别为 1 和 2, 且高相等,

$$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{1}{2},$$

设 $DE = x$, $EF = y$, $BE = a$, 则 $AD = 2a$, $\triangle CGF$ 的高为 $CM = \frac{6}{x}$, $CH = y + \frac{6}{x}$,

$$\frac{x}{x+2a} = \frac{\frac{6}{x}}{\frac{6}{x}+y},$$

整理得: $18a = x^2y$ ①,

$$\therefore \frac{1}{2}ay = 1,$$

$$\therefore ay = 2$$
②,

将②代入①可得: $x^2y^2 = 36$,

$$\therefore xy = 6 \text{ 或 } xy = -6 \text{ (舍去)},$$

$\therefore$ 矩形的面积为 6,

故答案为: 6.

【点睛】题目主要考查相似三角形的判定和性质, 矩形的性质等, 理解题意, 熟练运用相似三角形的性质是解题关键.

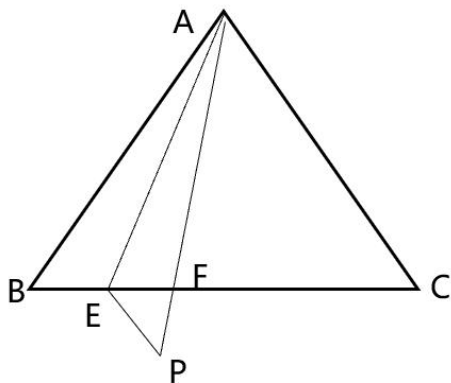
18. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $\sin B = \frac{4}{5}$, E 是 BC 上一点, 把 $\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折后, 点 B 落在点 P 处, 如果 $PE \parallel AC$, 那么 $BE =$ _____.

【答案】2

【解析】

【分析】如图, $AB = AC = 10$, $\sin B = \frac{4}{5}$, 知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, $\frac{BC}{2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$; $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折, 有 $BE = PE$, $AB = AP$, $\angle B = \angle P = \angle C$, 由 $PE \parallel AC$ 得 $\angle C = \angle FEP = \angle P = \angle FAC$, $\triangle FEP$ 和 $\triangle AFC$ 均为等腰三角形, $EF = PF$, $AF = CF$, $CE = AP = 10$, $BE = BC - CE$, 可求得 BE 的值.

【详解】解：如图



$$\because AB = AC = 10$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形

$$\therefore \angle B = \angle C$$

$$\because AB \times \sin B = 10 \times \frac{4}{5} = 8$$

$$\therefore \frac{BC}{2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

$$\therefore BC = 12$$

$\because \triangle ABE$ 沿 AE 翻折

$$\therefore BE = PE, AB = AP, \angle B = \angle P = \angle C$$

$$\because PE \parallel AC$$

$$\therefore \angle C = \angle FEP = \angle P, \angle FAC = \angle P = \angle C$$

$\therefore \triangle FEP$ 和 $\triangle AFC$ 均为等腰三角形

$$\therefore EF = PF, AF = CF$$

$$\therefore EF + CF = CE = PF + AF = AP = 10$$

$$\therefore BE = BC - CE = 2$$

故答案为：2.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质与判定，翻折对称等知识. 解题的关键在于确定翻折线的位置.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 计算： $\frac{\sin 45^\circ - \tan 45^\circ}{\cos^2 60^\circ} + 2 \cot 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$.

【答案】 $2\sqrt{2} - 1$

【解析】

【分析】先代入特殊角的三角函数值，再根据二次根式的运算法则计算.

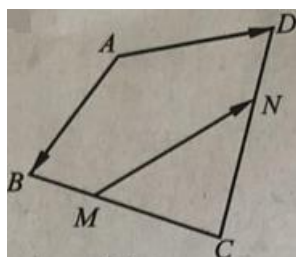
【详解】解：
$$\frac{\sin 45^\circ - \tan 45^\circ}{\cos^2 60^\circ} + 2 \cot 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{2} - 4 + 3 = 2\sqrt{2} - 1.$$

【点睛】本题考查了特殊角的三角函数值，以及二次根式的混合运算，熟记特殊角的三角函数值是解答本题的关键.

