

2022 学年第一学期阶段适应性练习卷

初三数学

一. 选择题 (本大题共 6 题)

1. 下列各组图形一定相似的是 ()

- A. 两个菱形; B. 两个矩形; C. 两个直角梯形; D. 两个正方形.

【答案】D

【解析】

【分析】形状相同的图形称为相似图形. 结合图形, 对选项一一分析, 排除错误答案即可.

【详解】A. 任意两个菱形, 边的比相等、对应角不一定相等, 不一定相似, 本选项不合题意;

B. 任意两个矩形, 对应角对应相等、边的比不一定相等, 不一定相似, 本选项不合题意;

C. 任意两个直角梯形, 形状不一定相同, 不一定相似, 本选项不合题意;

D. 任意两个正方形的对应角对应相等、边的比相等, 一定相似, 本选项符合题意;

故选: D.

【点睛】本题考查的是相似形的定义, 相似图形的形状必须完全相同; 相似图形的大小不一定相同.

2. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $AC = 8$, $BC = 6$, 那么 $\angle B$ 的余切值为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【答案】A

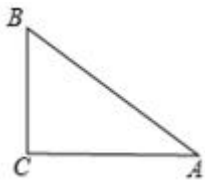
【解析】

【分析】根据余切函数的定义解答即可.

【详解】如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\because \angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$,

$$\therefore \cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

故选: A.



【点睛】本题考查解直角三角形, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

3. 抛物线 $y = -3(x+1)^2 + 2$ 的顶点坐标是 ()

- A. $(1, 2)$ B. $(1, -5)$ C. $(-1, 2)$ D. $(-1, -2)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据顶点式的性质，确定顶点坐标即可.

【详解】解：抛物线 $y = -3(x+1)^2 + 2$ 的顶点坐标是 $(-1, 2)$ ；

故选 C.

【点睛】本题考查抛物线的顶点坐标. 熟练掌握顶点式的性质，是解题的关键.

4. 已知 $\vec{c}$ 为非零向量， $\vec{a} = 3\vec{c}$ ， $\vec{b} = -2\vec{c}$ ，那么下列结论中错误的是（ ）

- A. $\vec{a} // \vec{b}$ B. $|\vec{a}| = \frac{3}{2}|\vec{b}|$ C. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同 D. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反

【答案】C

【解析】

【分析】根据平面向量的性质一一判断即可.

【详解】 $\because \vec{a} = 3\vec{c}$ ， $\vec{b} = -2\vec{c}$

$$\therefore \vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \vec{a} // \vec{b}, \quad |\vec{a}| = \frac{3}{2}|\vec{b}|$$

$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反，

$\therefore$ A, B, D 正确，C 错误；

故选：C.

【点睛】本题考查平面向量，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

5. 单板滑雪大跳台是北京冬奥会比赛项目之一，运动员起跳后的飞行路线可以看作是抛物线的一部分，建立如图所示的平面直角坐标系，从起跳到着陆的过程中，运动员的竖直高度 y （单位：m）与水平距离 x （单位：m）近似满足函数关系 $y = a(x+m)^2 + k$ ($a < 0$).



某运动员进行了两次训练. 第一次训练时，该运动员的水平距离 x 与竖直高度 y 的几组数据如上图. 根据上述数据，该运动员竖直高度的最大值为（ ）

水平距离 x/m	0	2	5	8	11	14
竖直高度 y/m	20.00	21.40	22.75	23.20	22.75	21.40

(第一次训练数据)

- A. 23.20m B. 22.75m C. 21.40m D. 23m

【答案】A

【解析】

【分析】找到表格中函数值相同的两个自变量的值，根据抛物线的对称性，确定抛物线的对称轴，进而确定函数的最大值即可.

【详解】解：由表格可知：当 $x=2$ 和 $x=14$ 时，函数的函数值相同，

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为：} x = \frac{2+14}{2} = 8,$$

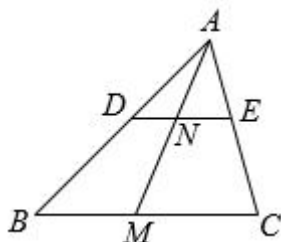
由表格可知：抛物线上的点离对称轴越远，函数值越小，

$$\therefore \text{当 } x=8 \text{ 时，函数值最大：} y=23.20;$$

故选 A.

【点睛】本题考查求二次函数的最值. 通过抛物线的对称性，确定抛物线的对称轴，是解题的关键.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D ， E 分别在 AB 和 AC 边上且 $DE \parallel BC$ ，点 M 为 BC 边上一点（不与点 B 、 C 重合），连接 AM 交 DE 于点 N ，下列比例式一定成立的是（ ）.



- A. $\frac{AD}{AN} = \frac{AN}{AE}$ B. $\frac{DN}{NE} = \frac{BM}{CM}$ C. $\frac{DN}{BM} = \frac{AE}{EC}$ D. $\frac{DN}{MC} = \frac{NE}{BM}$

【答案】B

【解析】

【分析】证明 $\triangle ADN \sim \triangle ABM$ ， $\triangle ANE \sim \triangle AMC$ ，根据相似三角形的性质即可得到答案.

【详解】解： $\because DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \triangle ADN \sim \triangle ABM, \triangle ANE \sim \triangle AMC,$$

$$\therefore \frac{DN}{BM} = \frac{AN}{AM} = \frac{AD}{AB}, \frac{NE}{MC} = \frac{AN}{AM} = \frac{AE}{AC},$$

$\therefore \frac{DN}{BM} = \frac{NE}{MC} = \frac{AE}{AC}$, $\frac{DN}{NE} = \frac{BM}{CM}$, 故 B 符合题意, C、D 不符合题意;

根据现有条件无法证明 $\frac{AD}{AN} = \frac{AN}{AE}$, 故 A 不符合题意;

故选 B.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的性质与判定, 熟知相似三角形对应边成比例是解题的关键.

