

2022 年上海市徐汇区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题：(本大题共 6 小题，每题 4 分，满分 24 分)

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $AC = 4$ ，则 $\sin A$ 的值为 ()

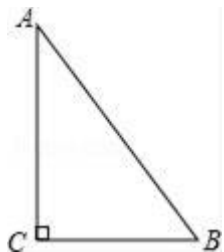
- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据三角函数的定义就可以求解.

【详解】根据题意画出图形如图所示：



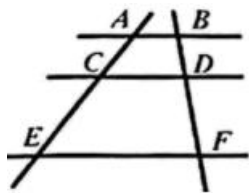
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $AC = 4$ ，

$\therefore BC = 3$. 则 $\sin A = \frac{3}{5}$.

故选 A.

【点睛】考查锐角三角函数的定义及运用：在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比边.

2. 如图，已知 $AB \parallel CD \parallel EF$ ， $BD:DF=2:3$ ，那么下列结论中，正确的是 ()



- A. $CD:EF = 2:5$ B. $AB:CD = 2:5$ C. $AC:AE = 2:5$ D. $CE:EA = 2:5$

【答案】C

【解析】

【分析】三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例，据此可得结论.

【详解】解： $\because AB \parallel CD \parallel EF$ ， $BD:DF=2:3$ ，

$\therefore CD:EF$ 的值无法确定，故 A 选项错误；

$AB:CD$ 的值无法确定，故 B 选项错误；

$AC: AE=2: 5$, 故 C 选项正确;

$CE: EA=3: 5$, 故 D 选项错误;

故选: C.

【点睛】 本题考查了平行线分线段成比例: 三条平行线截两条直线, 所得的对应线段成比例.

3. 无人机在空中点 A 处观察地面上的小丽所在位置 B 处的俯角是 50° , 那么小丽在地面点 B 处观察空中点 A 处的仰角是 ()

A. 40°

B. 50°

C. 60°

D. 70°

【答案】 B

【解析】

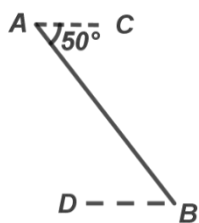
【分析】 根据仰角是向上看的视线与水平线所成的角、俯角是向下看的视线与水平线所成的角以及平行线的性质求解即可.

【详解】 解: 如图, 由题意, $\angle A=50^\circ$, $AC \parallel BD$,

$\therefore \angle B = \angle A = 50^\circ$,

故小丽在地面点 B 处观察空中点 A 处的仰角是 50° ,

故选: B.



【点睛】 本题考查仰角、俯角、平行线的性质, 熟知仰角、俯角的概念是解答的关键.

4. 已知点 C 是线段 AB 的中点, 下列结论中正确的是 ()

A. $AC = BC$

B. $AC + BC = 0$

C. $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$

D. $|\overrightarrow{CA}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA}|$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据题意画出图形, 因为点 C 是线段 AB 的中点, 所以根据线段中点的定义解答.

【详解】 解: 如图所示



$\therefore$ 点 C 是线段 AB 的中点

$\therefore$ A、 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, 故错误;

B、 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, 故本选项正确;

C、 $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, 故本选项错误;

D、 $|\overrightarrow{CA}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}|$ ，故本选项正确。

故选：D。

【点睛】本题主要考查线段的中点定义，难度不大，注意向量的方向及运算法则。

5. 下列对二次函数 $y = -2(x+1)^2 + 3$ 的图像的描述中，不正确的是 ()

A. 抛物线开口向下

B. 抛物线的对称轴是直线 $x = -1$

C. 抛物线与 y 轴的交点坐标是 $(0, 3)$

D. 抛物线的顶点坐标是 $(-1, 3)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次函数的性质对各小题分析判断即可得解。

【详解】解：∵ $a = -2 < 0$ ，∴ 抛物线的开口向下，故选项 A 正确，不符合题意；

∴ 对称轴为直线 $x = -1$ ，故选项 B 正确，不符合题意；

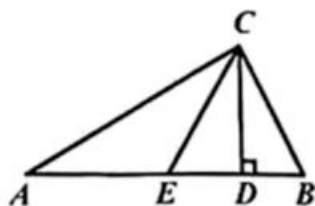
当 $x = 0$ 时， $y = -2(0+1)^2 + 3 = -2 + 3 = 1$ ，即抛物线与 y 轴的交点坐标是 $(0, 1)$ ，故选项 C 错误，符合题意；

顶点坐标为 $(-1, 3)$ ，故选项 D 正确，不符合题意；

故选：C。

【点睛】本题考查了二次函数的性质，主要利用了抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标。熟练掌握二次函数的性质是解答本题的关键。

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 、 CE 分别是斜边 AB 上的高和中线，下列结论不一定成立的是 ()



A. $\angle A = \angle DCB$

B. $\tan \angle ECB = \frac{CD}{AD}$

C. $CD^2 = AD \cdot DB$

D. $BC^2 = 2DB \cdot EC$

【答案】B

【解析】

【分析】根据 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ， $\angle B$ 的余角相等即可判断 A，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，即 $EB = EC$ ，可得 $\angle ECB = \angle B$ ，则 $\tan \angle ECB = \tan B = \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{CB} = \tan \angle DCA = \frac{AD}{CD}$ ，

即可判断 B 选项，根据 A 选项可得 $\tan A = \tan \angle DCB$ ，即 $\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD}$ ，即可判断 C，根据 $\sin A = \sin \angle DCB$ ，

可得 $\frac{BC}{AB} = \frac{DB}{BC}$, $EC = 2AB$, 即可判断 D 选项.