20. 如图，已知：四边形 $ABCD$ 中，点 M 、 N 分别在边 BC 、 CD 上， $\frac{CM}{MB} = \frac{CN}{ND} = 2$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

求向量 $\overrightarrow{MN}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式.

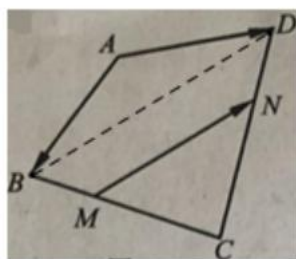


【答案】 $MN = \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}a$

【解析】

【分析】连接 BD ，先证明 $MN = \frac{2}{3}BD$ ，由 $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$ 可得向量 $\overrightarrow{MN}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式.

【详解】解：连接 BD .



$$\because \frac{CM}{MB} = \frac{CN}{ND} = 2,$$

$$\therefore MN \parallel BD, \quad \frac{MN}{BD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore MN = \frac{2}{3}BD,$$

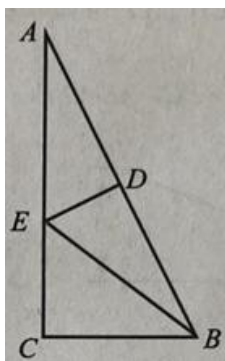
$$\because AB = a, \quad AD = b,$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore MN = \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}a.$$

【点睛】此题考查了平面向量的知识. 此题难度不大, 注意掌握平行向量与向量的模的定义是解此题的关键.

21. 如图, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是 AB 的中点, $ED \perp AB$ 交 AC 于点 E , $\tan \angle EBC = \frac{3}{4}$. 求 $\angle ABE$ 的正切值.



【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】由 $\tan \angle EBC = \frac{CE}{BC} = \frac{3}{4}$, 设 $CE = 3k$, $BC = 4k$, 则 $BE = 5k$, 根据 D 是 AB 的中点, $ED \perp AB$, 得出 $AE = BE = 5k$, 即 $\angle ABE = \angle BAE$, 再在 $Rt\triangle ABC$ 中即可求出.

【详解】解: $Rt\triangle EBC$ 中, $\angle ECB = 90^\circ$,

$$\therefore \tan \angle EBC = \frac{CE}{BC} = \frac{3}{4}.$$

设 $CE = 3k$, $BC = 4k$, 则 $BE = 5k$.

$\because D$ 是 AB 的中点, $ED \perp AB$,

$\therefore AE = BE = 5k$,

$\therefore \angle ABE = \angle BAE$, $AC = 8k$,

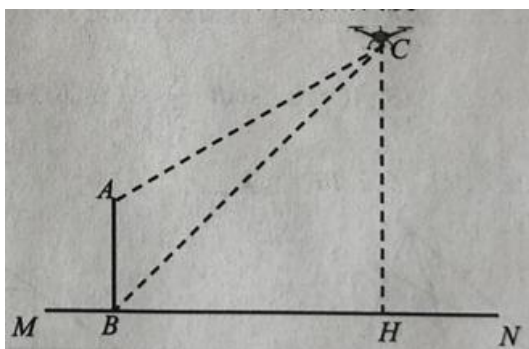
$Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore \tan \angle CAB = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{8k} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore \angle ABE$ 的正切值为 $\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了垂直平分线的性质, 利用正切值求边长, 解题的关键是得出 $\angle ABE = \angle BAE$.

22. 如图, 某校无人机兴趣小组利用无人机测量旗杆的高度, 无人机在位于 C 点时距离地面 MN 的高度 CH 为 30 米, 测得旗杆顶部 A 点的俯角为 30° , 测得旗杆底部 B 点的俯角为 45° , 求旗杆的高度.

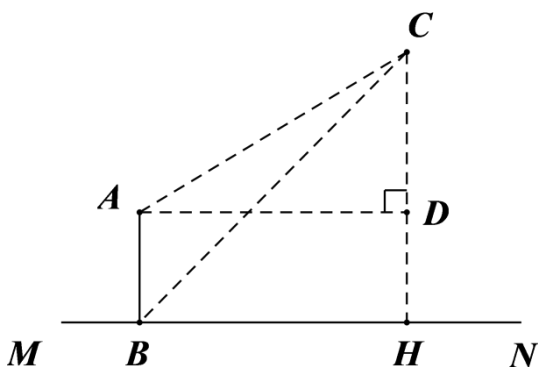


【答案】旗杆高度为 $(30 - 10\sqrt{3})$ 米.

