

2022 学年第一学期初三数学

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分) 2023.1

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列函数中, y 关于 x 的二次函数是 ()

A. $y = ax^2 + bx + c$

B. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

C. $y = x(x+1)$

D. $y = (x+2)^2 - x^2$

【答案】 C

【解析】

【分析】 形如: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 则 y 是 x 的二次函数, 根据定义逐一判断各选项即可得到答案.

【详解】 解: $y = ax^2 + bx + c$, 当 $a = 0$ 时, y 不是 x 的二次函数, 故 A 错误;

$y = \frac{1}{x^2 + 1}$, y 不是 x 的二次函数, 故 B 错误;

$y = x(x+1)$, 即 $y = x^2 + x$, y 是 x 的二次函数, 故 C 正确;

$y = (x+2)^2 - x^2$, 即 $y = 4x + 4$, y 不是 x 的二次函数, 故 D 错误;

故选: C.

【点睛】 本题考查的是二次函数的定义, 掌握二次函数的定义是解题的关键.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\angle A = 40^\circ$, $AC = b$, 那么 BC 等于 ()

A. $b\sin 40^\circ$

B. $b\cos 40^\circ$

C. $b\tan 40^\circ$

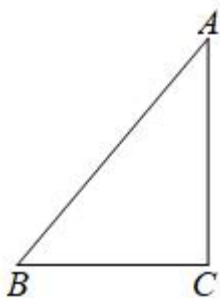
D. $b\cot 40^\circ$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据解直角三角形即可求解.

【详解】 解: 如图:



$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 40^\circ$, $AC = b$,

$$\therefore BC = AC \cdot \tan \angle A = b \tan 40^\circ,$$

故选：C.

【点睛】 本题考查了解直角三角形：在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边.

3. 已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量，下列结论中，正确的是 ()

- A. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ B. $\vec{a} = \vec{b}$ C. $\vec{a} = 1$ D. $\vec{a} - \vec{b} = 0$

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据平面向量的性质进行一一分析判断即可.

【详解】 解： A、单位向量的模相等，故该选项正确；

B、单位向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{b}$ 方向相同时，该等式才成立，故该选项错误，不符合题意；

C、 $|\vec{a}| = 1$ ，故该选项错误，不符合题意；

D、单位向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{b}$ 方向相同时，该等式才成立，故该选项错误，不符合题意；

故选：A.

【点睛】 本题主要考查了平面向量，注意：平面向量既有大小，又有方向.

4. 已知 P, Q 是线段 AB 的两个黄金分割点，且 AB=10，则 PQ 长为 ()

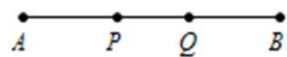
- A. $5(\sqrt{5}-1)$ B. $5(\sqrt{5}+1)$ C. $10(\sqrt{5}-2)$ D. $5(3-\sqrt{5})$

【答案】 C

【解析】

【分析】 画出图像，根据黄金分割的概念写出对应线段的比值，求出 AQ、PB 的长度，再根据 $PQ=AQ+PB-AB$ 即可求出 PQ 的长度.

【详解】 解：如图，



根据黄金分割点的概念，可知 $\frac{PB}{AB} = \frac{AQ}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$$\therefore AQ=PB,$$

$$\because AB=10,$$

$$\therefore AQ=PB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times 10=5\sqrt{5}-5,$$

$$\therefore PQ=AQ+PB-AB=5\sqrt{5}-5+5\sqrt{5}-5-10=10\sqrt{5}-20=10(\sqrt{5}-2).$$

故选：C.

【点睛】 本题主要考查黄金分割的概念，熟记黄金分割的概念并根据黄金分割的比值列式是解题关键.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 BA、CA 的延长线上，下列比例式中能判定 $DE\parallel BC$ 的为 ()

- A. $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}$ B. $\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AE}$ C. $\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{BD}$ D. $\frac{AC}{AB}=\frac{BD}{CE}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据平行线分线段成比例定理、平行线的判定定理判断即可.

【详解】 解：当 $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}$ 时，不能判定 $DE\parallel BC$ ，A 选项错误；

$\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AE}$ 时，不能判定 $DE\parallel BC$ ，B 选项错误；

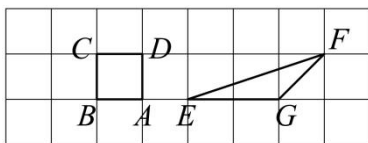
$\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{BD}$ 时， $DE\parallel BC$ ，C 选项正确；

$\frac{AC}{AB}=\frac{BD}{CE}$ 时，不能判定 $DE\parallel BC$ ，D 选项错误；

故选：C.

【点睛】 本题考查了平行线分线段成比例定理、平行线的判定定理，掌握相关的判定定理是解题的关键.

6. 如图，正方形 $ABCD$ 与 $\triangle EFG$ 在方格纸中，正方形和三角形的顶点都在格点上，那么与 $\triangle EFG$ 相似的是 ()



- A. 以点 E、F、A 为顶点的三角形 B. 以点 E、F、B 为顶点的三角形
C. 以点 E、F、C 为顶点的三角形 D. 以点 E、F、D 为顶点的三角形

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据勾股定理求出三角形的边长，根据相似三角形的判定判断即可.

【详解】 由图可知 $EG=2$ ， $\angle EGF=135^\circ$ ，由勾股定理得： $GF=\sqrt{2}$ ， $EF=\sqrt{10}$

A. $\triangle EFA$ 最大的角为 $\angle AEF>135^\circ$ ， $\therefore$ 两三角形不相似，故 A 选项不符合题意.

B. $\triangle EFB$ 最大的角为 $\angle BEF>135^\circ$ ， $\therefore$ 两三角形不相似，故 B 选项不符合题意.

C. 由图可知 $\triangle EFC$ 的边 $CF = 5$, 由勾股定理得 $\triangle EFC$ 两条边分别为 $CE = \sqrt{5}$, $EF = \sqrt{10}$, $\therefore$

$\frac{GF}{CE} = \frac{EG}{EF} = \frac{EF}{CF} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\therefore \triangle EFG$ 与 $\triangle EFC$ 三边成比例, $\therefore$ 两三角形相似, 故 C 选项符合题意.

