

2022 年上海市虹口区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题

1. 下列图形中一定是相似形的是 ()

- A. 两个等腰三角形 B. 两个菱形 C. 两个矩形 D. 两个正方形

【答案】D

【解析】

【分析】根据对应角相等，对应边成比例的两个图形，叫做相似图形进行判断即可.

【详解】A、两个等腰三角形，三个角不一定相等，因此不一定相似，故本选项错误，不符合题意.

B、两个菱形对应角不一定相等，故本选项不符合题意；

C、两个矩形的边不一定成比例，故不一定相似，故本选项错误，不符合题意.

D、两个正方形四个角相等，各边一定对应成比例，所以一定相似，故本选项正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了相似图形的判定，掌握对应角相等，对应边成比例的两个图形，叫做相似图形是解题的关键.

2. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 12$ ， $AC = 5$ ，那么 $\cot B$ 等于 ()

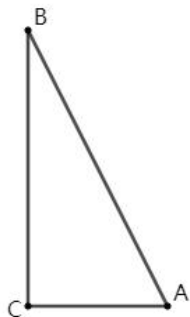
- A. $\frac{5}{13}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{5}{12}$

【答案】C

【解析】

【分析】作出直角三角形，结合余切函数的定义（邻边比对边）可直接得出.

【详解】解：直角三角形 $\triangle ABC$ 中， $BC = 12$ ， $AC = 5$ ，



$$\text{则 } \cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5},$$

故选：C.

【点睛】本题考查的是锐角三角函数的定义，理解余切函数的定义是解题关键.

3. 已知 $\vec{a} = 7\vec{b}$ ，下列说法中不正确的是 ()

- A. $\vec{a} - 7\vec{b} = \vec{0}$ B. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同 C. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ D. $|\vec{a}| = 7|\vec{b}|$

【答案】A

【解析】

【分析】根据平面向量的定理逐一判断即可.

【详解】解: A. $\because \vec{a} = 7\vec{b}$

$\therefore \vec{a} - 7\vec{b} = \vec{0}$, 故选项 A 不正确, 符合题意;

B. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同, 正确, 不符合题意;

C. $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 正确, 不符合题意;

D. $|\vec{a}| = 7|\vec{b}|$, 正确, 不符合题意;

故选: A

【点睛】本题考查了平面向量的定理, 熟练掌握平面向量的基本定理是解题的关键.

4. 下列函数中, 属于二次函数的是 ()

- A. $y = \sqrt{x^2 + x}$ B. $y = (x-1)^2 - x^2$ C. $y = 5x^2$ D. $y = \frac{2}{x^2}$

【答案】C

【解析】

【详解】解: A、是二次根式的形式, 不是二次函数, 故本选项不符合题意;

B、 $y = (x-1)^2 - x^2 = x^2 - 2x + 1 - x^2 = -2x + 1$, 不是二次函数, 故本选项不符合题意;

C、是二次函数, 故本选项符合题意;

D、 $y = \frac{2}{x^2} = 2x^{-2}$, 不是二次函数, 故本选项不符合题意;

故选: C

【点睛】本题主要考查了二次函数的定义, 熟练掌握一般地, 形如 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 叫做二次函数是解题的关键.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 E, D, F 分别在边 AB, BC, AC 上, 联结 DE, DF , 如果 $DE \parallel AC$, $DF \parallel AB$, $AE:EB = 3:2$, 那么 $AF:FC$ 的值是 ()

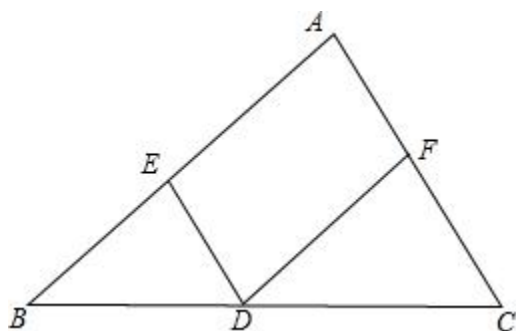
- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据题目的已知条件画出图形, 然后利用平行线分线段成比例解答即可.

【详解】如图：



$\because DE \parallel AC, AE:EB=3:2,$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{2}{3}$$

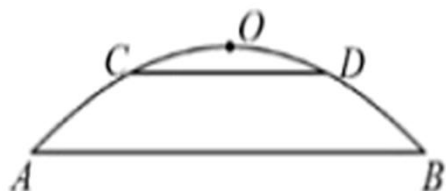
$\because DF \parallel AB,$

$$\therefore \frac{AF}{FC} = \frac{BD}{CD} = \frac{2}{3}$$

故选：B

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例，熟练掌握平行线分线段成比例这个基本事实是解题的关键。

6. 如图所示，一座抛物线形的拱桥在正常水位时，水面 AB 宽为 20 米，拱桥的最高点 O 到水面 AB 的距离为 4 米。如果此时水位上升 3 米就达到警戒水位 CD ，那么 CD 宽为（ ）



A. $4\sqrt{5}$ 米

B. 10 米

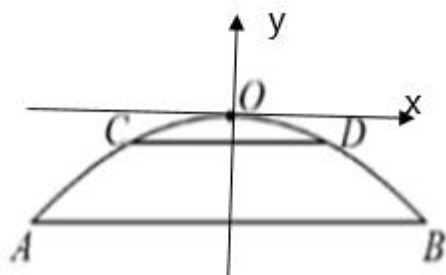
C. $4\sqrt{6}$ 米

D. 12 米

【答案】B

【解析】

【分析】以 O 点为坐标原点， AB 的垂直平分线为 y 轴，过 O 点作 y 轴的垂线，建立直角坐标系，设抛物线的解析式为 $y=ax^2$ ，由此可得 $A(-10, -4)$ ， $B(10, -4)$ ，即可求函数解析式，再将 $y=-1$ 代入解析式，求出 C 、 D 点的横坐标即可求 CD 的长。