【解析】

【分析】作 $AD \perp CH$ ，垂足为点 D . 根据题意易判断 $AD = BH = CH = 30$ 米，再根据 $\angle CAD = 30^\circ$ ，即可利用正切求出 CD 的值，最后根据 $AB = DH = CH - CD$ ，即可求出旗杆高度.

【详解】解：如图，作 $AD \perp CH$ ，垂足为点 D .



根据题意，得： $\angle CBH = 45^\circ$ ， $\angle CAD = 30^\circ$ ，

在 $Rt\triangle BHC$ 中， $\angle BHC = 90^\circ$ ， $\angle CBH = \angle BCH = 45^\circ$ ，

$\therefore BH = CH = 30$ 米.

$\because \angle ABH = \angle BHD = \angle ADH = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABHD$ 是矩形，

$\therefore BH = AD = 30$ 米， $AB = DH$.

在 $Rt\triangle ADC$ 中， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $\angle CAD = 30^\circ$ ，

$\therefore CD = AD \cdot \tan \angle CAD = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$ 米，

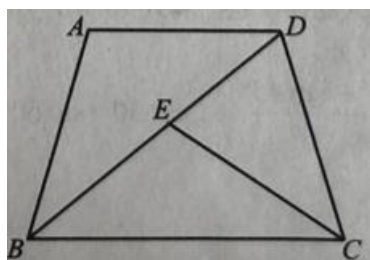
$\therefore AB = DH = CH - CD = (30 - 10\sqrt{3})$ 米.

故旗杆高度为 $(30 - 10\sqrt{3})$ 米.

【点睛】 本题主要考查解直角三角形的实际应用. 作出常用的辅助线是解答本题的关键.

23. 已知：如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = DC = 6$ ， E 是对角线 BD 上一点， $DE = 4$ ， $\angle BCE = \angle ABD$.

- (1) 求证: $\triangle ABD \sim \triangle ECB$;
 (2) 如果 $AD:BC = 3:5$, 求 AD 的长.



【答案】(1) 见解析; (2) $AD = 3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 由平行线的性质可得 $\angle ADB = \angle ECB$, 再由 $\angle BCE = \angle ABD$, 即可证明 $\triangle ABD \sim \triangle ECB$;

(2) 先由等腰梯形的性质得到 $\angle ABC = \angle BCD$, 从而推出 $\angle DBC = \angle DCE$, 即可证明

$\triangle BDC \sim \triangle CDE$, 得到 $\frac{CD}{DE} = \frac{BD}{CD}$, 从而求出 $BD = 9$, $BE = 5$. 再由 $\triangle ABD \sim \triangle ECB$, 得到

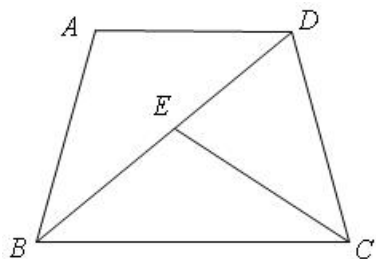
$\frac{AD}{BE} = \frac{BD}{BC}$, 设 $AD = 3x$, $BC = 5x$, 则 $\frac{3x}{5} = \frac{9}{5x}$, 由此求解即可.

【详解】解: (1) $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ADB = \angle ECB$,

又 $\because \angle BCE = \angle ABD$,

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ECB$.



(2) $\because$ 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC = 6$,

$\therefore \angle ABC = \angle BCD$

又 $\because \angle BCE = \angle ABD$,

$\therefore \angle DBC = \angle DCE$,

$\because \angle BDC = \angle CDE$,

$\therefore \triangle BDC \sim \triangle CDE$.