【详解】解: $\because \angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$,

$$\therefore \angle B + \angle A = \angle B + \angle DCB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle A = \angle DCB$$

故 A 选项正确, 不符合题意;

$\because CD$ 、 CE 分别是斜边 AB 上的高和中线,

$$\therefore EB = EC, \angle DCA + \angle A = 90^\circ, \angle B + \angle A = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ECB = \angle B, \angle DCA = \angle B$$

$$\therefore \tan \angle ECB = \tan B = \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{CB} = \tan \angle DCA = \frac{AD}{CD}$$

$$\therefore \tan \angle ECB = \frac{AD}{CD}$$

故 B 选项不正确, 符合题意;

$$\because \angle A = \angle DCB$$

$$\therefore \tan A = \tan \angle DCB, \text{ 即 } \frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD},$$

$$\therefore CD^2 = AD \cdot DB$$

故 C 选项正确, 不符合题意;

$$\because \angle A = \angle DCB$$

$$\therefore \sin A = \sin \angle DCB, \text{ 即 } \frac{BC}{AB} = \frac{DB}{BC},$$

$$\therefore BC^2 = AB \cdot DB$$

$$\text{又 } EC = \frac{1}{2} AB$$

$$\therefore BC^2 = 2DB \cdot EC$$

故 D 选项正确, 不符合题意.

故选 B.

【点睛】本题考查了三角形中线, 高线, 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 锐角三角函数, 找出图中相等的角是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 小题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $2\vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{a} - 4\vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$

【解析】

【分析】根据向量的线性运算法则计算即可.

【详解】解: $2\vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{a} - 4\vec{b}) = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b},$

故答案为: $\frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}.$

【点睛】本题考查向量的线性运算, 熟练掌握向量的线性运算法则是解答的关键.

8. 冬日暖阳, 下午 4 点时分, 小明在学校操场晒太阳, 身高 1.5 米的他, 在地面上的影长为 2 米, 则此时高度为 9 米的旗杆在地面的影长为_____米.

【答案】 12

【解析】

【分析】设高度为 9 米的旗杆在地面的影长为 x 米, 根据同一时刻, 物高与影长成比例解答即可.

【详解】解: 设高度为 9 米的旗杆在地面的影长为 x 米,

根据题意, 得: $\frac{2}{1.5} = \frac{x}{9},$

解得: $x=12,$

$\therefore$ 高度为 9 米的旗杆在地面的影长为 12 米,

故答案为: 12.

【点睛】本题考查相似三角形的应用, 熟知同一时刻, 物高与影长成比例是解答的关键.

9. 将抛物线 $y = 2x^2 + 3$ 先向左平移 1 个单位, 再向下平移 4 个单位后, 所得抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = 2(x+1)^2 - 1$

【解析】

【分析】抛物线的平移规律: 左加右减, 上加下减, 根据平移规律直接作答即可.

【详解】解: 抛物线 $y = 2x^2 + 3$ 先向左平移 1 个单位, 再向下平移 4 个单位后, 所得抛物线的表达式是:

$y = 2(x+1)^2 + 3 - 4,$ 即 $y = 2(x+1)^2 - 1,$

故答案为: $y = 2(x+1)^2 - 1$

【点睛】本题考查的是抛物线的平移, 掌握“抛物线的平移规律”是解本题的关键.

10. 如果点 $A(2, y_1), B(5, y_2)$ 在二次函数 $y = x^2 - 2x + n$ 图像上, 那么 y_1 _____ y_2 (填 $>$ 、 $=$ 、 $<$)

【答案】 $<$

【解析】

【分析】题需先根据已知条件求出二次函数的图象的对称轴, 再根据点 A 、 B 的横坐标的大小即可判断出 y_1 与 y_2 的大小关系.

【详解】解: $\because$ 二次函数 $y = x^2 - 2x + n$ 的图象的对称轴是直线 $x=1$, 且 $a=1>0$,

在对称轴的右边 y 随 x 的增大而增大,

$\because$ 点 $A(2, y_1)$ 、 $B(5, y_2)$ 是二次函数 $y=x^2-2x+1$ 的图象上两点,

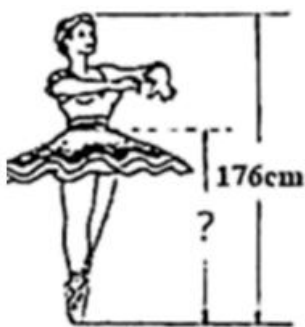
$2 < 5$,

$\therefore y_1 < y_2$.

故答案为: $<$.

【点睛】 本题主要考查了二次函数图象上点的坐标特征, 在解题时要能灵活应用二次函数的图象和性质以及点的坐标特征是本题的关键.

11. 如图, 某人跳芭蕾舞, 踮起脚尖时显得下半身比上半身更修长. 若以裙子的腰节为分界点, 身材比例正好符合黄金分割, 已知从脚尖到头顶高度为 176cm , 那么裙子的腰节到脚尖的距离为 _____ cm . (结果保留根号)



【答案】 $(88\sqrt{5}-88)$ 或 $(-88+88\sqrt{5})$

【解析】

【分析】 根据黄金分割的黄金数得腰节到脚尖的距离: 脚尖到头顶距离 $= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 即可解答.

【详解】 解: 设腰节到脚尖的距离为 $x\text{cm}$, 根据题意,

$$\text{得: } \frac{x}{176} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

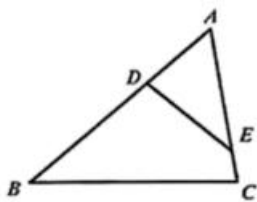
$$\text{解得: } x = 88\sqrt{5} - 88,$$

$\therefore$ 腰节到脚尖的距离为 $(88\sqrt{5}-88)\text{cm}$,

故答案为: $88\sqrt{5}-88$.

【点睛】 本题考查黄金分割, 熟知黄金分割和黄金数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ = 较长线段: 全线段是解答的关键.

12. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=8$, $BC=7$, 点 D 、 E 分别在边 AB , AC 上, 已知 $AE=4$, $\angle AED = \angle B$, 则线段 DE 的长为 _____.



【答案】 3.5 或 $\frac{7}{2}$ 或 $3\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 先证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 可得 $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$, 再代入数据进行计算即可.

【详解】 解: $\because \angle AED = \angle B, \angle A = \angle A,$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC},$$

$\because AB = 8, BC = 7, AE = 4,$

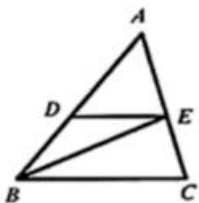
$$\therefore \frac{4}{8} = \frac{DE}{7},$$

$$\therefore DE = 3.5,$$

故答案为: 3.5

【点睛】 本题考查的是相似三角形的判定与性质, 掌握“两个角对应相等的两个三角形相似”是解本题的关键.