【详解】

以 O 点为坐标原点, AB 的垂直平分线为 y 轴, 过 O 点作 y 轴的垂线, 建立直角坐标系,

设抛物线的解析式为 $y=ax^2$,

$\because O$ 点到水面 AB 的距离为 4 米,

$\therefore A、B$ 点的纵坐标为 -4,

$\because$ 水面 AB 宽为 20 米,

$\therefore A(-10, -4), B(10, -4)$,

将 A 代入 $y=ax^2$,

$$-4=100a,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{25},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{25}x^2,$$

$\because$ 水位上升 3 米就达到警戒水位 CD ,

$\therefore C$ 点的纵坐标为 -1,

$$\therefore -1 = -\frac{1}{25}x^2$$

$$\therefore x = \pm 5,$$

$$\therefore CD=10,$$

故选: B .

【点睛】本题考查二次函数的应用, 根据题意建立合适的直角坐标系, 在该坐标系下求二次函数的解析式是解题的关键.

二、填空题

7. 如果 $\frac{m}{n} = \frac{5}{6}$, 那么 $\frac{m-n}{n} =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】先将 $\frac{m-n}{n}$ 化成 $\frac{m}{n} - 1$, 然后整体代入求值即可.

【详解】解: $\frac{m-n}{n} = \frac{m}{n} - 1 = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6}$.

故答案是 $-\frac{1}{6}$.

【点睛】本题主要考查了代数式求值, 灵活运用分式除法的运算法则化简成为解答本题的关键.

8. 已知点 P 是线段 AB 上的黄金分割点, $AP > PB$, 线段 $AB=2$ 厘米, 那么线段 $AP=$ _____.

【答案】 $(\sqrt{5}-1)\text{cm}$

【解析】

【分析】 根据黄金分割点的定义，知 AP 是较长线段；则 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$ ，代入数据即可得出 AP 的长.

【详解】 解：由于 P 为线段 AB 的黄金分割点，且 AP 是较长线段；

$$\text{则 } AP = AB \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}-1,$$

故答案为： $\sqrt{5}-1$.

【点睛】 本题考查黄金分割的概念：把一条线段分成两部分，使其中较长的线段为全线段与较短线段的比例中项，这样的线段分割叫做黄金分割.

9. 如果向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{x}$ 满足 $\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{a}) = \vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ ，那么 $\vec{x} =$ _____ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).

【答案】 $\vec{a} - 3\vec{b}$

【解析】

【分析】 根据向量的线性法则解答.

【详解】 解： $\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{a}) = \vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$

$$\vec{x} + \vec{a} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\vec{x} = \vec{a} - 3\vec{b},$$

故答案为： $\vec{a} - 3\vec{b}$.

【点睛】 此题考查了向量的计算法则，熟练掌握向量的线性计算法则是解题的关键.

10. 已知二次函数 $y = (a-1)x^2 + x + a^2 - 1$ 的图像经过原点，则 a 的值是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据二次函数图像经过原点、并结合二次项系数不为零进行解答即可.

【详解】 解： $\because$ 二次函数 $y = (a-1)x^2 + x + a^2 - 1$ 的图像经过原点 $(0,0)$

$$\therefore \begin{cases} a-1 \neq 0 \\ a^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a = -1.$$

故答案是： -1

【点睛】 本题考查了根据二次函数的定义求参数、解一元一次不等式、解一元二次方程等，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

11. 如果抛物线 $y = (2-a)x^2 + 2$ 开口向下, 那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > 2$

【解析】

【分析】 根据二次函数的性质可知, 当抛物线开口向下时, 二次项系数 $2-a < 0$.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = (2-a)x^2 + 2$ 开口向下,

$\therefore 2-a < 0$, 即 $a > 2$,

故答案为: $a > 2$.

【点睛】 本题主要考查了二次函数的性质. 用到的知识点: 对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 来说, 当 $a > 0$ 时, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 开口向上; 当 $a < 0$ 时, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 开口向下.

12. 如果抛物线过点 $(-2, 3)$, 且与 y 轴的交点是 $(0, 3)$, 那么抛物线的对称轴是直线_____.

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 根据抛物线的对称性可求解.

【详解】 解: $\because$ 当 $x = -2$ 和 $x = 0$ 时, y 的值都是 3

$\therefore$ 该抛物线的对称轴是直线 $x = \frac{-2+0}{2} = -1$

故答案为: $x = -1$.

【点睛】 本题主要考查了二次函数的图象, 熟练掌握二次函数图象具有对称性是解答本题的关键.

13. 已知点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 为函数 $y = -2(x-1)^2 + 3$ 的图象上的两点, 若 $x_1 < x_2 < 0$, 则 y_1 _____ y_2 (填“>”、“=”或“<”).

【答案】 $<$

【解析】

【分析】 根据题意得: 抛物线 $y = -2(x-1)^2 + 3$ 的对称轴为直线 $x = 1$, 且开口向下, 可得在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而增大, 即可求解.