$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{BD}{CD}$,

$\because DC = 6$, $DE = 4$,

$$\therefore BD = 9,$$

$$\therefore BE = BD - DE = 5$$

$$\because \triangle ABD \sim \triangle ECB,$$

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{BD}{BC},$$

$$\because AD:BC = 3:5,$$

$$\text{设 } AD = 3x, \quad BC = 5x,$$

$$\therefore \frac{3x}{5} = \frac{9}{5x},$$

$$\text{解得 } x = \pm\sqrt{3} \quad (\text{舍去负值}),$$

$$\therefore x = \sqrt{3}, \text{ 即 } AD = 3\sqrt{3}.$$

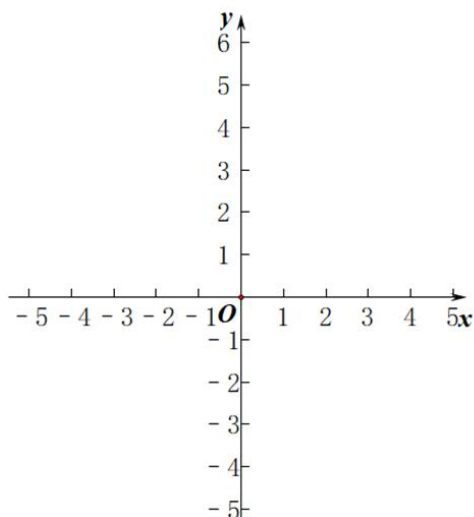
【点睛】本题主要考查了平行线的性质，等腰梯形的性质，相似三角形的性质与判定，熟知相似三角形的性质与判定条件是解题的关键.

24. 已知：抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(0,1)$ 和 $B(1,4)$ ，顶点为点 P ，抛物线的对称轴与 x 轴相交于点 Q .

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 求 $\angle PAQ$ 的度数；

(3) 把抛物线向上或者向下平移，点 B 平移到点 C 的位置，如果 $BQ = CP$ ，求平移后的抛物线解析式.



【答案】(1) $y = -x^2 + 4x + 1$ ；(2) $\angle COM = 90^\circ$ ；(3) $y = -x^2 + 4x + 6$ 或 $y = -x^2 + 4x - 2$.

【解析】

【分析】(1) 将 A, B 两点的坐标代入解析式，解二元一次方程组，求出 b, c 即可求解；

(2) 求出 AP, AQ, PQ 的长度，根据勾股定理的逆定理求解即可；

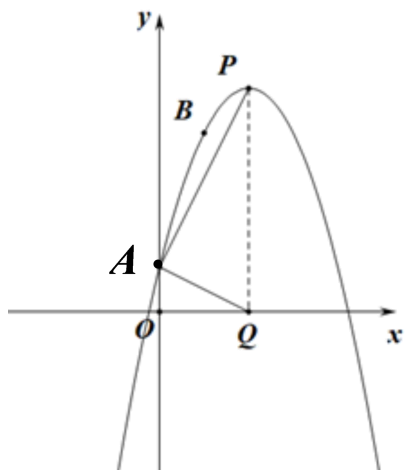
(3) 分情况讨论, 点 C 在点 B 的上方或下方两种情况, 根据平移特征结合图形求解即可.

【详解】解: (1) 根据题意
$$\begin{cases} c = 1 \\ -1 + b + 1 = 4 \end{cases}$$

解得: $b = 4$, $c = 1$,

$\therefore$ 抛物线的表达式是 $y = -x^2 + 4x + 1$

(2) $y = -x^2 + 4x + 1 = -(x - 2)^2 + 5$,



$\therefore$ 顶点 P 的坐标是 $(2, 5)$.

对称轴是直线 $x = 2$, 点 Q 的坐标为 $(2, 0)$.