13. 如图, BE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 过点 E 作 $ED \parallel BC$ 交边 AB 于点 D . 如果 $AD = 3$, $DE = 2$, 则 BC 的长度为_____.



【答案】 $\frac{10}{3}$ 或 $3\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 先根据角平分线定义和平行线性质证得 $\angle DBE = \angle DEB$, $\angle ADE = \angle ABC$, 再根据等角对等边证得 $DE = BD$, 然后证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 利用相似三角形的性质求解即可.

【详解】 解: $\because BE$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$\therefore \angle DBE = \angle EBC,$

$\because ED \parallel BC,$

$\therefore \angle EBC = \angle DEB, \angle ADE = \angle ABC,$

$$\therefore \angle DBE = \angle DEB,$$

$$\therefore BD = DE = 2,$$

$$\therefore AB = AD + BD = 5,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABC, \quad \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

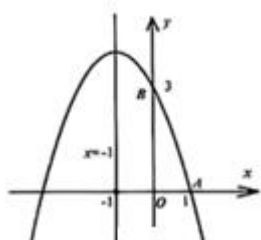
$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}, \quad \text{即} \quad \frac{3}{5} = \frac{2}{BC},$$

$$\text{解得: } BC = \frac{10}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{10}{3}.$$

【点睛】本题考查角平分线的定义、平行线的性质、等腰三角形的判定、相似三角形的判定与性质，熟练掌握等角对等边证明边相等和相似三角形的判定与性质是解答的关键。

14. 二次函数的图像如图所示，对称轴为直线 $x = -1$ ，根据图中信息可求得该二次函数的解析式为_____.



【答案】 $y = -x^2 - 2x + 3$

【解析】

【分析】根据图象与 x 、 y 轴的交点坐标和对称轴，利用待定系数法求二次函数的解析式即可。

【详解】解：设该二次函数的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$),

由图象知：当 $x = 1$ 时， $y = 0$ ，当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，又对称轴为直线 $x = -1$,

$$\text{则} \begin{cases} a + b + c = 0 \\ c = 3 \\ -\frac{b}{2a} = -1 \end{cases}, \quad \text{解得:} \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{该二次函数的解析式为 } y = -x^2 - 2x + 3,$$

$$\text{故答案为: } y = -x^2 - 2x + 3.$$

【点睛】本题考查二次函数的图象与性质、待定系数法求二次函数的解析式，熟练掌握待定系数法求二次函数的解析式是解答的关键。

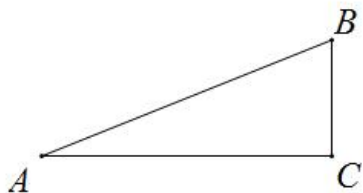
15. 小明同学逛书城，从地面一楼乘自动扶梯，随扶梯移动了 13 米，到达距离地面 5 米高的二楼，则该自动扶梯的坡度 $i =$ _____.

【答案】 5: 12

【解析】

【分析】 先利用勾股定理求得水平距离，再利用坡度的知识即可求解.

【详解】 解：如图，根据题意知： $AB=13$ 米， $BC=5$ 米，



$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{米}),$$

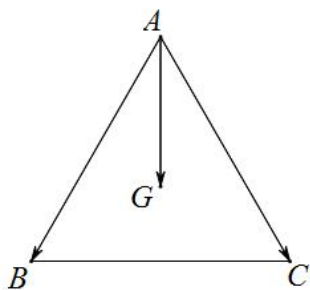
$$\therefore \text{该自动扶梯的坡度 } i = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12},$$

$$\therefore \text{该自动扶梯的坡度为 } i = 5: 12,$$

故答案为： 5: 12.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，理解坡度的定义是解题的关键.

16. 如图，已知点 G 是等边 $\triangle ABC$ 的中心，记向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，则向量 $\overrightarrow{AG} =$ _____. (用向量 $x\vec{a} + y\vec{b}$ 的形式表示，其中 x, y 为实数)

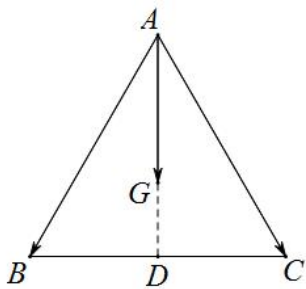


【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】 首先根据题意画出图形，由点 G 是等边 $\triangle ABC$ 的中心，即可得 $BD=CD=\frac{1}{2}BC$ ， $AG=\frac{2}{3}AD$ ，然后利用三角形法则求得 $\overrightarrow{BD}$ 的值，继而求得 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AG}$ 的值.

【详解】 解： $\because$ 点 G 是等边 $\triangle ABC$ 的中心，



$$\therefore BD=CD=\frac{1}{2}BC, AG=\frac{2}{3}AD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}),$$

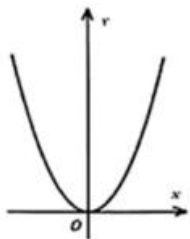
$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

故答案为: $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

【点睛】本题考查了平面向量的知识. 注意掌握三角形法则的应用, 注意数形结合思想的应用.

17. 如图, 已知点 A 是抛物线 $y = x^2$ 图像上一点, 将点 A 向下平移 2 个单位到点 B , 再把 A 绕点 B 顺时针旋转 120° 得到点 C , 如果点 C 也在该抛物线上, 那么点 A 的坐标是_____.



【答案】 $(-\sqrt{3}, 3)$

【解析】

【分析】设 $A(x, x^2)$, 根据平移、旋转的性质求出 C 点坐标, 代入抛物线求出 x , 故可求解.