二. 填空题 (本大题共 12 题)

7. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, 则 $\frac{2a}{a+b}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{6}{7}$.

【解析】

【详解】 试题分析: 用 a 表示出 b, 然后代入比例式进行计算. $\because \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$,

$$\therefore b = \frac{4}{3}a,$$

$$\therefore \frac{2a}{a+b} = \frac{2a}{a+\frac{4}{3}a} = \frac{6}{7}.$$

故答案为 $\frac{6}{7}$.

考点: 比例的性质.

8. 已知线段 $AB = 8\text{cm}$, 点 C 在线段 AB 上, 且 $AC^2 = BC \cdot AB$, 那么线段 AC 的长_____ cm.

【答案】 $4\sqrt{5} - 4$

【解析】

【分析】 根据黄金分割的定义得到点 C 是线段 AB 的黄金分割点, 根据黄金比值计算得到答案.

【详解】 $\because AC^2 = BC \cdot AB$,

$\therefore$ 点 C 是线段 AB 的黄金分割点, $AC > BC$,

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 8 = 4\sqrt{5} - 4$$

故答案为: $4\sqrt{5} - 4$.

【点睛】 本题考查的是黄金分割的概念和性质, 掌握黄金比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是解题的关键.

9. 若两个相似三角形的面积比为 3:4, 则它们的相似比为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 根据相似三角形的面积比等于相似比的平方求解即可

【详解】 解： $\because$ 两个相似三角形面积的比为 $3:4$,

$$\therefore \text{它们的相似比} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质: 相似三角形的对应角相等, 对应边的比相等; 相似三角形 (多边形) 的周长的比等于相似比; 相似三角形的对应线段 (对应中线、对应角平分线、对应边上的高) 的比也等于相似比; 相似三角形的面积的比等于相似比的平方.

10. 小杰沿坡比为 $1:2.4$ 的山坡向上走了 130 米, 那么他沿着垂直方向升高了_____米.

【答案】 50

【解析】

【分析】 设他沿着垂直方向升高了 x 米, 根据坡度的概念用 x 表示出他行走的水平宽度, 根据勾股定理计算即可.

【详解】 设他沿着垂直方向升高了 x 米,

$\because$ 坡比为 $1:2.4$,

$\therefore$ 他行走的水平宽度为 $2.4x$ 米,

由勾股定理得, $x^2 + (2.4x)^2 = 130^2$,

解得, $x = 50$, 即他沿着垂直方向升高了 50 米,

故答案为: 50 .

【点睛】 本题考查的是解直角三角形的应用-坡度坡角问题, 掌握坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比是解题的关键.

11. 若点 $A(-3, y_1)$, $B(0, y_2)$ 是二次函数 $y = 2(x-1)^2 - 1$ 图象上的两点, 则 y_1 _____ y_2 (填 $>$, $=$, $<$).

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 根据二次函数的性质, 抛物线开口向上, 图象的点离对称轴越远, 函数值越大, 进行判断即可.

【详解】 解: $y = 2(x-1)^2 - 1$,

$a = 2 > 0$ ，对称轴为： $x = 1$ ，

$\therefore$ 抛物线的开口向上，图象的点离对称轴越远，函数值越大，

$$\therefore 1 - (-3) > 1 - 0,$$

$$\therefore y_1 > y_2;$$

故答案为： $>$ 。

【点睛】本题考查比较二次函数的函数值大小。熟练掌握二次函数的图象和性质，是解题的关键。

12. 如果将抛物线 $y = x^2 + 2x - 1$ 先向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位，那么所得的新抛物线的顶点坐标为_____。

【答案】 $(0, 0)$

【解析】

【分析】求出平移后的解析式，即可得到新抛物线的顶点坐标。

【详解】解： $y = x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2$ ，

将抛物线先向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位，得到： $y = (x + 1 - 1)^2 - 2 + 2 = x^2$ ，

$\therefore$ 新抛物线的顶点坐标为： $(0, 0)$ ；

故答案为： $(0, 0)$ 。

【点睛】本题考查抛物线的平移，以及二次函数的性质。熟练掌握抛物线的平移规律：上加下减，左加右减，是解题的关键。

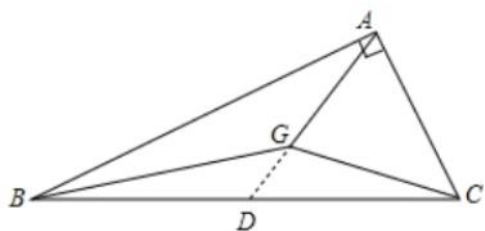
13. $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，连接 AG 。若 $AG = 4$ ，则 BC 长为_____。

【答案】12

【解析】

【分析】延长 AG 交 BC 于点 D ，根据点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，得到 D 为 BC 的中点，以及 $AG = 2DG$ ，进而求出 AD 的长度，根据 AD 是直角三角形斜边上的中线，从而求出 BC 的长。

【详解】解：如图，延长 AG 交 BC 于点 D ，



$\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心， $AG = 4$ ，

$\therefore D$ 为 BC 的中点, 且 $AG = 2DG = 4$,

$\therefore DG = 2$,

$\therefore AD = AG + DG = 6$,

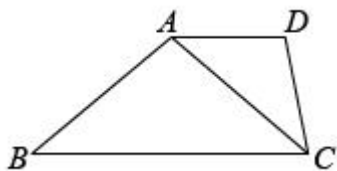
$\therefore \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore BC = 2AD = 12$;

故答案为: 12.