$\therefore PA = 2\sqrt{5}$, $QA = \sqrt{5}$, $PQ = 5$;

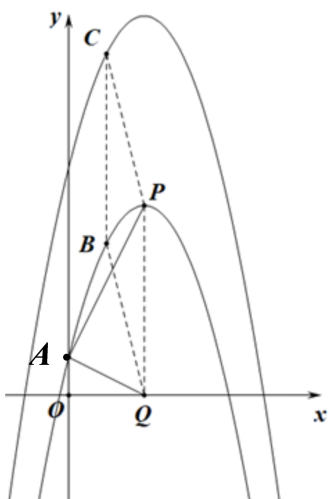
$\therefore PA^2 + QA^2 = PQ^2$,

$\therefore \triangle PAQ$ 是 $\text{Rt} \triangle$

$\therefore \angle PAQ = 90^\circ$,

(3) 根据题意, $BC \parallel PQ$

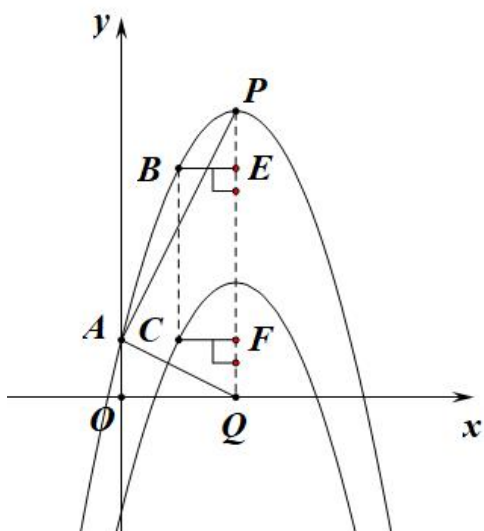
如果点 C 在点 B 的上方, $BC \parallel PQ$, $PC \parallel BQ$ 时, 四边形 $BCPQ$ 是平行四边形,



$\therefore BQ = CP$, $BC = PQ = 5$,

即抛物线向上平移 5 个单位, 平移后的抛物线解析式是 $y = -x^2 + 4x + 6$.

如果点 C 在点 B 的下方, 四边形 BCQP 是等腰梯形时 $BQ = CP$,



作 $BE \perp PQ$, $CF \perp PQ$, 垂足分别为 E、F.

根据题意可得, $PE = QF = 1$, $PQ = 5$, $BC = EF = 3$,

即抛物线向下平移 3 个单位, 平移后的抛物线解析式是 $y = -x^2 + 4x - 2$.

综上所述, 平移后的抛物线解析式是 $y = -x^2 + 4x + 6$ 或 $y = -x^2 + 4x - 2$.

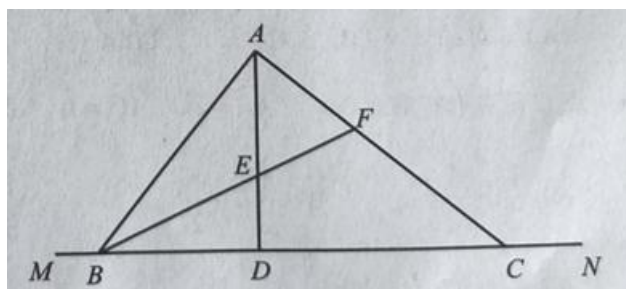
【点睛】 本题考查了二次函数的综合题, 待定系数法求函数解析式, 坐标系中求两点的距离, 勾股定理的逆定理, 图像的平移规律, 正确理解平移的规律是解本题的关键.

25. 已知: 如图, $AD \perp$ 直线 MN , 垂足为 D, $AD = 8$, 点 B 是射线 DM 上的一个动点, $\angle BAC = 90^\circ$, 边 AC 交射线 DN 于点 C, $\angle ABC$ 的平分线分别与 AD、AC 相交于点 E、F.

(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle CBF$;

(2) 如果 $AE = x$, $FC = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式;

(3) 联结 DF ，如果以点 D 、 E 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle BCF$ 相似，求 AE 的长。



【答案】(1) 见解析；(2) $y = \frac{x^2}{8-x} (4 < x < 8)$ ；(3) $-4 + 4\sqrt{5}$ 。

【解析】

【分析】(1) 根据 $AD \perp$ 直线 MN ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，可得 $\angle BAD = \angle BCF$ ，再由 BF 平分 $\angle ABC$ ，可得 $\angle ABE = \angle CBF$ ，即可求证；