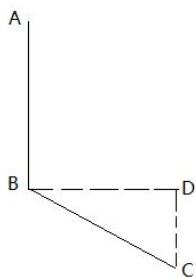
【详解】解: $\because$ 点 A 是抛物线 $y = x^2$ 图像上一点

故设 $A(x, x^2)$,

$\therefore$ 将点 A 向下平移 2 个单位到点 B ,

故 $B(x, x^2 - 2)$

$\therefore$ 把 A 绕点 B 顺时针旋转 120° 得到点 C , 如图,



过点 B 作 $BD \perp AB$ 于 B , 过点 C 作 $CD \perp BD$ 于 D ,

$AB=BC=2$, $\angle ABC=120^\circ$, $\angle ABD=90^\circ$,

$\therefore \angle DBC=30^\circ$

故 $CD=\frac{1}{2}BC=1$, $BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=\sqrt{3}$,

故 $C(x+\sqrt{3}, x^2-3)$,

把 $C(x+\sqrt{3}, x^2-3)$ 代入 $y=x^2$,

$\therefore x^2-3=(x+\sqrt{3})^2$,

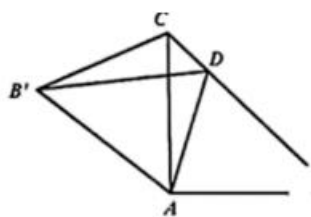
解得 $x=-\sqrt{3}$

$\therefore A(-\sqrt{3}, 3)$

故答案为: $(-\sqrt{3}, 3)$.

【点睛】此题主要考查二次函数与几何综合, 解题的关键是熟知坐标与函数的关系、平移与旋转的特点及直角三角形的性质.

18. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle CAB=90^\circ$, $AB=AC$, 点 D 为斜边 BC 上一点, 且 $BD=3CD$, 将 $\triangle ABD$ 沿直线 AD 翻折, 点 B 的对应点为 B' , 则 $\sin \angle CB'D=$ _____.



【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ## $\frac{1}{10}\sqrt{10}$

【解析】

【分析】先证明 A, B', C, D 四点共圆, 推出 $\angle CB'D=\angle CAD$, 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , 利用平行线分线段成比例定理得到 $AE=3CE$, 由勾股定理得到 $AD=\sqrt{10}a$, 再由正弦函数即可求解.

【详解】解: $\because \angle CAB=90^\circ$, $AB=AC$,

$\therefore \angle ACB=\angle B=45^\circ$,

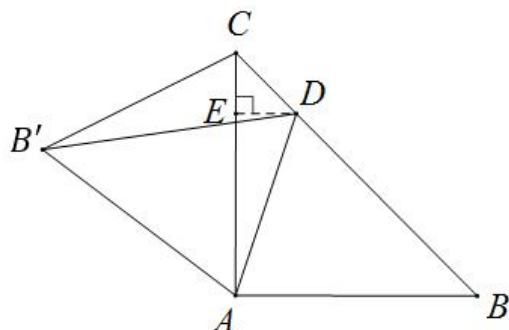
由折叠的性质得 $\angle AB'D=\angle B=45^\circ$,

$$\therefore \angle AB'D = \angle ACD = 45^\circ,$$

$\therefore A, B', C, D$ 四点共圆,

$$\therefore \angle CB'D = \angle CAD,$$

过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E ,



$$\because \angle CAB = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \parallel AB,$$

$$\because BD = 3CD,$$

$$\therefore AE = 3CE,$$

$$\because \angle ACB = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle DEC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore DE = CE,$$

设 $DE = CE = a$, 则 $AE = 3CE = 3a$,

$$\text{在 } Rt\triangle ADE \text{ 中, } AD = \sqrt{DE^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = \sqrt{10}a,$$

$$\therefore \sin \angle CB'D = \sin \angle CAD = \frac{DE}{AD} = \frac{a}{\sqrt{10}a} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

【点睛】 本题考查了圆内接四边形的知识，正弦函数，折叠的性质以及勾股定理，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件.

三、解答题：(本大题共 7 小题，满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } \frac{\sin 60^\circ + 3 \tan 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}{1 - 2 \cot 45^\circ + \cot 30^\circ}.$$

$$\text{【答案】 } \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

【解析】

【分析】 根据特殊角的锐角三角函数值进行计算即可.

【详解】解： $\frac{\sin 60^\circ + 3 \tan 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}{1 - 2 \cot 45^\circ + \cot 30^\circ}$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2}}{1 - 2 \times 1 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

【点睛】 本题考查了特殊角的三角函数值的混合运算，牢记特殊角的三角函数值是解题的关键.

20. 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的自变量 x 的取值与函数 y 的值列表如下:

x	...	-2	-1	0	...	2	3	4	...
$y = f(x)$	...	-5	0	3	...	3	0	-5	...

(1) 根据表中的信息求二次函数的解析式，并用配方法求出顶点的坐标；

(2) 请你写出两种平移的方法，使平移后二次函数图像的顶点落在直线 $y = x$ 上，并写出平移后二次函数的解析式.

【答案】 (1) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ ；顶点坐标 $(1, 4)$

(2) 把抛物线 $f(x) = -(x-1)^2 + 4$ 向下平移 3 个单位长度，抛物线为： $f(x) = -(x-1)^2 + 1$ ，或把抛物线 $f(x) = -(x-1)^2 + 4$ 向右平移 3 个单位长度，抛物线为： $f(x) = -(x-4)^2 + 4$.

【解析】

【分析】 (1) 由二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 过 $(-1, 0), (3, 0)$ ，设抛物线的交点式为 $f(x) = a(x+1)(x-3)$ ，再把 $(0, 3)$ 代入抛物线的解析式求解 a 的值，再配方，求解顶点坐标即可；

(2) 平移后二次函数图像的顶点落在直线 $y = x$ 上，顶点的横坐标与纵坐标相等，由顶点坐标为： $(1, 4)$ ，再分两种情况讨论：当顶点坐标为： $(1, 1)$ 时，当顶点坐标为： $(4, 4)$ 时，再写出平移方式即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 过 $(-1, 0), (3, 0)$,

$$\text{设 } f(x) = a(x+1)(x-3),$$

把 $(0,3)$ 代入抛物线的解析式可得: $-3a = 3$,

解得: $a = -1$,

所以抛物线为: $f(x) = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$.

$$\text{而 } f(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3$$

$$= -(x-1)^2 + 4,$$

所以顶点坐标为: $(1,4)$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 平移后二次函数图像的顶点落在直线 $y = x$ 上,

$\therefore$ 顶点的横坐标与纵坐标相等,

而顶点坐标为: $(1,4)$,

当顶点坐标变为: $(1,1)$ 时,

把抛物线 $f(x) = -(x-1)^2 + 4$ 向下平移 3 个单位长度即可;

此时抛物线为: $f(x) = -(x-1)^2 + 1$

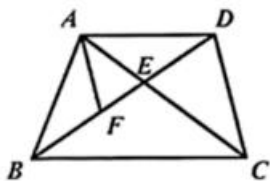
当顶点坐标变为: $(4,4)$ 时,

把抛物线 $f(x) = -(x-1)^2 + 4$ 向右平移 3 个单位长度即可.