【详解】 解: 根据题意得: 抛物线 $y = -2(x-1)^2 + 3$ 的对称轴为直线 $x = 1$, 且开口向下,

$\therefore$ 在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而增大,

$\because x_1 < x_2 < 0 < 1$,

$\therefore y_1 < y_2$.

故答案为: $<$

【点睛】 本题主要考查了二次函数的图象和性质, 熟练掌握二次函数的图象和性质是解题的关键.

14. 如果一个斜坡的坡度 $i=1: \frac{\sqrt{3}}{3}$, 那么该斜坡的坡角为_____度.

【答案】 60

【解析】

【详解】 试题解析: $\because \tan \alpha = 1: \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 坡角 $= 60^\circ$.

故答案为 60° .

15. 已知 $Rt\triangle ABC$ 的两直角边之比为 $3:4$, 若 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 且 $\triangle DEF$ 最长的边长为 20 , 则 $\triangle DEF$ 的周长为_____.

【答案】 48

【解析】

【分析】 由直角三角形确定其三边长的比, 然后根据相似三角形的性质可求得 $\triangle DEF$ 的三边比, 再结合条件可分别求得 $\triangle DEF$ 的三边长, 即可得出结果.

【详解】 解: $\because \triangle DEF \sim \triangle ABC$, $Rt\triangle ABC$ 的两直角边之比为 $3:4$,

$\therefore$ 由勾股定理可得: $Rt\triangle ABC$ 的三边之比为 $3:4:5$,

$\therefore \triangle DEF$ 的三边之比为 $3:4:5$,

又 $\because \triangle DEF$ 的最大边长为 20 ,

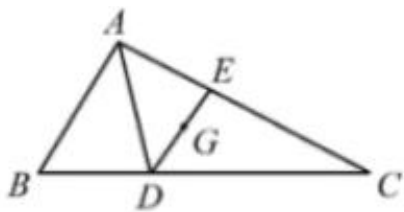
$\therefore \triangle DEF$ 的另外两边分别为 $3 \times \frac{20}{5} = 12$, $4 \times \frac{20}{5} = 16$,

$\therefore \triangle DEF$ 的周长为 $12 + 16 + 20 = 48$,

故答案为: 48 .

【点睛】 本题考查相似三角形的性质, 勾股定理等, 掌握相似三角形的对应边的比相等是解题关键.

16. 如图, 过 $\triangle ABC$ 的重心 G 作 $ED \parallel AB$ 分别交边 AC 、 BC 于点 E 、 D , 联结 AD , 如果 AD 平分 $\angle BAC$, $AB = 6$, 那么 $EC =$ _____.



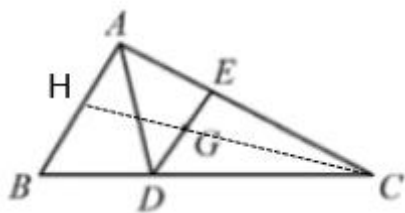
【答案】 8

【解析】

【分析】 由重心的性质可以证明 $\frac{DE}{AB} = \frac{2}{3}$, 再由 AD 平分 $\angle BAC$ 和 $ED \parallel AB$ 可得 $DE = AE$, 最后根据

$ED \parallel AB$ 得到 $\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{AC} = \frac{2}{3}$ 即可求出 EC .

【详解】连接 CG 并延长与 AB 交于 H ,



$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心

$$\therefore \frac{CG}{GH} = 2$$

$$\therefore \frac{CG}{CH} = \frac{2}{3}$$

$\because ED \parallel AB$

$$\therefore \frac{CG}{CH} = \frac{2}{3} = \frac{EC}{AC}, \angle ADE = \angle BAD, \triangle ECD \sim \triangle ACB$$

$$\therefore \frac{EC}{AC} = \frac{DE}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore DE = \frac{2}{3} AB = 4$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$

$$\therefore \angle EAD = \angle BAD$$

$$\therefore \angle EAD = \angle ADE$$

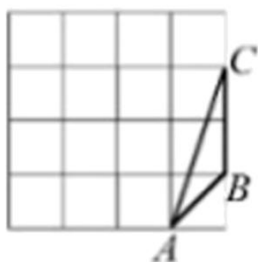
$$\therefore DE = AE = 4$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{EC}{AC} = \frac{EC}{EC + AE},$$

$$\therefore EC = 8$$

【点睛】本题考查三角形的重心的性质、相似三角形的性质与判定、平行线分线段成比例，解题的关键是利用好平行线得到多个结论.

17. 在网格中，每个小正方形的顶点称为格点，以格点为顶点的三角形称为“格点三角形”. 如图，在 4×4 的网格中， $\triangle ABC$ 是一个格点三角形，如果 $\triangle DEF$ 也是该网格中的一个格点三角形，它与 $\triangle ABC$ 相似且面积最大，那么 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似比的值是_____.

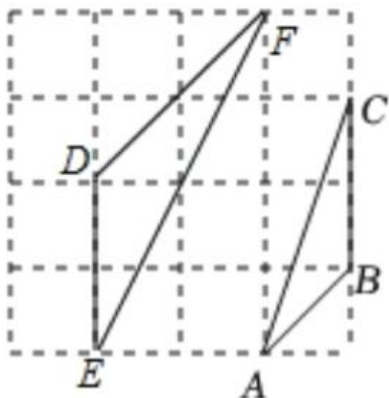


【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据表格求出 $\triangle ABC$ 的三边长，作出 $\triangle DEF$ ，求出 $\triangle DEF$ 的三边长，然后对应的边作比可得比值相等，两个三角形相似，相似比即为对应边的比，此时面积是最大的.