D. 由图可知 $\triangle EFD$ 的边 $DF = 5$, 由勾股定理得 $\triangle EFD$ 两条边分别为 $DE = \sqrt{2}$, $EF = \sqrt{10}$, $\therefore \triangle EFG$ 与 $\triangle EFD$ 三边不成比例, $\therefore$ 两三角形不相似, 故 D 选项不符合题意.

故选 C

【点睛】本题考查了勾股定理和相似三角形的判定定理的应用, 解题的关键是熟练应用相似三角形的判定定理.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 若 $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{x}{x+y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{4}$ ## 0.25

【解析】

【分析】设 $x = k$, $y = 3k$ ($k \neq 0$), 代入即可求得结果.

【详解】解: 设 $x = k$, $y = 3k$ ($k \neq 0$),

$$\text{则 } \frac{x}{x+y} = \frac{k}{k+3k} = \frac{1}{4},$$

故答案为: $\frac{1}{4}$.

【点睛】本题考查了代数式求值问题, 设出 x 、 y 是解决本题的关键.

8. 已知抛物线 $y = -x^2 - 3x + 3$, 它与 y 轴的交点坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(0, 3)$

【解析】

【分析】令 $x = 0$, 即可求解.

【详解】解: 令 $x = 0$, 则 $y = 3$,

故它与 y 轴的交点坐标为 $(0, 3)$,

故答案为: $(0, 3)$.

【点睛】本题考查了二次函数与 y 轴的交点问题, 熟练掌握和运用二次函数与 y 轴的交点坐标的求法是解决

本题的关键.

9. 抛物线 $y = x^2 + 2$ 向下平移 1 个单位, 再向右平移 3 个单位, 得到的抛物线的函数解析式为_____.

【答案】 $y = (x - 3)^2 + 1$

【解析】

【分析】 根据“左加右减、上加下减”的原则进行解答即可.

【详解】 解: 将抛物线 $y = x^2 + 2$ 向下平移 1 个单位所得抛物线解析式为: $y = x^2 + 2 - 1$, 即 $y = x^2 + 1$;

再向右平移 3 个单位为: $y = (x - 3)^2 + 1$.

故答案为: $y = (x - 3)^2 + 1$.

【点睛】 本题主要考查的是二次函数的图象与几何变换, 熟知函数图象平移的法则是解答此题的关键.

10. 二次函数 $y = x^2 - 6x$ 图像上的最低点的纵坐标为_____.

【答案】 -9

【解析】

【分析】 首先可求得该二次函数的顶点坐标, 再根据二次函数的性质, 即可求解.

【详解】 解: $\because y = x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$,

$\therefore$ 该二次函数的顶点坐标为 $(3, -9)$,

又 $\because a = 1 > 0$,

$\therefore$ 该二次函数图像的开口向上,

$\therefore$ 该二次函数图像上的最低点的纵坐标为 -9,

故答案为: -9.

【点睛】 本题考查了求二次函数的顶点坐标及二次函数的性质, 熟练掌握和运用二次函数的性质是解决本题的关键.

11. 如果两个相似三角形的面积之比为 4:9, 这两个三角形的周长的和是 100cm, 那么较小的三角形的周长为_____ cm.

【答案】 40

【解析】

【分析】 根据相似三角形的性质, 即可解答.

【详解】 解: $\because$ 两个相似三角形的面积之比为 4:9,

$\therefore$ 这两个三角形的周长之比为 2:3,

设两个三角形的周长分别为 $2k$, $3k(k \neq 0)$,

又 $\because$ 这两个三角形的周长的和是 100cm ,

$$\therefore 2k + 3k = 100 ,$$

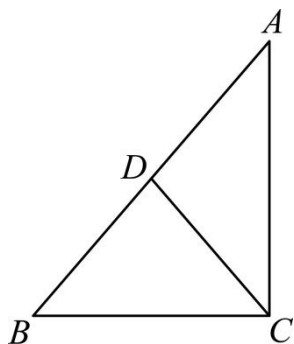
解得 $k = 20$,

故较小的三角形的周长为: $2k = 2 \times 20 = 40(\text{cm})$,

故答案为: 40 .

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质, 熟练掌握和运用相似三角形的性质是解决本题的关键.

12. 如图, $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 是斜边 AB 上的中线, 已知 $CD = 2$, $AC = 3$, 则 $\cos A = \underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 根据三角形斜边中线的性质得出 AB 长, 再根据余弦三角函数的定义计算即可.

【详解】 解: $\because D$ 是 AB 上的中点, $CD=2$,

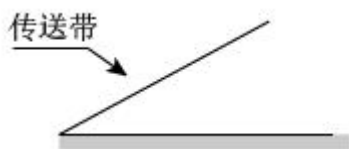
$$\therefore AB = 2CD = 4 ,$$

$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4} .$$

故答案为: $\frac{3}{4}$.

【点睛】 本题考查三角形斜边中线的性质, 余弦三角函数的定义. 利用数形结合的思想是解题关键.

13. 如图, 传送带和地面所成斜坡的坡度 $i = 1:3$, 如果它把某物体从地面送到离地面 10 米高的地方, 那么该物体所经过的路程是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 米.

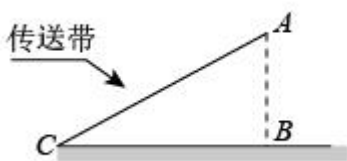


【答案】 $10\sqrt{10}$

【解析】

【分析】首先根据坡度求出 BC ，再利用勾股定理求出 AC 即可得结论.

【详解】解：如图：作 $AB \perp CB$ 于点 B ,



由题意得, $AB = 10$ 米,

$\therefore$ 斜坡的坡度 $i = 1:3$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } \frac{10}{BC} = \frac{1}{3},$$

解得 $BC = 30$,

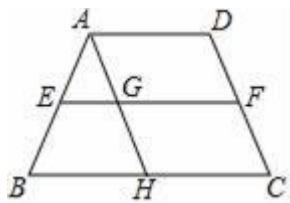
由勾股定理得 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{10^2 + 30^2} = 10\sqrt{10}$ (米),

故答案为: $10\sqrt{10}$.

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用, 熟练掌握和运用解直角三角形的方法是解决本题的关键.

14. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线, $AH \parallel CD$ 分别交 EF 、 BC 于点 G 、 H ,

若 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 则用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{EG} =$ _____.



【答案】 $\frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$.

【解析】

【分析】由梯形中位线定理得到 $EF = \frac{AD + BC}{2}$, 结合梯形的性质, 平行四边形的判定与性质求得 GF 的长度, 利用平面向量表示即可.

【详解】 $\therefore$ 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 则 $AD \parallel HC$, $AH \parallel CD$,

$\therefore$ 四边形 $AHCD$ 是平行四边形.

$\therefore AD = HC$.

又 EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线,

$$\therefore EF = \frac{AD + BC}{2}, \text{ 且 } GF = AD.$$

$$\therefore EG = EF - GF = \frac{AD + BC}{2} - AD = \frac{BC - AD}{2}.$$

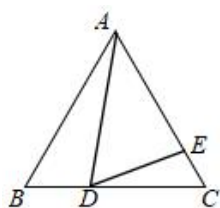
$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{EG} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}.$$

$$\text{故答案是: } \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}.$$

【点睛】考查了平面向量和梯形中位线定理，注意：向量既有大小又有方向.

15. 如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上， $\angle ADE = 60^\circ$ ，如果 $BD:DC = 1:2$ ， $AD = 2$ ，那么 DE 的长等于_____.



$$\text{【答案】 } \frac{4}{3}$$

【解析】

【分析】根据一线三等角证明 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$ ，列出比例式代入数值计算即可.

【详解】 $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB + \angle BAD = 120^\circ$$

$$\because \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB + \angle CDE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDE$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{DC}{DE}$$

$$\because BD:DC = 1:2, AD = 2,$$

$$\text{设 } AB = BC = 3a$$

$$\text{则 } BD = a, DC = 2a$$

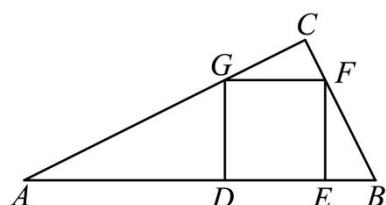
$$\therefore \frac{3a}{2} = \frac{2a}{DE}$$

解得 $DE = \frac{4}{3}$.

故答案为: $\frac{4}{3}$.

【点睛】本题考查了等边三角形的性质，相似三角形的性质与判定，掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

16. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 2$ ， $BC = 1$ ，正方形 $DEFG$ 内接于 $\triangle ABC$ ，点 G 、 F 分别在边 AC 、 BC 上，点 D 、 E 在斜边 AB 上，那么正方形 $DEFG$ 的边长是_____.

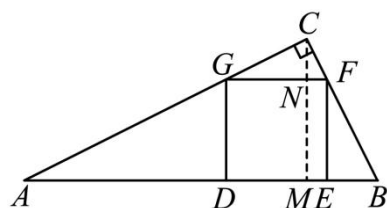


【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{7}$ ## $\frac{2}{7}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M ，交 GF 于点 N ，首先由勾股定理得出 AB 的长，由面积法即可求出 CM 的长，可证得 $\triangle CGF \sim \triangle CAB$ ，再根据相似三角形的性质，即可得出答案.

【详解】解：如图：过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M ，交 GF 于点 N ，



$\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 2$ ， $BC = 1$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CM,$$

$$\therefore CM = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{2 \times 1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$\because$ 正方形 $DEFG$ 内接于 $\triangle ABC$ ，

$\therefore GF = EF = MN$ ， $GF \parallel AB$ ，

$\therefore \triangle CGF \sim \triangle CAB$ ，

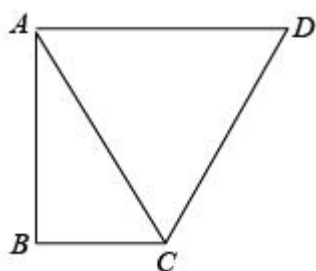
$$\therefore \frac{CN}{CM} = \frac{GF}{AB}, \quad \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5} - EF}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{EF}{\sqrt{5}},$$

$$\text{解得: } EF = \frac{2\sqrt{5}}{7},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\sqrt{5}}{7}.$$

【点睛】 本题考查的是相似三角形的判定和性质、正方形的性质、勾股定理等知识；正确作出辅助线、灵活运用相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

17. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 1$, 以 AC 为边在 $\triangle ABC$ 外作等边 $\triangle ACD$, 设点 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的重心, 则两重心 E 与 F 之间的距离是_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{7}}{3}$ 或 $\frac{1}{3}\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 连接 AE 并延长交 BC 于点 M , 连接 AF 并延长交 CD 于点 N , 连接 MN , 过点 N 作 $NG \perp BC$, 交 BC 的延长线于点 G , 首先根据直角三角形的性质, 可求得 $\angle ACB = 60^\circ$, $AC = 2$, 根据等边三角形的性质, 可得 $CD = AC = 2$, $\angle ACN = 60^\circ$,

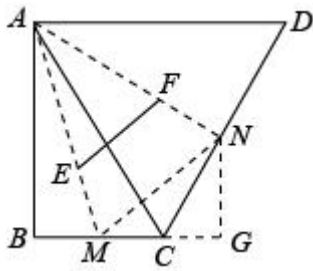
可求得 $\angle NCG = 60^\circ$, $\angle CNG = 30^\circ$, 再根据重心的定义及性质, 可得 $\frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AN} = \frac{2}{3}$, AM 、 AN 分别是 BC 边、 CD 边上的中线, 可求得 $CM = \frac{1}{2}$, $CN = 1$, 即可求得 $CG = \frac{1}{2}$, $NG = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $MG = 1$, 再

利用勾股定理可求得 $MN = \frac{\sqrt{7}}{2}$, 由相似三角形的判定定理, 可证得 $\triangle AEF \sim \triangle AMN$, 可得

$$\frac{EF}{MN} = \frac{AE}{AM} = \frac{2}{3}, \text{ 据此即可求得 } EF \text{ 的长.}$$

【详解】 解: 如图: 连接 AE 并延长交 BC 于点 M , 连接 AF 并延长交 CD 于点 N , 连接 MN , 过点 N 作

$NG \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 G ，



$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $BC = 1$ ，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ， $AC = 2BC = 2$ ，