此时抛物线为: $f(x) = -(x-4)^2 + 4$.

【点睛】 本题考查的是利用待定系数法求解抛物线的解析式, 利用配方法求解抛物线的顶点坐标, 抛物线的平移, 正比例函数图象上点的坐标特点, 熟练的掌握抛物线的性质是解本题的关键.

21. 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = 4$, $BC = 6$, 对角线 BD 、 AC 相交于点 E , 过点 A 作 $AF \parallel DC$, 交对角线 BD 于点 F .



(1) 求 $\frac{BF}{EF}$ 的值;

(2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 请用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AE}$.

【答案】 (1) $\frac{5}{4}$

$$(2) \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{a}$$

【解析】

【分析】(1) 由 $\triangle ADE \sim \triangle CBE$ ，得 $\frac{AD}{BC} = \frac{DE}{BE} = \frac{AE}{CE} = \frac{2}{3}$ ，由 $AF \parallel CD$ ，得 $\frac{AE}{CE} = \frac{EF}{DE} = \frac{2}{3}$ ，从而解决问题；

(2) 求出 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的关系，以及 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的关系，通过 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$ 即可求解。

【小问 1 详解】

解： $\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CBE$ ，

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DE}{BE} = \frac{AE}{CE} = \frac{2}{3}，$$

$\because AF \parallel CD$ ，

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{EF}{DE} = \frac{2}{3}，$$

设 $EF = 4x$ ，则 $DE = 6x$ ， $BF = 5x$ ，

$$\therefore \frac{BF}{EF} = \frac{5}{4}，$$

【小问 2 详解】

解： $\because AD = 4$ ， $BC = 6$ ， $AD \parallel BC$ ，

$$\therefore BC = \frac{3}{2}AD，\triangle ADE \sim \triangle CBE，$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\vec{b}，\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}，$$

$$\therefore AE = \frac{2}{5}AC，$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}，$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} = -\vec{a}，$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$$

$$= \frac{3}{2}\vec{b} + \vec{a}，$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

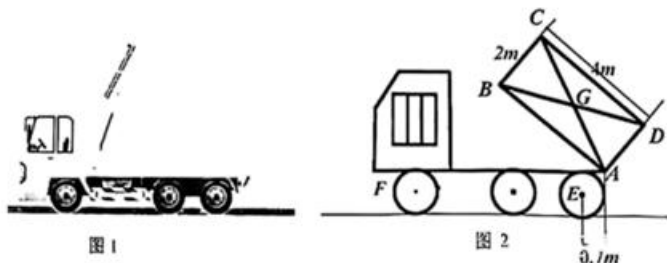
$$= \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2}\vec{b} + \vec{a}\right)$$

$$= \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{a}。$$

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质，平面向量的加减运算法则，解题的关键是熟练掌握相

似三角形的判定与性质.

22. 如图 1 是一种自卸货车, 图 2 是该货车的示意图, 货箱侧面是一个矩形, 长 $AB = 4$ 米, 宽 $BC = 2$ 米, 初始时点 A 、 B 、 F 在同一水平线上, 车厢底部 AB 离地面的高度为 1.3 米. 卸货时货箱在千斤顶的作用下绕着点 A 旋转, 箱体底部 AB 形成不同角度的斜坡.



(1) 当斜坡 AB 的坡角为 37° 时, 求车厢最高点 C 离地面的距离;

(2) 点 A 处的转轴与后车轮转轴 (点 E 处) 的水平距离叫做安全轴距, 已知该车的安全轴距为 0.7m. 货厢对角线 AC 、 BD 的交点 G 是货厢侧面的重心, 卸货时如果 A 、 G 两点的水平距离小于安全轴距时, 会发生车辆倾覆安全事故. 当斜坡 AB 的坡角为 45° 时, 根据上述车辆设计技术参数, 该货车会发生车辆倾覆安全事故吗? 试说明你的理由. (精确到 0.1 米, 参考值: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$, $\sqrt{2} \approx 1.4142$)

【答案】(1) 4m (2) 不会, 理由见解析

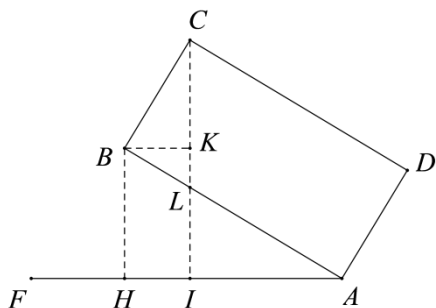
【解析】

【分析】(1) 过点 B, C 作 $BH \perp AF, CI \perp AF$, 垂足分别为 H, I , CI 交 AB 于点 L , 过点 B 作 $BK \perp CI$ 于点 K , 根据 $CI = CK + KI = BC \times \cos \angle BCK + AB \times \sin \angle BCK$ 即可解决问题;

(2) 过点 G 作 $GM \perp AF$ 于点 M , 同理求得 CI , 进而勾股定理求得 AI , 根据平行线分线段成比例求得 AM , 进而判断 AM 是否大于 0.7 即可判断该货车是否会发生车辆倾覆安全事故.