【详解】 解：由表格可得：



$$AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad BC = 2, \quad AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

如图所示：作 $\triangle DEF$ ，

$$DE = 2, \quad DF = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad EF = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{BC} = \frac{EF}{AC} = \sqrt{2},$$

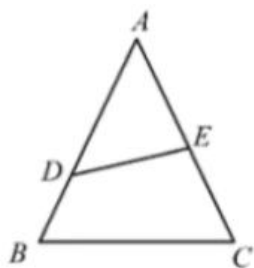
$\therefore \triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 $\sqrt{2}$ ，由于表格的限制，可得且此时面积最大，

故答案为： $\sqrt{2}$.

【点睛】 题目主要考查相似三角形的判定和性质，理解题意，在表格中作出相似三角形是解题关键.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 15$ ， $\sin \angle A = \frac{4}{5}$. 点 D 、 E 分别在 AB 和 AC 边上， $AD = 2DB$ ，把 $\triangle ADE$

沿着直线 DE 翻折得 $\triangle DEF$ ，如果射线 $EF \perp BC$ ，那么 $AE = \underline{\hspace{2cm}}$.

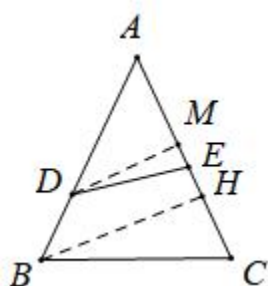


【答案】 $8\sqrt{5}-10$

【解析】

【分析】 先根据折叠得到 DE 平分 $\angle AEF$ ，根据角平分线过 D 作 $\angle AEF$ 两边垂线即可.

【详解】 过 D 作 $DM \perp AC$ 于 M ，过 B 作 $BH \perp AC$ 于 H



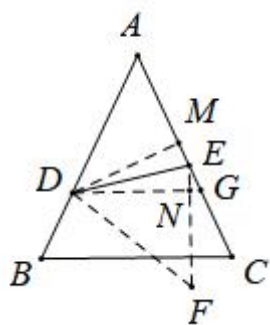
$$\because AB = AC = 15, \sin \angle A = \frac{4}{5}, AD = 2DB$$

$$\therefore AD = 10, DM = 8, AM = 6, BH = 12, AH = 9$$

$$\therefore CH = AC - AH = 6$$

$$\therefore \tan \angle C = \frac{BH}{CH} = 2, BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = 6\sqrt{5}$$

过 D 作 $DG \perp EF$ 交 EF 于 N ，交 AC 于 G



$\because$ 把 $\triangle ADE$ 沿着直线 DE 翻折得 $\triangle DEF$

$\therefore DE$ 平分 $\angle AEF$,

$$\therefore DM = DN = 8, EM = EN$$

$\therefore EF \perp BC$

$\therefore DG \parallel BC$

$$\therefore \frac{DG}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}, \quad \angle C = \angle NGE$$

$$\therefore DG = \frac{2}{3}BC = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore NG = DG - DN = 4\sqrt{5} - 8$$

$$\therefore \tan \angle C = \tan \angle NGE = 2 = \frac{EN}{NG}$$

$$\therefore EM = EN = 2NG = 8\sqrt{5} - 16$$

$$\therefore AE = AM + EM = 8\sqrt{5} - 10$$

故答案为: $8\sqrt{5} - 10$

【点睛】 本题难度比较大, 综合考查折叠的性质、三角函数、相似三角形的性质与判定, 解题的关键是由折叠得到角平分线再根据角平分线作垂线.

三、解答题

19. 计算: $\frac{2\sin 60^\circ + 3\tan 30^\circ}{\cot 30^\circ - \cot 45^\circ}$.

【答案】 $3 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 利用特殊角的三角函数值代入, 再分母有理化即可.

【详解】 解: $\frac{2\sin 60^\circ + 3\tan 30^\circ}{\cot 30^\circ - \cot 45^\circ}$

$$= \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= 3 + \sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查了特殊角三角函数值、实数的混合运算; 熟记特殊角三角函数值是解题关键.

20. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 上部分点的横坐标 x 与纵坐标 y 的对应值如下表:

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	3	4	3	0	-5	...

(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 将抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 沿 x 轴向右平移 m ($m > 0$) 个单位, 使得新抛物线经过原点 O , 求 m 的值以及新抛物线的表达式.

【答案】(1) $y = -(x+1)^2 + 4$;

(2) $m=3$; $y = -(x-2)^2 + 4$.

【解析】

【分析】(1) 利用抛物线的对称性得到抛物线的顶点坐标为 $(-1, 4)$, 则可设顶点式 $y = a(x+1)^2 + 4$, 然后把 $(0, 3)$ 代入求出 a 即可;

(2) 根据平移的规律得到 $y = -(x+1-m)^2 + 4$, 把原点代入即可求得 m 的值, 从而求得平移后的抛物线的不等式.

【小问 1 详解】

$\because x=-2, y=3; x=0, y=3$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-1$, 则抛物线的顶点坐标为 $(-1, 4)$,

设抛物线解析式为 $y = a(x+1)^2 + 4$,

把 $(0, 3)$ 代入得 $a(0+1)^2 + 4 = 3$, 解得 $a = -1$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -(x+1)^2 + 4$;

【小问 2 详解】

将抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 沿 x 轴向右平移 m ($m > 0$) 个单位, 得到 $y = -(x+1-m)^2 + 4$,

$\because$ 经过原点,

$\therefore 0 = -(0+1-m)^2 + 4$,

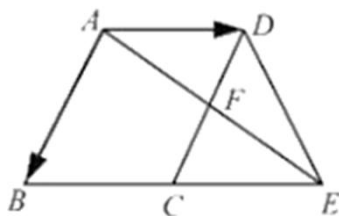
解得 $m_1 = 3, m_2 = -1$ (舍去),

$\therefore m = 3$,

$\therefore$ 新抛物线的表达式为 $y = -(x-2)^2 + 4$.