【点睛】 本题考查重心的性质, 以及直角三角形斜边上的中线. 熟练掌握重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 $2:1$, 以及直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 是解题的关键.

14. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, AC 平分 $\angle BCD$, $\angle BAC = \angle D$, 如果 $AD = 4$, $BC = 10$, 则 $AC =$ _____.



【答案】 $2\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 利用平行线的性质, 得到: $\angle DAC = \angle ACB$, 再根据 $\angle BAC = \angle D$, 得到: $\triangle BAC \sim \triangle CDA$, 利用相似比进行求解即可.

【详解】 解: $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAC = \angle ACB$,

$\because \angle BAC = \angle D$,

$\therefore \triangle BAC \sim \triangle CDA$,

$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC}$,

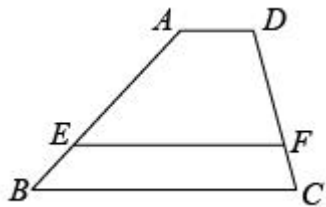
$\therefore AC^2 = AD \cdot BC = 40$,

$\therefore AC = 2\sqrt{10}$;

故答案为: $2\sqrt{10}$.

【点睛】 本题考查相似三角形的判定和性质. 解题的关键是证明三角形相似.

15. 如图, 已知 $AD \parallel EF \parallel BC$, $AE = 3BE$, $AD = 2$, $EF = 5$, 那么 $BC =$ _____.

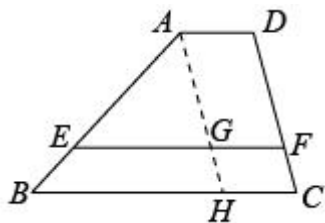


【答案】 6

【解析】

【分析】 过点A作 $AH \parallel CD$ ，交 EF 于点 G ，交 BC 于点 H ，根据 $AD \parallel EF \parallel BC$ ，得到四边形 $AHCD$, $AGFD$ 均为平行四边形， $\triangle AEG \sim \triangle ABH$ ，利用平行四边形的性质，以及相似比，分别求出 BH , CH ，进而求出 BC 的长.

【详解】 解： 过点A作 $AH \parallel CD$ ，交 EF 于点 G ，交 BC 于点 H ，



$$\because AD \parallel EF \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $AHCD$, $AGFD$ 均为平行四边形,

$$\therefore FG = CH = AD = 2,$$

$$\therefore EG = EF - FG = 5 - 2 = 3,$$

$$\because EF \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ABH,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{GE}{BH},$$

$$\therefore AE = 3BE,$$

$$\therefore \frac{GE}{BH} = \frac{3}{BH} = \frac{3}{4},$$

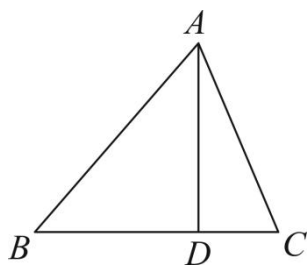
$$\therefore BH = 4,$$

$$\therefore BC = BH + CH = 4 + 2 = 6;$$

故答案为： 6.

【点睛】 本题考查相似三角形的判定和性质，平行四边形的判定和性质. 解题的关键是添加辅助线，证明三角形相似.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ ， $\sin B = \frac{4}{5}$ ， $BC = 13$ ， $AD = 12$ ，则 $\tan C$ 的值_____.



【答案】3

【解析】

【分析】根据正弦值，求出 AB ，勾股定理求出 BD ，进而求出 CD ，利用 $\tan C = \frac{AD}{CD}$ ，进行求解即可.

【详解】解： $\because AD \perp BC$ ，

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\because \sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{12}{AB} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore AB = 15,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 9,$$

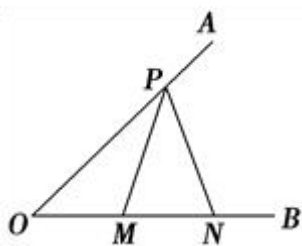
$$\therefore CD = BC - BD = 13 - 9 = 4,$$

$$\therefore \tan C = \frac{AD}{CD} = \frac{12}{4} = 3;$$

故答案为：3.

【点睛】本题考查锐角三角函数. 熟练掌握锐角三角函数的定义，是解题的关键.

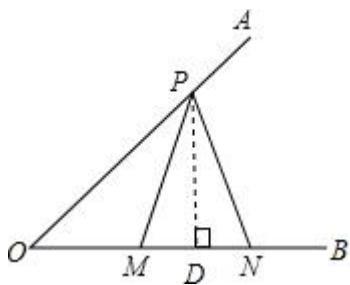
17. 如图，已知 $\tan O = \frac{4}{3}$ ，点 P 在边 OA 上， $OP = 5$ ，点 M ， N 在边 OB 上， $PM = PN$ ，如果 $MN = 2$ ，那么 $PM =$ _____.