$\because$ 以 AC 为边在 $\triangle ABC$ 外作等边 $\triangle ACD$ ，

$\therefore CD = AC = 2$ ， $\angle ACN = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle NCG = 180^\circ - \angle ACB - \angle ACN = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle CNG = 30^\circ$ ，

$\because$ 点 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的重心，

$\therefore \frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AN} = \frac{2}{3}$ ， AM 、 AN 分别是 BC 边、 CD 边上的中线，

$\therefore CM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$ ， $CN = \frac{1}{2}CD = 1$ ，

$\therefore CG = \frac{1}{2}$ ， $NG = \sqrt{CN^2 - CG^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore MG = CM + CG = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ，

$\therefore MN = \sqrt{MG^2 + NG^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ，

$\therefore \frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AN} = \frac{2}{3}$ ， $\angle EAF = \angle MAN$ ，

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle AMN$ ，

$\therefore \frac{EF}{MN} = \frac{AE}{AM} = \frac{2}{3}$ ，

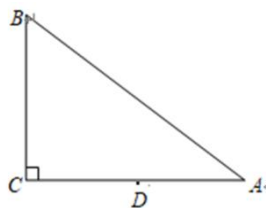
$\therefore EF = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ ，

$\therefore$ 两重心 E 与 F 之间的距离是 $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ，

故答案为： $\frac{\sqrt{7}}{3}$ 。

【点睛】本题考查了直角三角形的性质，等边三角形的性质，重心的定义及性质，相似三角形的判定及性质，作出辅助线是解决本题的关键。

18. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $AC = 8$ ，点 D 是 AC 的中点，点 E 在边 AB 上，将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折，使得点 A 落在点 A' 处，当 $A'E \perp AB$ 时，那么 $A'A$ 的长为_____.

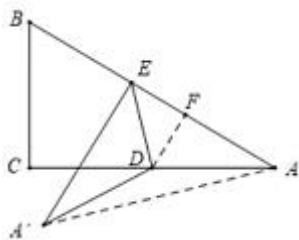


【答案】 $\frac{28}{5}\sqrt{2}$ 或 $\frac{4}{5}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】分两种情形分别求解，作 $DF \perp AB$ 于 F ，连接 AA' ．想办法求出 AE ，利用等腰直角三角形的性质求出 AA' 即可．

【详解】如图，作 $DF \perp AB$ 于 F ，连接 AA' ．



在 $Rt\triangle ACB$ 中， $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 6$ ，

$\because \angle DAF = \angle BAC$ ， $\angle AFD = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle AFD \sim \triangle ACB$ ，

$$\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC},$$

$$\therefore \frac{DF}{6} = \frac{4}{10} = \frac{AF}{8},$$

$$\therefore DF = \frac{12}{5}, \quad AF = \frac{16}{5},$$

$\because A'E \perp AB$ ，

$\therefore \angle AEA' = 90^\circ$ ，

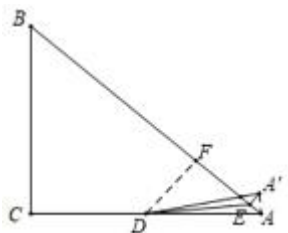
由翻折不变性可知： $\angle AED = 45^\circ$ ，

$$\therefore EF = DF = \frac{12}{5},$$

$$\therefore AE = A'E = \frac{12}{5} + \frac{16}{5} = \frac{28}{5},$$

$$\therefore AA' = \frac{28}{5}\sqrt{2},$$

如图，作 $DF \perp AB$ 于 F ，当 $EA' \perp AB$ 时，同法可得 $AE = \frac{16}{5} - \frac{12}{5} = \frac{4}{5}$ ， $AA' = \sqrt{2} AE = \frac{4}{5}\sqrt{2}$ 。



故答案为 $\frac{28}{5}\sqrt{2}$ 或 $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ 。

【点睛】本题考查翻折变换，相似三角形的判定和性质，解直角三角形等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，属于中考填空题中的压轴题。

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 计算：
$$\frac{\tan 45^\circ - \cos 60^\circ}{2 \sin 30^\circ} + \cot^2 60^\circ$$

【答案】 $\frac{5}{6}$

【解析】

【分析】先将特殊三角函数值分别算出原算式中的每一项，然后根据实数混合运算的法则进行计算即可。

【详解】解：
$$\frac{\tan 45^\circ - \cos 60^\circ}{2 \sin 30^\circ} + \cot^2 60^\circ$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - \frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

【点睛】本题考查的是特殊三角函数值，熟记特殊角度的三角函数值是解答此题的关键。

20. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像经过点 $A(1, 0)$ 、 $B(0, -5)$ 、 $C(2, 3)$ 。

3). 求这个二次函数的解析式，并求出其图像的顶点坐标和对称轴。

【答案】 $y = -x^2 + 6x - 5$ ，函数图像的顶点坐标为 $(3, 4)$ ，对称轴为直线 $x = 3$ 。

【解析】

【分析】（1）分别把 $A(1, 0)$ 、 $B(0, -5)$ 、 $C(2, 3)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ ，利用待定系数法可得 $a=1$ ， $b=6$ ， $c=-5$ ，从而得出这个二次函数关系式；然后将函数解析式化为顶点式，即可得到答案。

【详解】解：由这个函数的图像经过点 $A(1, 0)$ 、 $B(0, -5)$ 、 $C(2, 3)$ ，得

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ c=-5, \\ 4a+2b+c=3. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} a=-1, \\ b=6, \\ c=-5. \end{cases}$$

所以，所求函数的解析式为 $y = -x^2 + 6x - 5$ 。

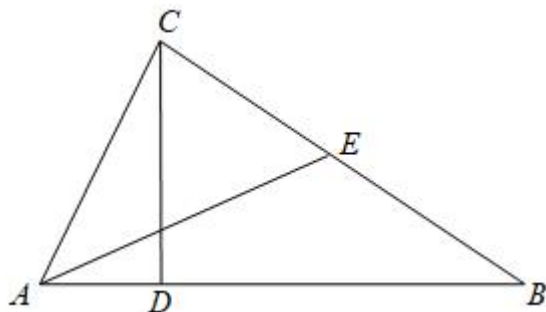
$$y = -x^2 + 6x - 5 = -(x-3)^2 + 4.$$

所以，这个函数图像的顶点坐标为 $(3, 4)$ ，

对称轴为直线 $x = 3$ 。

【点睛】本题考查了待定系数法求二次函数的解析式：在利用待定系数法求二次函数关系式时，要根据题目给定的条件，选择恰当的方法设出关系式，从而代入数值求解。一般地，当已知抛物线上三点时，常选择一般式，用待定系数法列三元一次方程组来求解。也考查了二次函数的性质。

21. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $CD \perp AB$ ，垂足为点 D ， $AD = 2$ ， $BD = 6$ ， $\tan \angle B = \frac{2}{3}$ ，点 E 是边 BC 的中点。



(1) 求边 AC 的长；

(2) 求 $\angle EAB$ 的正弦值。

【答案】(1) $2\sqrt{5}$

(2) $\sin \angle EAB = \frac{2\sqrt{29}}{29}$

【解析】

【分析】(1) 由 $BD = 6$ ， $\tan \angle B = \frac{2}{3}$ 求出 $CD = 4$ ，在 $Rt\triangle ADC$ 中由勾股定理可求出 AC 的长；

(2) 过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F ，证明 $\triangle BEF \sim \triangle BCD$ ，根据相似三角形的性质求出 EF ， DF 的长，根据

勾股定理求出 AE 的长，再根据正弦的定义求解即可.

【小问 1 详解】

$$\because CD \perp AB$$

$\therefore \triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 均为直角三角形,

$$\because \tan \angle B = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{2}{3}$$

$$\because BD = 6,$$

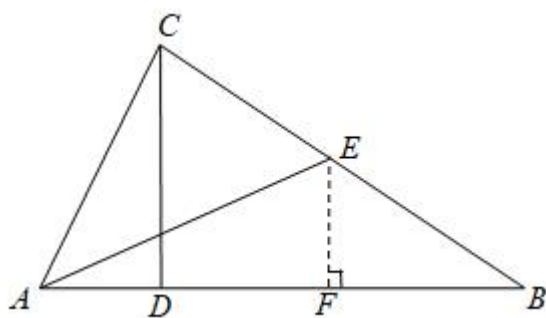
$$\therefore CD = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$$\because AD = 2$$

由勾股定理得, $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

【小问 2 详解】

过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F , 如图,



$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore EF \parallel CD$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle BCD$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{BF}{BD} = \frac{EF}{CD}$$

$\because$ 点 E 是边 BC 的中点

$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC$$

$$\therefore \frac{BF}{BD} = \frac{EF}{CD} = \frac{1}{2}$$

$$\because CD = 4, BD = 6$$

$$\therefore EF = 2, BF = 3$$

$$\therefore DF = 3$$

$$\therefore AF = DF + DF = 2 + 3 = 5$$

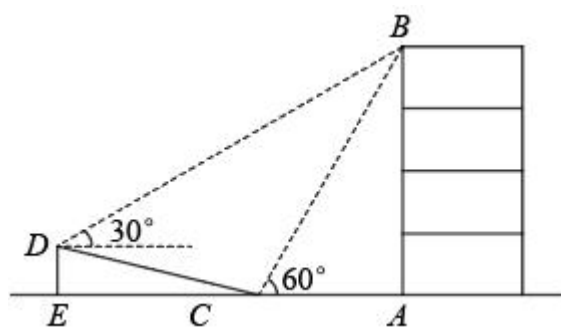
在 $Rt\triangle EAF$ 中, $\therefore AF^2 + EF^2 = AE^2$

$$\therefore AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$\therefore \sin \angle EAB = \frac{EF}{AE} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

【点睛】 本题主要考查了勾股定理, 相似三角形的判定与性质, 解直角三角形等知识, 正确作出辅助线构造直角三角形是解答本题的关键.

22. 如图, 在大楼 AB 的正前方有一斜坡 CD , $CD = 26$ 米, 坡度 $i = 1:2.4$, 小明在斜坡下端 C 处测得楼顶点 B 的仰角为 60° , 在斜坡上的点 D 处测得楼顶 B 的仰角为 30° , DE 与地面垂直, 垂足为 E , 其中点 A 、 C 、 E 在同一直线上.



(1) 求 DE 的值;

(2) 求大楼 AB 的高度 (结果保留根号)

【答案】 (1) 10 米 (2) $(15 + 12\sqrt{3})$ 米

【解析】

【分析】 (1) 在 $Rt\triangle DCE$ 中, 利用坡度的定义及勾股定理求出 DE 的长即可;

(2) 过 D 作 DF 垂直于 AB , 交 AB 于点 F , 设 $BF = x$ 米, 可求得 $DF = AE = \sqrt{3}x$, 表示出 AC , AB , 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 利用三角函数列出关于 x 的方程, 求出方程的解得到 x 的值, 即可确定出 AB 的长.

【小问 1 详解】

$\therefore$ 在大楼 AB 的正前方有一斜坡 CD , 坡度 $i = 1:2.4 = 5:12$

设 $DE = 5x$, $EC = 12x$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle DCE$ 中, 根据勾股定理得: $CD = \sqrt{DE^2 + EC^2} = 13x$

$\therefore CD = 26$ 米

$\therefore 13x = 26$ 米

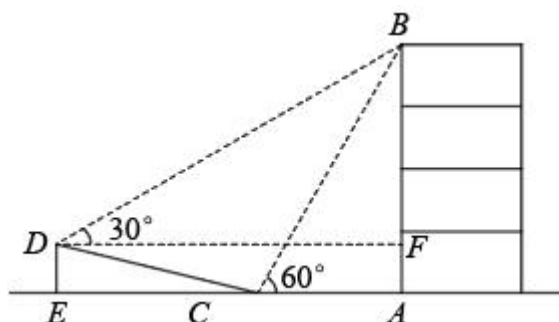
$$\therefore x = 2 \text{ 米}$$

$$\therefore DE = 5x = 10 \text{ 米}$$

答: DE 为 10 米.