【点睛】本题考查了待定系数法求二次函数的解析式, 二次函数图象与几何变换, 二次函数图象上点的坐标特征, 求得抛物线的解析式是解题的关键.

21. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 延长 BC 到点 E , 使 $CE = BC$, 联结 AE 交 DC 于点 F , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.



(1) 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$;

(2) 求作: 向量 $\overrightarrow{AF}$ 分别在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向上的分向量. (不要求写作法, 但要写明结论)

【答案】(1) $\vec{a} + \vec{b}$

(2) 向量 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AM}$ 是向量 $\overrightarrow{AF}$ 分别在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向上的分向量.

【解析】

【分析】(1) 连接 AC ，证四边形 $ACED$ 是平行四边形，得出 $DE \parallel AC$ ，根据平行四边形法则求解即可；

(2) 过点 F 作 $FM \parallel AB$ 交 AB 于 M ，根据平行四边形法则即可求得答案.

【小问 1 详解】

解：连接 AC ，

$\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中，

$\therefore AD \parallel CB$ ， $AD = CB$ ，

$\therefore CE = BC$ ，

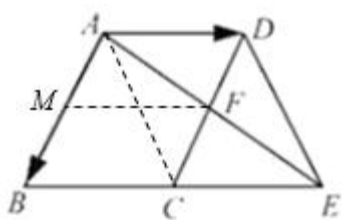
$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是平行四边形，

$\therefore DE \parallel AC$ ，

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ ；

【小问 2 详解】

解：过点 F 作 $FM \parallel AB$ 交 AB 于 M ，则向量 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AM}$ 是向量 $\overrightarrow{AF}$ 分别在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向上的分向量.



【点睛】此题考查了平面向量的知识以及平行四边形的性质. 注意掌握平行四边形法则与三角形法则的应用是解此题的关键.

22. 图 1 是一款平板电脑支架，由托板、支撑板和底座构成. 工作时，可将平板电脑吸附在托板上，底座放置在桌面上，图 2 是其侧面结构示意图，已知托板 AB 长 200mm，支撑板 CB 长 80mm，当 $\angle ABC = 130^\circ$ ， $\angle BCD = 70^\circ$ 时，求托板顶点 A 到底座 CD 所在平面的距离 (结果精确到 1mm). (参考数据: $\sin 70^\circ \approx 0.94$ ， $\cos 70^\circ \approx 0.34$ ， $\tan 70^\circ \approx 2.75$ ， $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$)



图 1

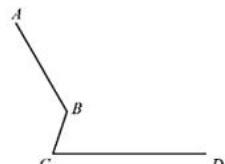


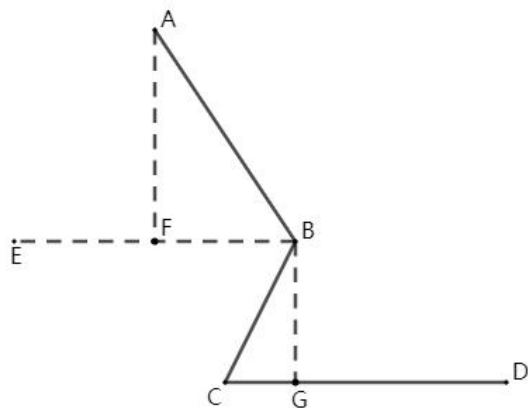
图 2

【答案】托板顶点 A 到底座 CD 所在平面的距离为 248mm.

【解析】

【分析】过点 B 作 $BE \parallel CD$, $BG \perp CD$, 交 CD 于点 G , 过点 A 作 $AF \perp BE$, 交 BE 于点 F , 由平行线的性质可得 $\angle BCD = \angle CBE = 70^\circ$, 得出 $\angle ABE = 60^\circ$, 在 $Rt\triangle AFB$ 与 $Rt\triangle BCG$ 中, 分别利用锐角三角函数求解得出 $BG \approx 75.2mm$, $AF \approx 173mm$, 托板顶点 A 到底座 CD 所在平面的距离即可得出.

【详解】解: 如图所示: 过点 B 作 $BE \parallel CD$, $BG \perp CD$, 交 CD 于点 G , 过点 A 作 $AF \perp BE$, 交 BE 于点 F ,



$\because BE \parallel CD$,

$\therefore \angle BCD = \angle CBE = 70^\circ$,

$\therefore \angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = 130^\circ - 70^\circ = 60^\circ$,

在 $Rt\triangle AFB$ 中,

$$\sin \angle ABE = \frac{AF}{AB},$$

$$\therefore AF = AB \cdot \sin \angle ABE = 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3} \approx 173mm,$$

在 $Rt\triangle BCG$ 中,

$$\sin \angle BCG = \frac{BG}{CB},$$

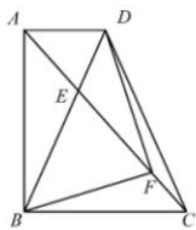
$$\therefore BG = BC \cdot \sin \angle BCG = 80 \times \sin 70^\circ \approx 75.2mm,$$

$$\therefore AF + BG = 173 + 75.2 \approx 248mm,$$

答: 托板顶点 A 到底座 CD 所在平面的距离为 $248mm$.