【答案】 $\sqrt{17}$

【解析】

【详解】试题解析：过 P 作 $PD \perp OB$ ，交 OB 于点 D ，



$$\therefore \tan O = \frac{PD}{OD} = \frac{4}{3},$$

$\therefore$ 设 $PD=4x$, 则 $OD=3x$,

$\because OP=5$, 由勾股定理得: $(3x)^2 + (4x)^2 = 5^2$,

$\therefore x=1$,

$\therefore PD=4$,

$\because PM=PN$, $PD \perp OB$, $MN=2$

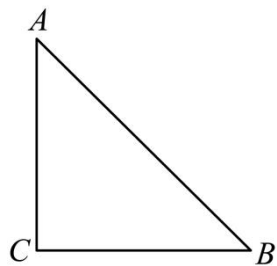
$$\therefore MD = ND = \frac{1}{2}MN = 1,$$

在 $Rt\triangle PMD$ 中, 由勾股定理得:

$$PM = \sqrt{MD^2 + PD^2} = \sqrt{17}.$$

故答案为 $\sqrt{17}$.

18. 如图, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=BC=1$, 点 D 在 BC 上, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 AD 翻折, 使点 C 落在点 C' 处, 连接 AC' , 直线 AC' 与边 CB 的延长线相交与点 F , 如果 $\angle DAB = \angle BAF$, 那么线段 BF 的长为 ____.

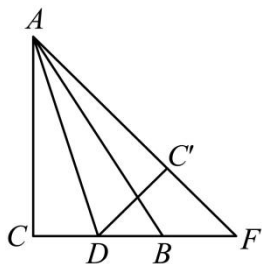


【答案】 $\sqrt{3}-1$

【解析】

【分析】 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=BC=1$, 得到 $\angle CAB = \angle ABC = 45^\circ$, 由 $\triangle ADC'$ 是将 $\triangle ABC$ 沿直线 AD 翻折得到的, 求出 $\angle CAD = \angle C'AD$, 于是得到 $\angle ABF = 135^\circ$, 求出 $\angle F = 30^\circ$, 根据直角三角形的性质即可得到结果.

【详解】 解: 如图所示:



∵ 在 $Rt\triangle ABC$ 中,

$$\angle C = 90^\circ, AC = BC = 1,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle ABC = 45^\circ,$$

∵ $\triangle ADC'$ 是将 $\triangle ABC$ 沿直线 AD 翻折得到的,

$$\therefore \angle CAD = \angle C'AD,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle BAF,$$

$$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle DAC = \frac{1}{3} \angle BAC = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle F = 30^\circ,$$

$$\therefore CF = \frac{AC}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3},$$

$$\therefore BF = CF - BC = \sqrt{3} - 1,$$

故答案为: $\sqrt{3} - 1$.

【点睛】 本题考查了翻折变换-折叠问题, 等腰直角三角形的性质, 锐角三角函数, 正确做出图形是解题关键.

三. 解答题 (本大题共 7 题)

19. 计算: $\frac{\sin 60^\circ + 3 \tan 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}{(2 \cos 45^\circ - 1) \cdot \cot 30^\circ}.$

【答案】 $\sqrt{2} + 1.$

【解析】

【分析】 直接将特殊角的三角函数值代入求出答案.

【详解】 原式 = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2}}{\left(2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \times \sqrt{3}}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-1) \times \sqrt{3}}$$

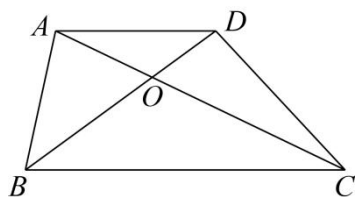
$$= \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \sqrt{2} + 1.$$

【考点】实数的运算；特殊角的三角函数值.

20. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示向量 $\overrightarrow{AO}$.



【答案】 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】先根据平行线分线段成比例得到 $\frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$, 得到 $AO = \frac{1}{3}AC$, 再根据 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 即可求解.

【详解】 $\because AD \parallel BC$, $BC = 2AD$

$$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{AO}{AC} = \frac{1}{3} \text{ 即 } AO = \frac{1}{3}AC$$

$$\because \overrightarrow{AD} = \vec{a},$$

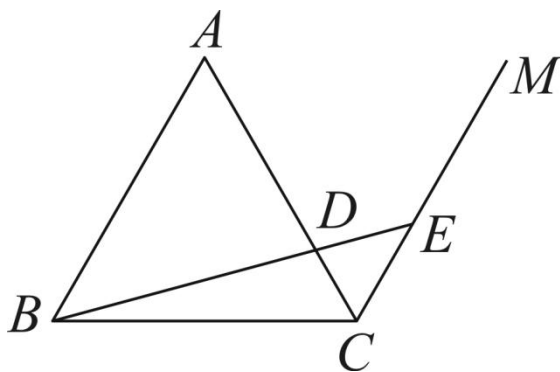
$$\overrightarrow{BC} \text{ 与 } \overrightarrow{AD} \text{ 同向, } \therefore \overrightarrow{BC} = 2\vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + 2\vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}$$

【点睛】本题考查平面向量, 解题的关键是熟练掌握基本知识.

21. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB = 6$, 点 D 在 AC 上, $AD = 2CD$, CM 是 $\angle ACB$ 的外角平分线, 连接 BD 并延长与 CM 交于点 E .



- (1) 求 CE 的长；
 (2) 求 $\angle EBC$ 的正切值.

【答案】 (1) 3 (2) $\tan \angle EBC = \frac{\sqrt{3}}{5}$

【解析】

【分析】 (1) 根据等边三角形的性质和角平分线平分角，得到： $\angle DCE = \angle BAD$ ，再根据对顶角相等，得到 $\triangle BAD \sim \triangle ECD$ ，利用相似比求出 CE 即可；

(2) 过点 E 作 $EF \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 F ，解直角三角形 CFE ，求出 CF, EF ，进而求出 BF ，利用 $\tan \angle EBC = \frac{EF}{BF}$ ，求解即可.