【小问 1 详解】

如图, 过点 B, C 作 $BH \perp AF, CI \perp AF$, 垂足分别为 H, I , CI 交 AB 于点 L , 过点 B 作 $BK \perp CI$ 于点 K ,



则四边形 $BHIK$ 是矩形,

$$\therefore BH = KI$$

$$\because \angle CLB = \angle ALI, \angle CBL = \angle LIA$$

$$\therefore \angle BCK = \angle LAI$$

$\because$ 斜坡 AB 的坡角为 37° , 即 $\angle BAF = 37^\circ$

$$\therefore \angle BCK = 37^\circ$$

$$\therefore CK = BC \times \cos \angle BCK, BH = KI = AB \times \sin \angle BCK$$

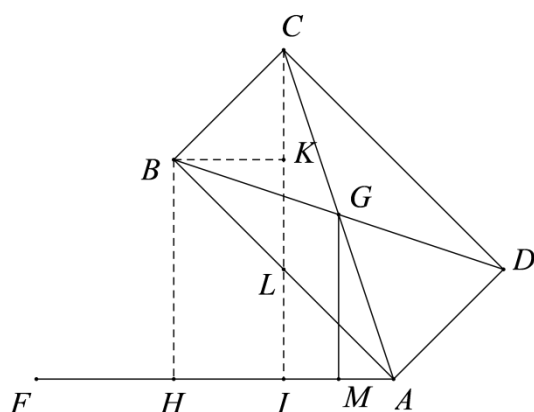
$$\because AB = 4, BC = 2, \sin 37^\circ \approx 0.60, \cos 37^\circ \approx 0.80,$$

$$\therefore CI = CK + KI = BC \times \cos \angle BCK + AB \times \sin \angle BCK = 2 \times 0.8 + 4 \times 0.6 = 4 \text{ m}$$

【小问 2 详解】

该货车不会发生车辆倾覆安全事故, 理由如下,

如图, 过点 G 作 $GM \perp AF$ 于点 M ,



$$\text{同理求得 } CI = CK + KI = BC \times \cos \angle BCK + AB \times \sin \angle BCK = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{在 } Rt\triangle CIA \text{ 中, } CI = 3\sqrt{2}, AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore AI = \sqrt{AC^2 - CI^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形

$$\therefore CG = AG$$

$$\because GM \parallel CI,$$

$$\therefore \frac{AG}{GC} = \frac{AM}{MI}$$

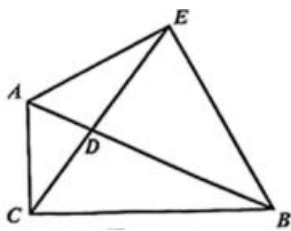
$$\because CG = AG$$

$$\therefore AM = MI = \frac{1}{2} AI = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071 > 0.7$$

$\therefore$ 该货车不会发生车辆倾覆安全事故.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用, 平行线分线段成比例, 正确的作出辅助线是解题的关键.

23. 如图, 已知 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 射线 CD 交 AB 于点 D , 点 E 是 CD 上一点, 且 $\angle AEC = \angle ABC$, 联结 BE .



(1) 求证: $\triangle ACD \sim \triangle EBD$

(2) 如果 CD 平分 $\angle ACB$, 求证: $AB^2 = 2ED \cdot EC$.

【答案】(1) 见解析;

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 先根据相似三角形的判定证明 $\triangle ADE \sim \triangle CDB$, 则可证得 $\frac{AD}{CD} = \frac{DE}{DB}$ 即 $\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DB}$, 再根据相似三角形的判定即可证得结论;

(2) 根据角平分线定义和相似三角形的性质证明 $\angle DCB = \angle EAB = \angle EBA = 45^\circ$, 则 $\triangle AEB$ 为等腰直角三角形, 根据勾股定理可得 $AB^2 = 2BE^2$, 再根据相似三角形的判定证明 $\triangle EBD \sim \triangle ECB$ 即可证得结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle AEC = \angle ABC, \angle ADE = \angle CDB,$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CDB,$

$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{DE}{DB}$ 即 $\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DB}$, 又 $\angle ADC = \angle EDB,$

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle EBD;$

【小问 2 详解】

证明: $\because CD$ 平分 $\angle ACB, \angle ACB = 90^\circ,$

$\therefore \angle ACD = \angle DCB = 45^\circ,$

$\because \triangle ADE \sim \triangle CDB, \triangle ACD \sim \triangle EBD,$

$\therefore \angle DCB = \angle EAD = \angle EBD = 45^\circ,$

$\therefore AE = BE, \angle AEB = 90^\circ,$

$\therefore \triangle AEB$ 为等腰直角三角形,

$\therefore AB^2 = AE^2 + BE^2 = 2BE^2,$

$\because \angle DCB = \angle EBD, \angle CEB = \angle BED,$

$\therefore \triangle CEB \sim \triangle BED,$

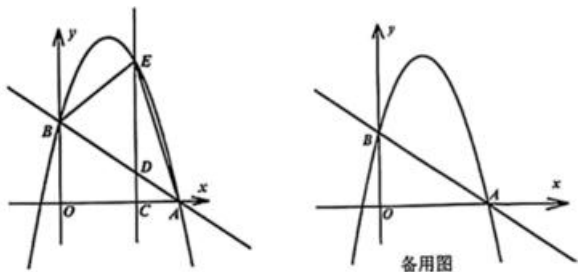
$\therefore \frac{BE}{ED} = \frac{EC}{BE}$ 即 $BE^2 = ED \cdot EC,$

$\therefore AB^2 = 2BE^2 = 2ED \cdot EC.$

【点睛】 本题主要考查相似三角形的判定与性质、角平分线的定义、三角形内角和定理、等腰直角三角形

的判定、勾股定理，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解答的关键.

24. 如图，抛物线 $y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + 2$ 与 x 轴相交于点 A ，与 y 轴交于点 B ， C 为线段 OA 上的一个动点，过点 C 作 x 轴的垂线，交直线 AB 于点 D ，交该抛物线于点 E .



- (1) 求直线 AB 的表达式，直接写出顶点 M 的坐标；
- (2) 当以 B, E, D 为顶点的三角形与 $\triangle CDA$ 相似时，求点 C 的坐标；
- (3) 当 $\angle BDE = 2\angle OAB$ 时，求 $\triangle BDE$ 与 $\triangle CDA$ 的面积之比.