【点睛】题目主要考查平行线的性质, 利用锐角三角函数解三角形, 理解题意, 作出相应辅助线, 综合运用锐角三角函数是解题关键.

23. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, 对角线 AC 与 BD 交于点 E . 点 F 是线段 EC 上一点, 且 $\angle BDF = \angle BAC$.



(1) 求证: $EB^2 = EF \cdot EC$;

(2) 如果 $BC = 6$, $\sin \angle BAC = \frac{2}{3}$, 求 FC 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 2

【解析】

【分析】(1) 根据 $AD \parallel BC$, 可得 $\triangle EAD \sim \triangle ECB$, 从而得到 $\frac{EA}{ED} = \frac{EC}{EB}$, 再由 $\angle BDF = \angle BAC$, 可得

$\triangle ABE \sim \triangle DFE$, 从而得到 $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EF}$, 进而得到 $\frac{EC}{EB} = \frac{EB}{EF}$, 即可求证;

(2) 根据锐角三角函数, 可得 $AC=9$, 从而得到 $AB=3\sqrt{5}$, 再由 $BC=2AD$, 可得 $AD=3$, 根据 $AD \parallel BC$, 可得 $BD=3\sqrt{6}$, 再由 $\triangle EAD \sim \triangle ECB$, 可得 $\frac{EA}{AC} = \frac{1}{3}$, $\frac{ED}{BD} = \frac{1}{3}$, 从而得到 $EC=6$, $BE=2\sqrt{6}$, 再由 $EB^2 = EF \cdot EC$, 可得 $EF=4$, 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle EAD \sim \triangle ECB$,

$\therefore \frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB}$, 即 $\frac{EA}{ED} = \frac{EC}{EB}$,

$\because \angle BDF = \angle BAC$, $\angle AEB = \angle DEF$,

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DFE$,

$\therefore \frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EF}$,

$\therefore \frac{EC}{EB} = \frac{EB}{EF}$,

$\therefore EB^2 = EF \cdot EC$;

【小问 2 详解】

解: $\because \angle ABC = 90^\circ$, $BC = 6$, $\sin \angle BAC = \frac{2}{3}$,

$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$, 即 $AC=9$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 3\sqrt{5} ,$$

$$\therefore BC = 2AD ,$$

$$\therefore AD = 3 ,$$

$$\therefore AD \parallel BC ,$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ ,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 3\sqrt{6} ,$$

$$\therefore \triangle EAD \sim \triangle ECB ,$$

$$\therefore \frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB} = \frac{AD}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore \frac{EA}{AC} = \frac{1}{3} , \quad \frac{ED}{BD} = \frac{1}{3} ,$$

$$\therefore EA = \frac{1}{3} AC = 3 , \quad ED = \frac{1}{3} BD = \sqrt{6} ,$$

$$\therefore EC = 6 , \quad BE = 2\sqrt{6} ,$$

$$\therefore EB^2 = EF \cdot EC ,$$

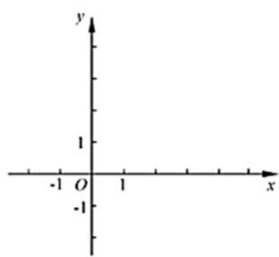
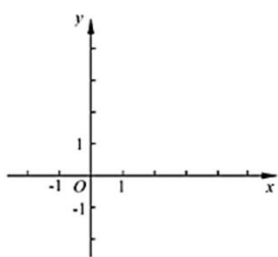
$$\therefore (2\sqrt{6})^2 = 6EF ,$$

$$\therefore EF = 4 ,$$

$$\therefore FC = EC - EF = 6 - 4 = 2 .$$

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的性质和判定，锐角三角函数，勾股定理等知识，根据题意，准确得到相似三角形是解题的关键.

24. 已知开口向上的抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 3$ 与 y 轴的交点为 A ，顶点为 B ，点 A 与点 C 关于对称轴对称，直线 AB 与 OC 交于点 D .



备用图

- (1) 求点 C 的坐标，并用含 a 的代数式表示点 B 的坐标；
- (2) 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时，求抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 3$ 的表达式；
- (3) 当 $\angle ABC = 2\angle BCD$ 时，求 OD 的长.

【答案】 (1) 点 C 的坐标为 $(4, 3)$ ，点 B 的坐标为 $(2, -4a + 3)$

$$(2) \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \text{ 或 } y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$$

$$(3) \quad \frac{15}{11} \text{ 或 } 3$$

【解析】

【分析】(1) 令 $x=0$ ，求得 y 的值，即可确定点 A 的坐标，再确定抛物线的对称轴，进而确定点 C 的坐标；再将对称轴代入求出顶点的纵坐标，即可确定点 B ；

(2) 如图，当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形，然后根据勾股定理列方程求解即可；

(3) 先说明 $BE=EC$ ，再求出直线 OC 的解析式，进而确定点 E 的坐标，然后根据 $BE=EC$ 运用两点间距离公式求得 a ，确定点 B 的坐标，再求得直线 AB 的解析式，之后与直线 OC 的解析式联立求得 D 点坐标，最后求出 OD 的长度即可。

【小问 1 详解】

解：令 $x=0$ ，可得 $y = a \times 0^2 - 4 \times 0 \times a + 3 = 3$

$\therefore A$ 点的坐标为 $(0, 3)$

$\because$ 抛物线的对称轴为： $x = \frac{-4a}{-2a} = 2$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(4, 3)$ ，