【小问 2 详解】

作 $DF \perp AB$, 交 AB 于点 F ,



由 (1) $DE = 10$, $EC = 24$

设 $BF = x$ 米, 在 $Rt \triangle BDF$ 中,

$$\because \angle BDF = 30^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle BDF = \frac{BF}{DF} = \frac{x}{DF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore DF = \sqrt{3}x \text{ 米}, CA = (\sqrt{3}x - 24) \text{ 米}, AB = (x + 10) \text{ 米}$$

在 $Rt \triangle BCA$ 中,

$$\because \angle BCA = 60^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle BCA = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore \frac{x + 10}{\sqrt{3}x - 24} = \sqrt{3},$$

$$\therefore x = (5 + 12\sqrt{3}) \text{ 米},$$

$$\therefore AB = (15 + 12\sqrt{3}) \text{ 米},$$

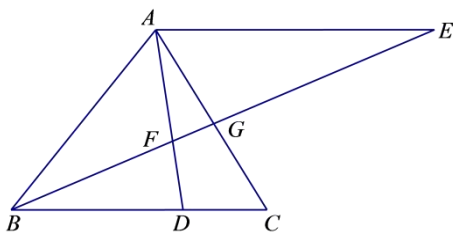
答: 大楼 AB 的高度为 $(15 + 12\sqrt{3})$ 米.

【点睛】 本题考查解直角三角形的实际应用, 勾股定理. 解题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件, 利用坡度和锐角三角函数解答问题.

23. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $AE \parallel BC$, BE 与 AD 、 AC 分别相交于点 F 、 G , $AF^2 = FG \cdot FE$.

(1) 求证: $\triangle CAD \sim \triangle CBG$;

(2) 联结 DG , 求证: $DG \cdot AE = AB \cdot AG$.



【答案】(1) 见解析；(2) 见解析；

【解析】

【分析】(1) 由 $AF^2 = FG \cdot FE$ 及 $\angle AFG = \angle EFA$, 证得 $\triangle FAG \sim \triangle FEA$, 结合 $AE \parallel BC$, 证得 $\angle EBC = \angle FAG$, 从证得结论；

(2) 由 (1) 的结论得到 $\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CG}$, 证得 $\triangle CDG \sim \triangle CAB$, 结合 $AE \parallel BC$, 证得 $\frac{AG}{AE} = \frac{GC}{CB}$, 继而证得结论.

【详解】(1) $\because AF^2 = FG \cdot FE$,

$$\therefore \frac{AF}{FG} = \frac{FE}{AF}.$$

又 $\because \angle AFG = \angle EFA$,

$$\therefore \triangle FAG \sim \triangle FEA.$$

$$\therefore \angle FAG = \angle E.$$

$$\because AE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle E = \angle EBC.$$

$$\therefore \angle EBC = \angle FAG.$$

又 $\because \angle ACD = \angle BCG$,

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle CBG.$$

(2) $\because \triangle CAD \sim \triangle CBG$,

$$\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CG}.$$

又 $\because \angle DCG = \angle ACB$,

$$\therefore \triangle CDG \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{DG}{AB} = \frac{CG}{CB}.$$

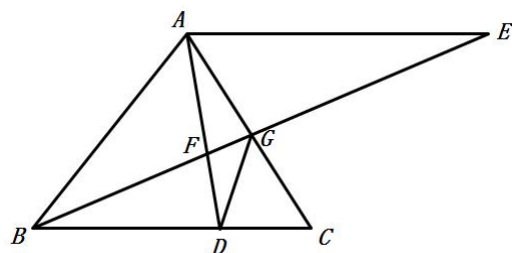
$$\therefore AE \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AE}{CB} = \frac{AG}{GC}.$$

$$\therefore \frac{AG}{AE} = \frac{GC}{CB},$$

$$\therefore \frac{DG}{AB} = \frac{AG}{AE},$$

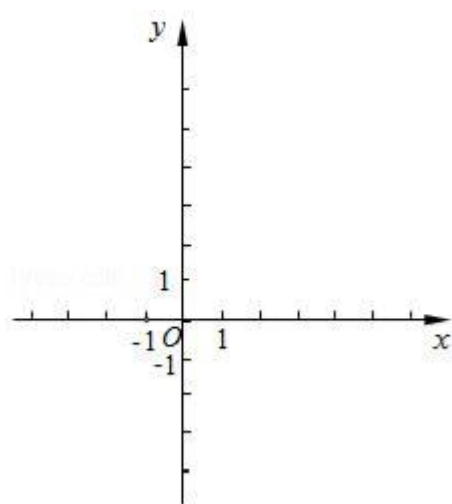
$$\therefore DG \cdot AE = AB \cdot AG.$$



【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质，平行线分线段成比例定理，灵活运用比例的性质以及中间比是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy (如图) 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 经过点 $A(4, 0)$ 、 $B(2, 2)$, 与 y 轴的交点为 C .

- (1) 试求这个抛物线的表达式;
- (2) 如果这个抛物线的顶点为 M , 求 $\triangle AMC$ 的面积;
- (3) 如果这个抛物线的对称轴与直线 BC 交于点 D , 点 E 在线段 AB 上, 且 $\angle DOE = 45^\circ$, 求点 E 的坐标.



【答案】(1) $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$; (2) $\frac{3}{2}$; (3) 点 E 的坐标为 $(3, 1)$.

【解析】

【分析】(1) 根据点 A , B 的坐标, 利用待定系数法即可求出抛物线的表达式;

(2) 利用配方法可求出点 M 的坐标, 利用二次函数图象上点的坐标特征可求出点 C 的坐标, 过点 M 作 $MH \perp y$ 轴, 垂足为点 H , 利用分割图形求面积法可得出 $\triangle AMC$ 的面积;

(3) 连接 OB , 过点 B 作 $BG \perp x$ 轴, 垂足为点 G , 则 $\triangle BGA$, $\triangle OCB$ 是等腰直角三角形, 进而可得出 $\angle BAO = \angle DBO$, 由 $\angle DOB + \angle BOE = 45^\circ$, $\angle BOE + \angle EOA = 45^\circ$ 可得出 $\angle EOA = \angle DOB$, 进而可证出 $\triangle AOE \sim \triangle BOD$, 利用相似三角形的性质结合抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ 可求出 AE 的长, 过点 E 作 $EF \perp x$ 轴, 垂足为点 F , 则 $\triangle AEF$ 为等腰直角三角形, 根据等腰直角三角形的性质可得出 AF 、 EF 的长, 进而可得出点 E 的坐标.