【答案】(1) $y = -\frac{2}{3}x + 2, M(\frac{5}{4}, \frac{49}{12})$

(2) $(\frac{11}{8}, 0)$ 或 $(\frac{5}{2}, 0)$

(3) $\frac{1225}{104}$

【解析】

【分析】(1) 求出 A, B 点的坐标，用待定系数法求直线 AB 的解析式即可；

(2) 由题意可知 $\triangle BED$ 是直角三角形，设 $C(t, 0)$ ，分两种情况讨论①当 $\angle BED = 90^\circ$ ，时， $BE \parallel AC$ ，此时 $E(t, 2)$ ，由此可求 $t = \frac{5}{2}$ ；②当 $\angle EBD = 90^\circ$ 时，过点 E 作 $EQ \perp y$ 轴交于点 Q ，可证明 $\triangle ABO \sim \triangle BEQ$ ，

则 $\frac{AO}{BQ} = \frac{BO}{EQ}$ ，可求 $E(t, 2 + \frac{3}{2}t)$ ，再由 E 点在抛物线上，则可求 $t = \frac{11}{8}$ ，进而求 C 点坐标；

(3) 作 BA 的垂直平分线交 x 轴于点 Q ，连接 BQ ，过点 B 作 $BG \perp EC$ 于点 G ，则有 $\angle BQO = \angle BED$ ，在 $Rt\triangle BOQ$ 中， $BQ^2 = 4 + (3 - BQ)^2$ ，求出 $BQ = \frac{13}{6}$ ， $QO = \frac{5}{6}$ ，则 $\tan \angle BQO = \tan \angle BEG = \frac{12}{5}$ ，设 $C(t, 0)$ ，

则 $D(t, -\frac{2}{3}t + 2)$ ， $E(t, -\frac{4}{3}t^2 + \frac{10}{3}t + 2)$ ，则有 $\frac{12}{5} = \frac{t}{-\frac{4}{3}t^2 + \frac{10}{3}t}$ ，求出 $t = \frac{35}{16}$ ，即可求 $\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle CDA}} = \frac{2t^2}{3-t} = \frac{1225}{104}$.

【小问 1 详解】

解：令 $y = 0$ ，则 $-\frac{4}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + 2 = 0$ ，

$\therefore x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = 3$ ，

$$\therefore A(3,0),$$

令 $x=0$ ，则 $y=2$ ，

$$\therefore B(0,2),$$

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$ ，

$$\therefore \begin{cases} b=2 \\ 3k+b=0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k=-\frac{2}{3}, \\ b=2 \end{cases},$$

$$\therefore y=-\frac{2}{3}x+2,$$

$$\therefore y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{10}{3}x+2=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{49}{12},$$

$$\therefore M\left(\frac{5}{4}, \frac{49}{12}\right);$$

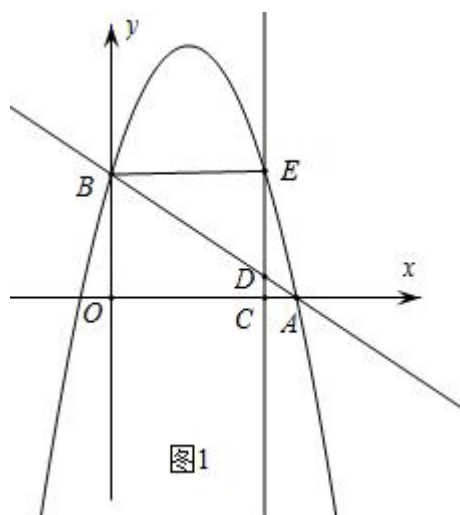
【小问 2 详解】

解： $\because \angle ADC = \angle BDE$ ， $\angle ACD = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle BED$ 是直角三角形，

设 $C(t,0)$ ，

①如图 1，



当 $\angle BED = 90^\circ$ ，时， $BE \parallel AC$ ，

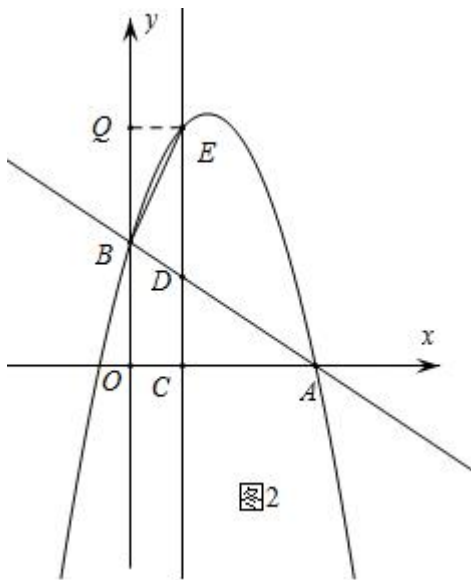
$$\therefore E(t,2),$$

$$\therefore -\frac{4}{3}t^2+\frac{10}{3}t+2=2,$$

$$\therefore t = 0 \text{ (舍) 或 } t = \frac{5}{2},$$

$$\therefore C(\frac{5}{2}, 0);$$

②如图 2,



当 $\angle EBD = 90^\circ$ 时,

过点 E 作 $EQ \perp y$ 轴交于点 Q ,

$$\because \angle BAO + \angle ABO = 90^\circ, \quad \angle ABO + \angle QBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QBE = \angle BAO,$$

$$\therefore \triangle ABO \sim \triangle BEQ,$$

$$\therefore \frac{AO}{BQ} = \frac{BO}{EQ}, \text{ 即 } \frac{3}{BQ} = \frac{2}{t},$$