【小问 1 详解】

解： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形， CM 是 $\angle ACB$ 的外角平分线，

$$\therefore \angle A = \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ, \quad AB = BC = AC = 6,$$

$$\therefore \angle ACM = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACM = \angle A,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CDE,$$

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle ECD,$$

$$\therefore \frac{AB}{CE} = \frac{AD}{CD},$$

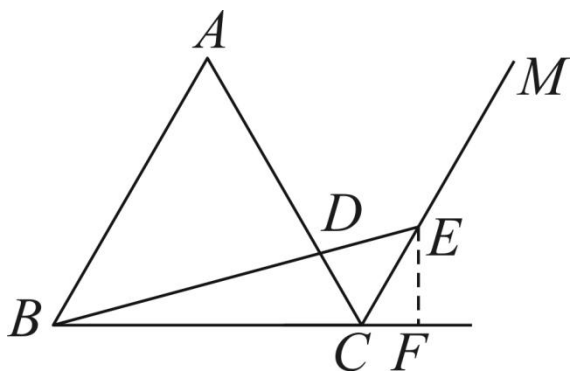
$$\therefore AD = 2CD,$$

$$\therefore \frac{AB}{CE} = 2,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}AB = 3;$$

【小问 2 详解】

解：如图，过点 E 作 $EF \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 F ，



$$\therefore \angle EFC = 90^\circ,$$

$\therefore CM$ 是 $\angle ACB$ 的外角平分线,

$$\therefore \angle ECF = \angle ACM = 60^\circ,$$

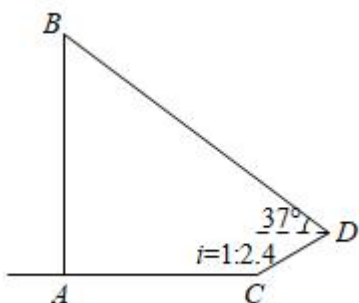
$$\therefore EF = CE \cdot \sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, CF = CE \cdot \cos 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore BF = BC + CF = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2},$$

$$\therefore \tan \angle EBC = \frac{EF}{BF} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

【点睛】 本题考查相似三角形的判定和性质，解直角三角形．解题的关键是证明三角形相似以及添加辅助线，构造直角三角形．

22. 如图，高压电线杆 AB 垂直地面，测得电线杆 AB 的底部 A 到斜坡的水平距离 AC 长为 15.2 米，落在斜坡上的电线杆的影长 CD 为 5.2 米，在 D 点处测得电线杆顶 B 的仰角为 37° ．已知斜坡 CD 的坡比 $i = 1:2.4$ ，求该电线杆 AB 的高（结果保留整数位）．（参考数据： $\sin 37^\circ = 0.60$ ， $\cos 37^\circ = 0.80$ ， $\tan 37^\circ = 0.75$ ）



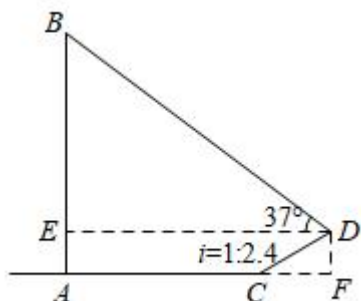
【答案】 该电线杆 AB 的高 17m

【解析】

【分析】 如图，过点 D 分别作 $DE \perp AB$, $DF \perp AC$ ，交 AB 于点 E ，交 AC 的延长线于点 F ，得到四边

形 $AFDE$ 为矩形，利用斜坡 CD 的坡比 $i=1:2.4$ ，求出 CF, DF ，进而求出 DE 的长，利用三角函数，求出 BE 的长，利用 $BE + AE$ 求出 AB 的长即可。

【详解】解：如图，过点 D 分别作 $DE \perp AB, DF \perp AC$ ，交 AB 于点 E ，交 AC 的延长线于点 F ，



$$\therefore \angle DFC = \angle DEB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 高压电线杆 AB 垂直地面，

$\therefore$ 四边形 $AFDE$ 为矩形，

$$\therefore DE = AF, AE = DF,$$

$\therefore$ 斜坡 CD 的坡比 $i=1:2.4$ ，即： $DF:CF=1:2.4$ ，

$$\text{设 } DF = x, CF = 2.4x,$$

$$\text{由勾股定理得： } CD = \sqrt{CF^2 + DF^2} = 2.6x = 5.2,$$

$$\text{解得： } x = 2;$$

$$\therefore AE = DF = 2\text{m}, CF = 4.8\text{m},$$

$$\therefore DE = AF = AC + CF = 15.2 + 4.8 = 20\text{m},$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEB \text{ 中, } BE = DE \cdot \tan 37^\circ = 20 \times 0.75 = 15\text{m},$$

$$\therefore AB = BE + AE = 15 + 2 = 17\text{m}.$$

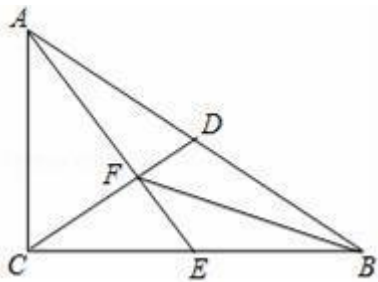
答：该电线杆 AB 的高 17m 。

【点睛】本题考查解直角三角形的应用。通过添加辅助线，构造直角三角形，是解题的关键。

23. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， D 是斜边 AB 上的中点， E 是边 BC 上的点， AE 与 CD 交于点 F ，且 $AC^2=CE \cdot CB$ 。