令 $x=2$ ，可得 $y = a \times 2^2 - 4 \times 2 \times a + 3 = -4a + 3$

$\therefore$ 顶点 B 的坐标为 $(2, -4a+3)$ 。

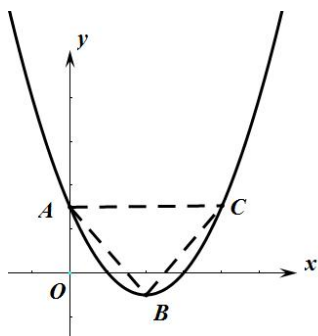
【小问 2 详解】

解：如图：当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\therefore (4-0)^2 + (3-3)^2 = (2-0)^2 + (-4a+3-3)^2 + (2-4)^2 + (-4a+3-3)^2, \text{ 解得 } a = \frac{1}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为： $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ 或 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ 。



【小问 3 详解】

解：如图： $\because EB$ 在抛物线的对称轴上

$$\therefore \angle EBC = \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle BCD$$

$$\therefore \angle BCD = \angle EBC$$

$$\therefore BE = EC$$

$$\therefore \text{点 } O(0,0), \text{ 点 } C(4,3)$$

$$\therefore \text{直线 } OC \text{ 的解析式为 } y = \frac{3}{4}x$$

$$\therefore E \text{ 点坐标为 } (2, \frac{3}{2})$$

$$\therefore BE = CE$$

$$\therefore \frac{3}{2} - (-4a+3) = \sqrt{(4-2)^2 + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2} \text{ 或 } -4a+3 - \frac{3}{2} = \sqrt{(4-2)^2 + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2}, \text{ 解得 } a=1 \text{ 或 } a=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (2, -1) \text{ 或 } (2, 4)$$

$$\text{设直线 } AB \text{ 的解析式为 } y=kx+b$$

$$\text{则 } \begin{cases} 3=b \\ -1=2k+b \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 3=b \\ 4=-2k+b \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b=3 \\ k=-2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b=3 \\ k=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

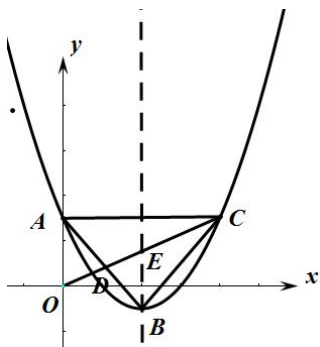
$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y=-2x+3 \text{ 或 } y=-\frac{1}{2}x+3$$

$$\therefore \begin{cases} y=\frac{3}{4}x \\ y=-2x+3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} y=\frac{3}{4}x \\ y=-\frac{1}{2}x+3 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} x=\frac{12}{11} \\ y=\frac{9}{11} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{12}{5} \\ y=\frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (\frac{12}{11}, \frac{9}{11}) \text{ 或 } (\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$$

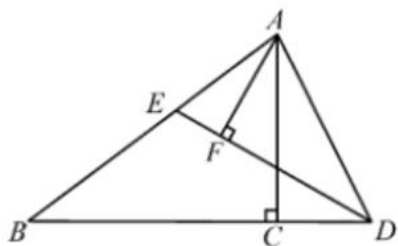
$$\therefore OD = \sqrt{\left(\frac{12}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2} = \frac{15}{11} \text{ 或 } \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} = 3$$

$$\therefore OD \text{ 的长为 } \frac{15}{11} \text{ 或 } 3.$$



【点睛】本题属于二次函数综合题，主要考查了二次函数图象与坐标轴的坐标、轴对称、抛物线的顶点坐标、勾股定理、两点间距离公式、待定系数法求一次函数解析式等知识点，掌握数形结合思想成为解答本题的关键

25. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $\tan B = \frac{3}{4}$ ，点 D 是边 BC 延长线上的一点，在射线 AB 上取一点 E ，使得 $\angle ADE = \angle ABC$ ，过点 A 作 $AF \perp DE$ 于点 F 。



(1) 当点 E 在线段 AB 上时，求证： $\frac{AF}{AC} = \frac{DE}{BD}$ ；

(2) 在(1)题的条件下，设 $CD = x$ ， $DE = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出 x 的取值范围；

(3) 记 DE 交射线 AC 于点 G ，当 $\triangle AEF \sim \triangle AGF$ 时，求 CD 的长。

【答案】(1) 证明见解析；

(2) $y = \frac{8+x}{10} \sqrt{36+x^2}$ ， $0 \leq x \leq 8$ ；

(3) $CD = 3$ 。

【解析】

【分析】(1) 根据相似三角形的判定定理可得 $\triangle ADE \sim \triangle ABD$ ， $\triangle ADF \sim \triangle ABC$ ，由其性质：相似三角形的对应边成比例，进行等量代换即可证明；

(2) 根据正切函数设 $AC = 3a$ ， $BC = 4a$ ，利用勾股定理确定三边长度，根据(1)中 $\frac{DE}{BD} = \frac{AD}{AB}$ ，代入可确定 y 与 x 的函数关系式，考虑当 $x = 0$ 时， $DE \perp AB$ ，当 $CD = CB = 8$ 时，点 E 与点 B 重合，点 F 与点 C 重合，此时 x 取得最大值；当 $x > 8$ 时， $\angle ADB < \angle B$ ，不符合题意，不进行讨论；综合即可得出自变量的取值范围；