【详解】解: (1) 将 $A(4, 0)$, $B(2, 2)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 2$, 得:
$$\begin{cases} 16a + 4b + 2 = 0 \\ 4a + 2b + 2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$.

$$(2) \because y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{9}{4},$$

$\therefore$ 顶点 M 的坐标为 $(1, \frac{9}{4})$.

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 2,$$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 2)$.

过点 M 作 $MH \perp y$ 轴, 垂足为点 H , 如图 1 所示.

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle AMC} &= S_{\text{梯形 } AOHM} - S_{\triangle AOC} - S_{\triangle CHM}, \\ &= \frac{1}{2}(HM + AO) \cdot OH - \frac{1}{2}AO \cdot OC - \frac{1}{2}CH \cdot MH, \\ &= \frac{1}{2} \times (1 + 4) \times \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times (\frac{9}{4} - 2) \times 1, \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(3) 连接 OB , 过点 B 作 $BG \perp x$ 轴, 垂足为点 G , 如图 2 所示.

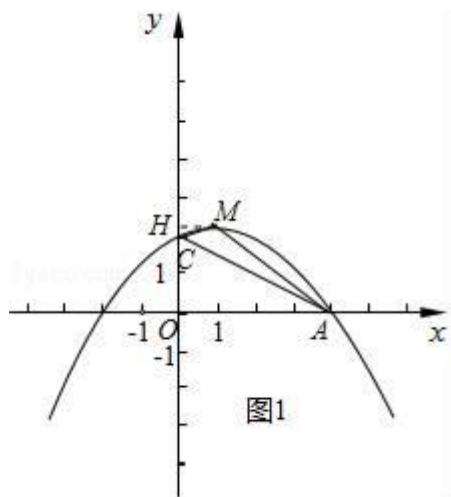
$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(2, 2)$, 点 A 的坐标为 $(4, 0)$,

$$\therefore BG = 2, GA = 2,$$

$\therefore \triangle BGA$ 是等腰直角三角形,

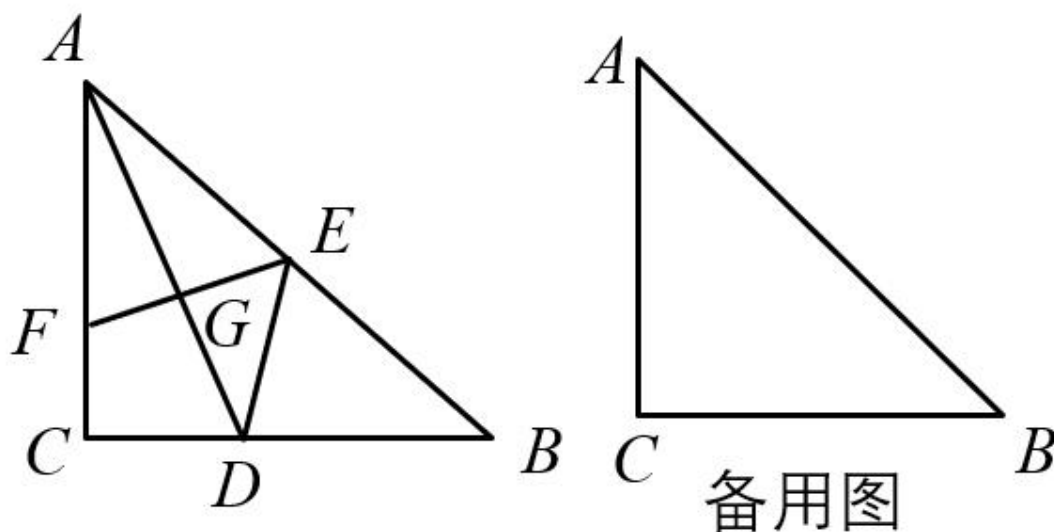
$$\therefore \angle BAO = 45^\circ.$$

同理, 可得: $\angle BOA = 45^\circ$.



【点睛】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式、二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的性质、三角形（梯形）的面积、相似三角形的判定与性质以及等腰直角三角形，解题的关键是：（1）根据点的坐标，利用待定系数法求出二次函数表达式；（2）利用分割图形求面积法结合三角形、梯形的面积公式，求出 $\triangle AMC$ 的面积；（3）通过构造相似三角形，利用相似三角形的性质求出 AE 的长度。

25. 如图，已知在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4$ ，点 D 为边 BC 上一动点（与点 B 、 C 不重合），点 E 为边 AB 上一点， $\angle EDB = \angle ADC$ ，过点 E 作 $EF \perp AD$ ，垂足为点 G ，交射线 AC 于点 F 。



- (1) 如果点 D 为边 BC 的中点，求 $\angle DAB$ 的正切值；
- (2) 当点 F 在边 AC 上时，设 $CD = x$ ， $CF = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式及定义域；
- (3) 联结 DF 如果 $\triangle CDF$ 与 $\triangle AGE$ 相似，求线段 CD 的长。

【答案】 (1) $\tan \angle DAB = \frac{1}{3}$ ； (2) $y = -2x + 4 (0 < x \leq 2)$ ； (3) $4\sqrt{2} - 4$ 、 $8 - 4\sqrt{3}$ 或 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 。

【解析】

【分析】 (1) 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H ，在 $Rt\triangle ACB$ 中，利用勾股定理得 AD 、 AB 的长，再结合等积

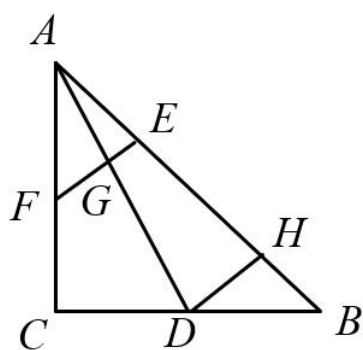
法，解得 DH、AH 的长即可解题；

(2) 根据相似三角形对应边成比例的性质，表示 $EH = \frac{4(4-x)}{x+4}$ ，再证明 $\triangle AFE \sim \triangle BDE$

$$\text{由 } \frac{AF}{DB} = \frac{AE}{BE} \text{ 即 } \frac{4-y}{4-x} = \frac{4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}(4-x)}{x+4}}{\frac{4\sqrt{2}(4-x)}{x+4}} \text{ 得到与 } x \text{ 的关系；}$$

(3) 根据相似三角形对应边成比例的性质，结合 (2) 中 y 关于 x 的函数解析式联立方程组，继而解得 x、y 的值即可解题.