(1) 求证： $AE \perp CD$ ；

(2) 连接 BF ，如果点 E 是 BC 中点，求证： $\angle EBF = \angle EAB$ 。



【答案】略

【解析】

【详解】试题分析：（1）先根据题意得出 $\triangle ACB \sim \triangle ECA$ ，再由直角三角形的性质得出 $CD=AD$ ，由 $\angle CAD + \angle ABC = 90^\circ$ 可得出 $\angle ACD + \angle EAC = 90^\circ$ ，进而可得出 $\angle AFC = 90^\circ$ ；

（2）根据 $AE \perp CD$ 可得出 $\angle EFC = 90^\circ$ ， $\angle ACE = \angle EFC$ ，故可得出 $\triangle ECF \sim \triangle EAC$ ，再由点E是BC的中点可知 $CE=BE$ ，故 $\frac{BE}{EA} = \frac{EF}{BE}$ ，根据 $\angle BEF = \angle AEB$ 得出 $\triangle BEF \sim \triangle AEB$ ，进而可得出结论.

试题解析：（1） $\because AC^2 = CE \cdot CB$,

$$\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{CB}{AC}.$$

又 $\because \angle ACB = \angle ECA = 90^\circ$

$\therefore \triangle ACB \sim \triangle ECA$,

$\therefore \angle ABC = \angle EAC$.

$\because$ 点D是AB的中点,

$\therefore CD = AD$,

$\therefore \angle ACD = \angle CAD$

$\because \angle CAD + \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACD + \angle EAC = 90^\circ$

$\therefore \angle AFC = 90^\circ$,

$\therefore AE \perp CD$

（2） $\because AE \perp CD$,

$\therefore \angle EFC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACE = \angle EFC$

又 $\because \angle AEC = \angle CEF$,

$\therefore \triangle ECF \sim \triangle EAC$

$$\therefore \frac{EC}{EA} = \frac{EF}{EC}$$

$\because$ 点E是BC的中点,

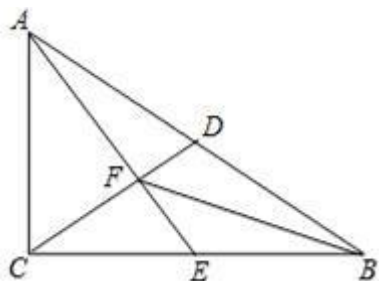
$$\therefore CE=BE,$$

$$\therefore \frac{BE}{EA} = \frac{EF}{BE}$$

$$\because \angle BEF = \angle AEB,$$

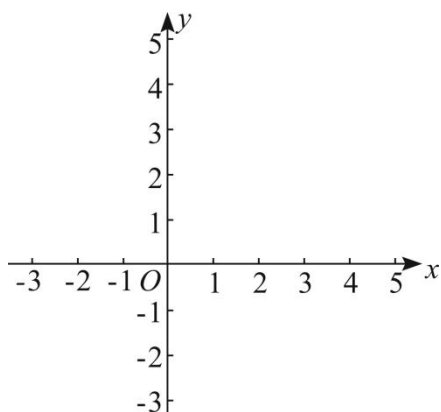
$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle AEB$$

$$\therefore \angle EBF = \angle EAB.$$



【考点】相似三角形的判定与性质.

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ 、 $C(2,3)$ 三点，且与 y 轴交于点 D .



(1) 求该抛物线的表达式，并写出该抛物线的对称轴：

(2) 分别联结 AD 、 DC 、 CB ，直线 $y = 4x + m$ 与线段 DC 交于点 E ，当此直线将四边形 $ABCD$ 的面积平时，求 m 的值；

(3) 设点 F 为该抛物线对称轴上的一点，当以点 A 、 B 、 C 、 F 为顶点的四边形是梯形时，请直接写出所有满足条件的点 F 的坐标.

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3, x = 1$

$$(2) \quad m = -\frac{5}{2}$$

$$(3) \quad (1,3) \text{ 或 } (1,-6) \text{ 或 } (1,-2)$$

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求出函数解析式，进而求出对称轴即可；

(2) 求出 D 点坐标，设直线与 AB 交于点 F ，分别用含 m 的式子表示出 E, F 的坐标，利用直线将四边形 $ABCD$ 的面积平分，得到 $S_{\text{四边形}ABCD} = 2S_{\text{四边形}AFED}$ 列式求解即可；

(3) 分 $CF \parallel AB, AF \parallel BC, BF \parallel AC$ ，三种情况讨论求解即可。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(2, 3)$ 三点，

设： $y = a(x+1)(x-3)$ ，

则： $3 = a(2+1)(2-3)$ ，

解得： $a = -1$ ，

∴ $y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$ ，

∴ 对称轴为： $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times (-1)} = 1$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ $y = -x^2 + 2x + 3$ ，