(2) 作 $FH \perp BC$ 垂足为点 H ，根据 $\triangle ABE \sim \triangle CBF$ ，可得 $\angle AEB = \angle CFB$ ，从而得到 $\angle AEF = \angle AFE$ ，进而得到 $AE = AF = x$ ，再由角平分线的性质定理，可得 $AF = FH = x$ 。再证得 $\triangle CFH \sim \triangle CAD$ ，可得

$$\frac{FH}{AD} = \frac{FC}{AC}, \text{ 即可求解；}$$

(3) 根据题意可得：点 D 、 E 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle BCF$ 相似，即以点 D 、 E 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle ABE$ 相似。然后分两种情况讨论即可求解。

【详解】解：(1) $\because AD \perp$ 直线 MN ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAD + \angle ABD = 90^\circ, \angle BCF + \angle ABD = 90^\circ,$$

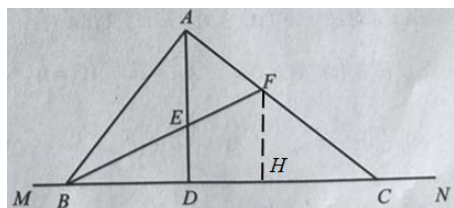
$$\therefore \angle BAD = \angle BCF,$$

$$\because BF \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CBF,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CBF;$$

(2) 作 $FH \perp BC$ 垂足为点 H ，



$$\because \triangle ABE \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CFB,$$

$$\because \angle AEB + \angle AEF = 180^\circ, \angle CFB + \angle AFE = 180^\circ$$

$$\therefore \angle AEF = \angle AFE,$$

$$\therefore AE = AF = x;$$

$\because BF$ 平分 $\angle ABC$, $FH \perp BC$, $\angle BAC = 90^\circ$,

$$\therefore AF = FH = x.$$

$\because FH \perp BC$, $AD \perp$ 直线 MN ,

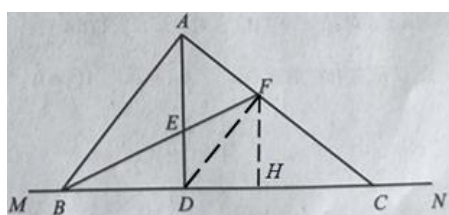
$$\therefore FH \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle CFH \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \frac{FH}{AD} = \frac{FC}{AC}, \text{ 即 } \frac{x}{8} = \frac{y}{y+x},$$

$$\text{解得: } y = \frac{x^2}{8-x} (4 < x < 8);$$

(3) 如图, 连接 DF ,



设 $AE = x$, 由 $\triangle ABE \sim \triangle CBF$, 如果以点 D 、 E 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle BCF$ 相似, 即以点 D 、 E 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle ABE$ 相似.

$$\because \angle AEB = \angle DEF,$$

若 $\angle BAE = \angle FDE$, 则 $DF \parallel AB$,

$$\therefore \angle ABE = \angle DFE,$$

$$\because \angle ABE = \angle DBE,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle DFE,$$

$$\therefore BD = DF,$$

$$\therefore DF \parallel AB,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle ADB = 90^\circ,$$

又 $\angle BAD = \angle BCF$,

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CDF,$$

$$\therefore CF = AD = 8,$$

$$\text{由 (2) 得: } CF = \frac{x^2}{8-x},$$

$$\therefore \frac{x^2}{8-x} = 8,$$

$$\text{解得: } x = -4 \pm 4\sqrt{5} \text{ (舍去负值), } \therefore AE = x = -4 + 4\sqrt{5}.$$

若 $\angle BAE = \angle DFE$, 则 $\triangle ABE \sim \triangle FDE$,

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{BE}{DE}, \text{ 即 } \frac{AE}{BE} = \frac{EF}{DE},$$

$$\because \angle BED = \angle AEF,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle BED,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle BDE,$$

由 (2) 得: $\angle AEF = \angle AFE$,

$\therefore \angle AFE$ 是锐角, 而 $\angle BDE$ 是直角, 所以这种情况不成立.

综上所述, 如果以点 D 、 E 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle BCF$ 相似, AE 的长为 $-4 + 4\sqrt{5}$.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定和性质, 角平分线的性质定理, 熟练掌握相似三角形的判定和性质, 角平分线的性质定理, 并利用分类讨论思想解答是解题的关键.