(3) 分两种情况进行讨论：当点 G 在线段 AC 上时，延长 AF 交 BC 于点 M ，作 $MN \perp AB$ 于点 N ，根据

相似三角形的性质及角之间的关系可得 $\angle EAF = \angle GAF = \frac{1}{2} \angle BAC$ ，再由等腰三角形三线合一的性质得出

$MN = CM$ ，根据三角形等面积法即可得出 $CM = 3$ ，由此确定 CD ；当点 G 在 AC 的延长线上时，根据相似三角形的性质及三角形外角的性质可得这种情况不存在，综合两种情况即可得出结果。

【小问 1 详解】

证明： $\because \angle ADE = \angle ABC, \angle DAE = \angle BAD,$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABD,$$

$$\therefore \frac{DE}{BD} = \frac{AD}{AB},$$

$$\because AF \perp DE,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle ADE = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AF}{AC} = \frac{AD}{AB},$$

$$\therefore \frac{AF}{AC} = \frac{DE}{BD};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解：} \because \angle ACB = 90^\circ, \tan B = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4},$$

$$\text{设 } AC = 3a, \quad BC = 4a,$$

$$\because AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore (3a)^2 + (4a)^2 = 10^2,$$

$$\text{解得：} a = 2,$$

$$\therefore AC = 6, \quad BC = 8,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{36 + x^2},$$

$$\text{由 (1) 得 } \frac{DE}{BD} = \frac{AD}{AB},$$

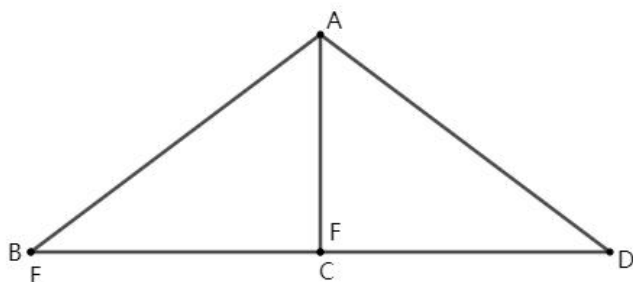
$$\therefore \frac{y}{8+x} = \frac{\sqrt{36+x^2}}{10},$$

$$\therefore y = \frac{8+x}{10} \sqrt{36+x^2},$$

当 $x=0$ 时, $DE \perp AB$, 符合题意,

$\therefore x > 0$;

当 $CD = CB = 8$ 时, 点 E 与点 B 重合, 点 F 与点 C 重合, 此时 x 取得最大值,



$\therefore x \leq 8$,

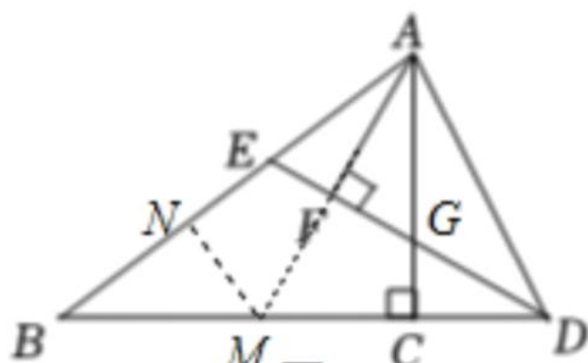
当 $x > 8$ 时,

$\angle ADB < \angle B$, 不符合题意, 不进行讨论;

综上所述: $0 \leq x \leq 8$;

【小问 3 详解】

解: 如图所示: 当点 G 在线段 AC 上时, 延长 AF 交 BC 于点 M , 作 $MN \perp AB$ 于点 N ,



$\because \triangle AEF \sim \triangle AGF$,

$\therefore \angle AEF = \angle AGF$,

$\therefore AE = AG$,

$\therefore \angle EAF = \angle GAF = \frac{1}{2} \angle BAC$,

$\because \angle DAF = \angle BAC$,

$\therefore \angle DAC = \angle GAF$,

$\because AC \perp BD$

$\therefore \angle AMC = \angle ADC$,

$\therefore AM = AD$,

$\therefore CM = CD$,

$\therefore AM$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore MN = CM,$$

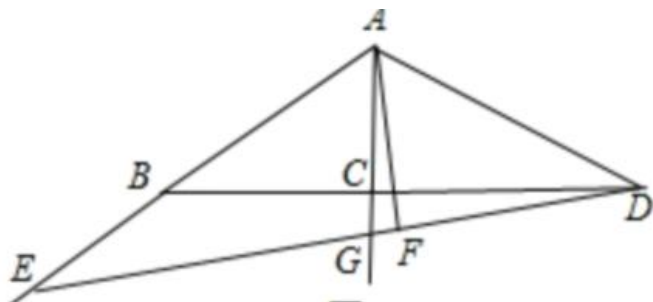
由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ACM}$ 得,

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2} \times 6 \cdot CM + \frac{1}{2} \times 10 \cdot MN,$$

解得: $CM = 3$,

$$\therefore CD = 3;$$

如图所示: 当点 G 在 AC 的延长线上时,



$$\because \triangle AEF \sim \triangle AGF,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle AGF,$$

$\because \angle AGF$ 是 $\triangle AEG$ 的外角,

$$\therefore \angle AGF > \angle AEF,$$

这种情况不存在,

$$\therefore CD = 3.$$

【点睛】 题目主要考查相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 三角形外角的性质, 等腰三角形的判定和性质, 角平分线的性质等, 理解题意, 作出辅助线, 综合运用这些知识点是解题关键.