当 $x = 0$ 时： $y = 3$ ；

∴ $D(0, 3)$ ，

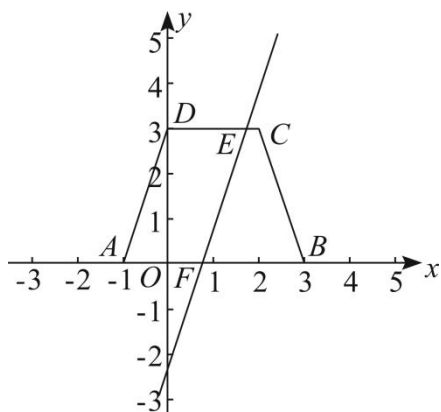
∴ $OD = 3$ ，

∵ $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(2, 3)$

∴ $CD = 2$ ， $AB = 4$ ， $CD \parallel AB$ ，

∴ 直线 $y = 4x + m$ 与线段 DC 交于点 E ，且平分四边形 $ABCD$ 的面积，

∴ 直线 $y = 4x + m$ 与线段 AB 相交，设交点为 F ，



当 $y = 0$ 时, $x = -\frac{m}{4}$; 当 $y = 3$ 时, $x = \frac{3-m}{4}$;

$$\therefore E\left(\frac{3-m}{4}, 3\right), F\left(-\frac{m}{4}, 0\right),$$

$$\therefore AF = -\frac{m}{4} + 1, DE = \frac{3-m}{4},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 2S_{\text{四边形}AFED},$$

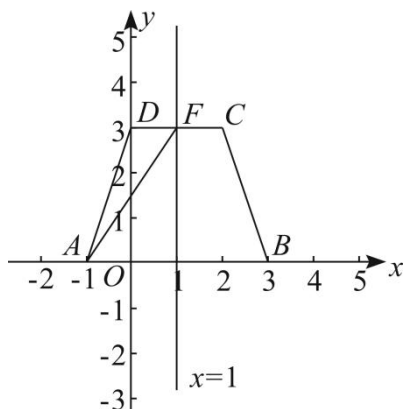
$$\text{即: } \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot OD = 2 \times \frac{1}{2}(AF + DE) \cdot OD,$$

$$\therefore AB + CD = 2(AF + DE), \text{ 即: } 4 + 2 = 2\left(-\frac{m}{4} + 1 + \frac{3-m}{4}\right),$$

$$\text{解得: } m = -\frac{5}{2};$$

【小问3 详解】

解: ①当 $CF \parallel AB$ 时, 点 F 在线段 AD 上, 此时: $F(1, 3)$;



②当 $AF \parallel BC$ 时, 设直线 BC 的解析式为: $y = kx + b$,

$$\text{则: } \begin{cases} 0 = 3k + b \\ 3 = 2k + b \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -3 \\ b = 9 \end{cases};$$

$$\therefore y = -3x + 9,$$

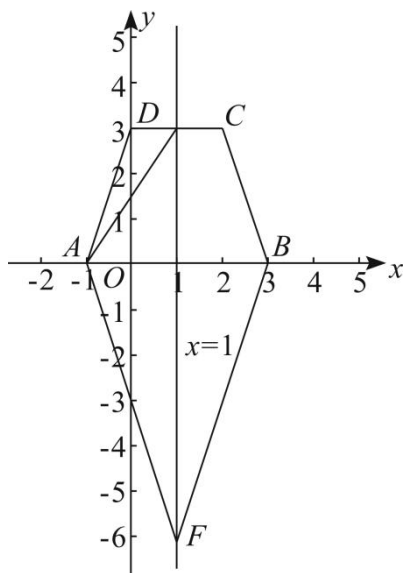
设直线 AF 的解析式为: $y = -3x + m$,

$$\therefore 0 = -3 \times (-1) + m, \text{ 解得: } m = -3,$$

$$\therefore y = -3x - 3,$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = -3 - 3 = -6,$$

$$\therefore F(1, -6)$$



③当 $BF \parallel AC$ 时, 设直线 AC 的解析式为: $y = k_1x + b_1$,

$$\text{则: } \begin{cases} 0 = -k_1 + b_1 \\ 3 = 2k_1 + b_1 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases};$$

$$\therefore y = x + 1,$$

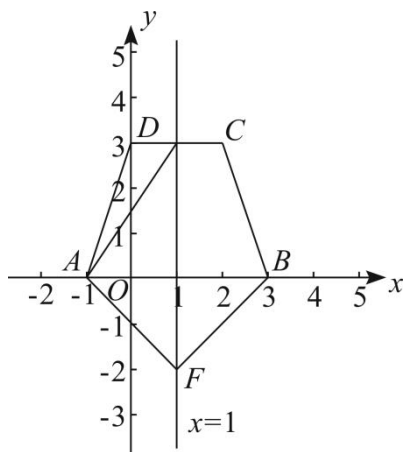
设直线 BF 的解析式为: $y = x + n$,

$$\therefore 0 = 1 \times 3 + n, \text{ 解得: } n = -3,$$

$$\therefore y = x - 3,$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = 1 - 3 = -2,$$

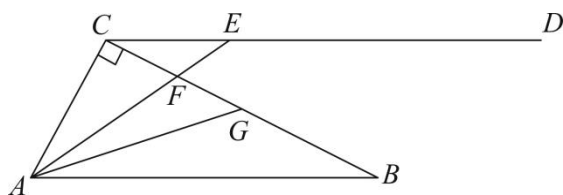
$$\therefore F(1, -2)$$



综上：点 A 、 B 、 C 、 F 为顶点的四边形是梯形时， F 的坐标为： $(1, 3)$ 或 $(1, -6)$ 或 $(1, -2)$ 。

【点睛】 本题考查二次函数的综合应用，一次函数与几何的综合应用。正确的求出二次函数的解析式，利用数形结合和分类讨论的思想进行求解，是解题的关键。

25. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 13$ ， $CD \parallel AB$ 。点 E 为射线 CD 上一动点（不与点 C 重合），联结 AE ，交边 BC 于点 F ， $\angle BAE$ 的平分线交 BC 于点 G 。