【详解】(1) 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H,



在 $Rt\triangle ACB$ 中， $AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = 2\sqrt{5}$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} DB \cdot AC = 4$$

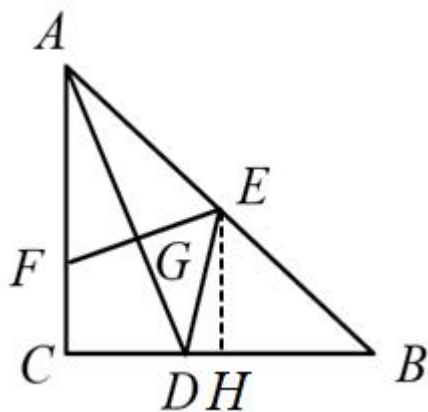
$$\therefore S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AB \cdot DH$$

$$\therefore DH = \sqrt{2},$$

$$\therefore AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \tan \angle DAB = \frac{DH}{AH} = \frac{1}{3};$$

(2) 过 E 作 $EH \perp CB$ 于 H



$$\therefore \angle EDB = \angle ADC, \quad \angle C = \angle EHD = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle EHD.$$

$$\therefore \frac{AC}{CD} = \frac{EH}{DH} \quad \text{即} \quad \frac{4}{x} = \frac{EH}{4-x-EH}.$$

$$\therefore EH = \frac{4(4-x)}{x+4}.$$

$$\therefore EH \perp CB, \quad \angle ACB = 90^\circ, \quad AC = BC = 4$$

$$\therefore EB = \sqrt{2}EH = \frac{4\sqrt{2}(4-x)}{x+4}, \quad AB = 4\sqrt{2}.$$

$$\therefore AE = 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}(4-x)}{x+4}$$

$$\therefore EF \perp AD, \quad \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AFG = \angle ADC.$$

$$\therefore \angle EDB = \angle ADC$$

$$\therefore \angle AFG = \angle EDB.$$

$$\therefore \angle FAE = \angle B = 45^\circ$$

$$\therefore \triangle AFE \sim \triangle BDE.$$

$$\therefore \frac{AF}{DB} = \frac{AE}{BE} \quad \text{即} \quad \frac{4-y}{4-x} = \frac{4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}(4-x)}{x+4}}{\frac{4\sqrt{2}(4-x)}{x+4}}.$$

整理得, $y = -2x + 4 (0 < x \leq 2)$;

(3) 在 $\text{Rt}\triangle MDB$ 中, $DB = 4 - x$,

$$\text{所以 } MD=MB=\frac{\sqrt{2}}{2}(4-x).$$

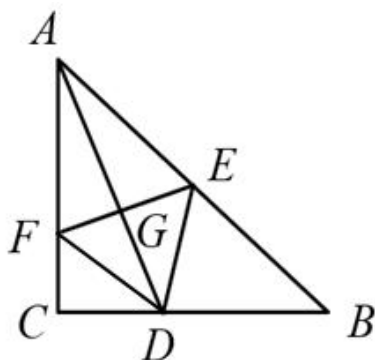
$$\text{在 Rt}\triangle ADM \text{ 中, } AM=AB-MB=4\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}(4-x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(4+x).$$

$$\text{所以 } \tan \angle DAB=\frac{DM}{AM}=\frac{4-x}{4+x}.$$

按照点 F 的位置, 分两种情况讨论 $\triangle CDF$ 与 $\triangle AGE$ 相似:

①点 F 在线段 AC 上, 此时 $y=4-2x$.

如图,



$$\text{如果 } \angle FDC=\angle DAB, \text{ 由 } \tan \angle FDC=\tan \angle DAB, \text{ 得 } \frac{y}{x}=\frac{4-x}{4+x}.$$

$$\text{结合 } y=4-2x, \text{ 整理, 得 } x^2+8x+16=0.$$

$$\text{解得 } x=4\sqrt{2}-4 \text{ 或 } -4\sqrt{2}-4 \text{ (舍去),}$$

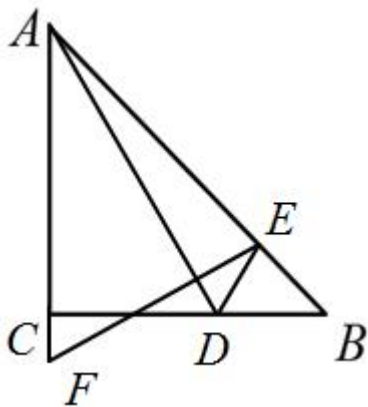
$$\text{如果 } \angle CFD=\angle DAB, \text{ 由 } \tan \angle CFD=\tan \angle DAB, \text{ 得 } \frac{x}{y}=\frac{4-x}{4+x}.$$

$$\text{结合 } y=4-2x, \text{ 整理, 得 } x^2-16x+16=0.$$

$$\text{解得 } x=8-4\sqrt{3} \text{ 或 } 8+4\sqrt{3} \text{ (舍去)}$$

②点 F 在线段 AC 的延长线上, 此时 $y=2x-4$

如图



如果 $\angle FDC = \angle DAB$, 由 $\frac{y}{x} = \frac{4-x}{4+x}$ 结合 $y=2x-4$, 整理, 得 $3x^2 - 16 = 0$.

解得 $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (舍去)

如果 $\angle CFD = \angle DAB$, $\frac{x}{y} = \frac{4-x}{4+x}$ 与 $y=2x-4$

整理, 得 $3x^2 - 8x + 16 = 0$.

此方程无解.

综上, CD 的值为 $4\sqrt{2}-4$ 、 $8-4\sqrt{3}$ 或 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】 本题考查勾股定理、相似三角形的性质, 涉及解二元一次方程组等知识, 解题关键是根据题意利用相似三角形性质构造方程.