- (1) 当 $CE = 3$ 时，求 $S_{\triangle CEF} : S_{\triangle CAF}$ 的值；
- (2) 设 $CE = x$ ， $AE = y$ ，当 $CG = 2GB$ 时，求 y 与 x 之间的函数关系式；
- (3) 当 $AC = 5$ 时，连接 EG ，若 $\triangle AEG$ 为直角三角形，求 BG 的长。

【答案】 (1) $\frac{3}{13}$

(2) $y = -x + 26$

(3) 6 或 $\frac{169}{24}$

【解析】

【分析】 (1) 证明 $\triangle CFE \sim \triangle BFA$ ，得到 $\frac{EF}{AF} = \frac{CE}{AB}$ ，根据 $S_{\triangle CEF} : S_{\triangle CAF} = EF : AF$ ，即可得解；

(2) 延长 AG ，交 CD 于点 H ，证明 $\triangle AEH$ 为等腰三角形，得到 $AE = EH$ ，再证明 $\triangle AGB \sim \triangle HGC$ ，利用相似比，求出 CH 的长，利用 $CH = CE + EH = CE + AE$ ，求出 y 与 x 之间的函数关系式；

(3) 分 $\angle AGE = 90^\circ$ 和 $\angle AEG = 90^\circ$ 两种情况讨论求解，即可。

【小问 1 详解】

解: $\because CD \parallel AB$,

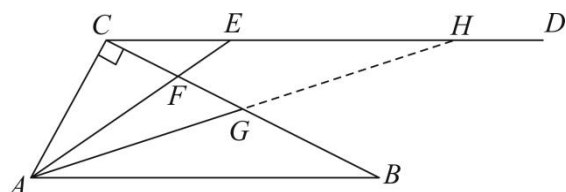
$\therefore \triangle CFE \sim \triangle BFA$,

$$\therefore \frac{EF}{AF} = \frac{CE}{AB} = \frac{3}{13},$$

$$\therefore S_{\triangle CEF} : S_{\triangle CAF} = \frac{\frac{1}{2}EF \cdot h}{\frac{1}{2}AF \cdot h} = \frac{EF}{AF} = \frac{3}{13};$$

【小问 2 详解】

解: 延长 AG , 交 CD 于点 H ,



$\because AG$ 是 $\angle BAE$ 的平分线,

$\therefore \angle FAG = \angle BAG$,

$\because CD \parallel AB$,

$\therefore \angle EHA = \angle BAG$,

$\therefore \angle EHA = \angle FAG$,

$\therefore AE = EH$,

$\therefore \triangle AGB \sim \triangle HGC$,

$$\therefore \frac{CH}{AB} = \frac{CG}{BG},$$

$\therefore CG = 2GB$,

$$\therefore \frac{CH}{AB} = \frac{CG}{BG} = 2,$$

$\therefore CH = 2AB = 26$,

$\therefore CH = CE + EH = CE + AE$,

$\therefore CH = CE + AE = x + y = 26$,

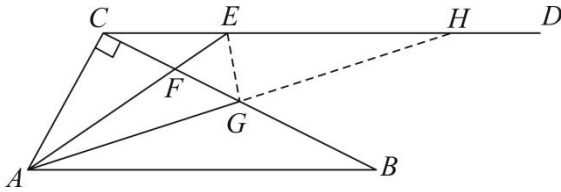
即: $y = -x + 26$;

【小问 3 详解】

解: $\because \angle EAG < 90^\circ$,

$\therefore \triangle AEG$ 为直角三角形时, 只有两种情况:

①当 $\angle AGE = 90^\circ$ 时, $EG \perp AH$,



由 (2) 知: $AE = EH$,

$$\therefore AG = GH,$$

$$\therefore \triangle AGB \sim \triangle HGC,$$

$$\therefore \frac{CG}{BG} = \frac{GH}{AG} = 1,$$

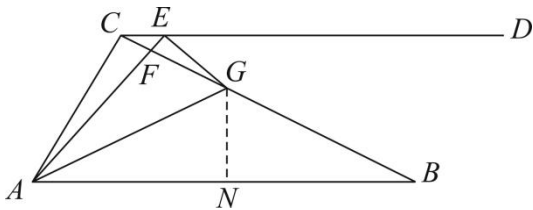
$$\therefore BG = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, AB = 13, AC = 5,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 12,$$

$$\therefore BG = \frac{1}{2}BC = 6;$$

②当 $\angle AEG = 90^\circ$ 时, 则: $\angle AEG = \angle ACB$



$$\therefore \angle CFA = \angle EFG,$$

$$\therefore \triangle ACF \sim \triangle GEF,$$

$$\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{EF}{FG}, \angle CFE = \angle AFG,$$

$$\therefore \triangle ECF \sim \triangle GAF,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle FAG,$$

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle B,$$

$$\therefore \angle FAG = \angle GAB,$$

$$\therefore \angle B = \angle GAB,$$

$$\therefore GA = GB,$$

过点 G 作 $GN \perp AB$ 于 N , 则 $\angle GNB = \angle ABC$, $BN = \frac{1}{2}AB = \frac{13}{2}$,

$$\therefore \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle GNB,$$

$$\therefore \frac{BN}{BC} = \frac{BG}{AB}, \text{ 即: } \frac{BN}{BG} = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13},$$

$$\therefore BG = \frac{13}{12}BN = \frac{169}{24}.$$

综上：当 $\triangle AEG$ 为直角三角形， BG 的长为 6 或 $\frac{169}{24}$ 。

【点睛】 本题考查相似三角形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，以及勾股定理。解题的关键是添加辅助线，证明三角形相似。注意，分类讨论。