$$\therefore BQ = \frac{3}{2}t,$$

$$\therefore E(t, 2 + \frac{3}{2}t),$$

$$\therefore 2 + \frac{3}{2}t = -\frac{4}{3}t^2 + \frac{10}{3}t + 2,$$

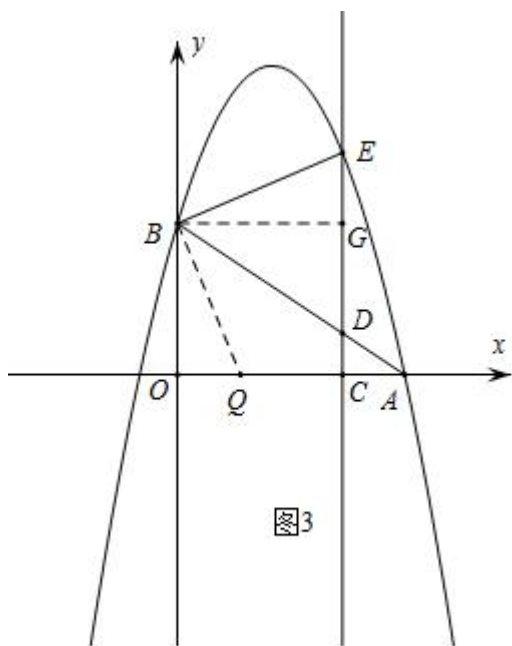
$$\therefore t = 0 \text{ (舍) 或 } t = \frac{11}{8},$$

$$\therefore C(\frac{11}{8}, 0);$$

综上所述: C 点的坐标为 $(\frac{11}{8}, 0)$ 或 $(\frac{5}{2}, 0)$;

【小问 3 详解】

解：如图 3，作 BA 的垂直平分线交 x 轴于点 Q ，连接 BQ ，过点 B 作 $BG \perp EC$ 于点 G ，



$$\therefore BQ = AQ,$$

$$\therefore \angle BQA = \angle QAB,$$

$$\therefore \angle BED = 2\angle OAB,$$

$$\therefore \angle BQO = \angle BED,$$

在 $Rt\triangle BOQ$ 中， $BQ^2 = BO^2 + OQ^2$ ，

$$\therefore BQ^2 = 4 + (3 - BQ)^2,$$

$$\therefore BQ = \frac{13}{6},$$

$$\therefore QO = \frac{5}{6},$$

$$\therefore \tan \angle BQO = \frac{12}{5},$$

$$\therefore \tan \angle BEG = \frac{12}{5},$$

设 $C(t, 0)$ ，则 $D(t, -\frac{2}{3}t + 2)$ ， $E(t, -\frac{4}{3}t^2 + \frac{10}{3}t + 2)$ ，

$$\therefore BG = t, \quad DE = -\frac{4}{3}t^2 + 4t, \quad AC = 3 - t, \quad DC = -\frac{2}{3}t + 2, \quad EG = -\frac{4}{3}t^2 + \frac{10}{3}t,$$

$$\therefore \frac{12}{5} = \frac{t}{-\frac{4}{3}t^2 + \frac{10}{3}t},$$

$$\therefore t = \frac{35}{16},$$

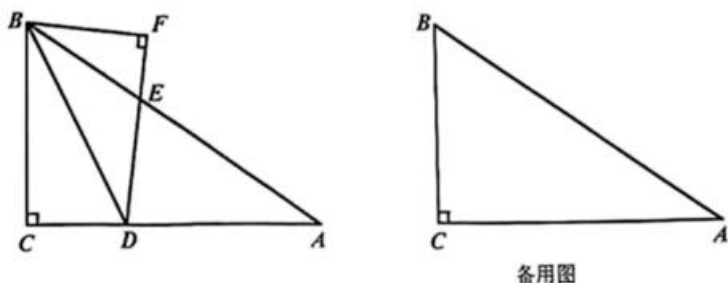
$$\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} ED \cdot BG,$$

$$S_{\triangle CDA} = \frac{1}{2} AC \cdot CD,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle CDA}} = \frac{\left(-\frac{4}{3}t^2 + 4t\right)t}{(3-t)\left(-\frac{2}{3}t + 2\right)} = \frac{2t^2}{3-t} = \frac{1225}{104}.$$

【点睛】本题是二次函数的综合题，求一次函数的解析式，解题的关键熟练掌握二次函数的图象及性质，三角形相似的性质与判定，分类讨论，数形结合也是解题的关键。

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\cot A = \sqrt{2}$ ，点 D 为边 AC 上的一个动点，以点 D 为顶点作 $\angle BDE = \angle A$ ，射线 DE 交边 AB 于点 E ，过点 B 作射线 DE 的垂线，垂足为点 F 。



- (1) 当点 D 是边 AC 中点时，求 $\tan \angle ABD$ 的值；
- (2) 求证： $AD \cdot BF = BC \cdot DE$ ；
- (3) 当 $DE : EF = 3 : 1$ 时，求 $AE : EB$ 。

【答案】(1) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ；

(2) 见解析； (3) 5 : 3

【解析】

【分析】(1) 过 D 作 $DH \perp AB$ 于 H ，设 $AC = \sqrt{2}x$ ， $BC = x$ ，由勾股定理得 $AB = \sqrt{3}x$ ，由中点定义和三角形的等面积法求得 DH ，再根据勾股定理求得 AH 、 BH ，由 $\tan \angle ABD = \frac{DH}{BH}$ 求解即可；

(2) 根据相似三角形的判定证明 $\triangle DEB \sim \triangle ADB$ 、 $\triangle DFB \sim \triangle ACB$ ，根据相似三角形的性质即可证得结论；

(3) 设 $DE = 3k$ ， $EF = k$ ，则 $DF = 4k$ ，根据余切定义和勾股定理可求得 EB 、 BF 、 BD ，再根据相似三角形的性质求得 AB 即可求解。

【小问 1 详解】

解：过 D 作 $DH \perp AB$ 于 H ，

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\cot A = \sqrt{2} = \frac{AC}{BC}$ ，

设 $AC = \sqrt{2}x$ ， $BC = x$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{2}x)^2 + x^2} = \sqrt{3}x,$$

$\because D$ 为 AC 的中点,

$$\therefore AD = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} x,$$

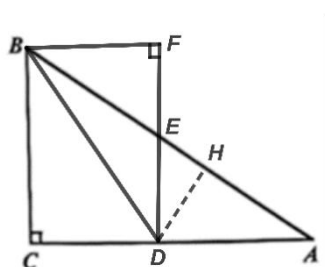
$$\therefore S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot DH,$$

$$\therefore DH = \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} x \cdot x}{\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{6}}{6} x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AHD \text{ 中, } AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}x\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}x,$$

$$\therefore BH = AB - AH = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}x = \frac{2\sqrt{3}}{3}x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BHD \text{ 中, } \tan \angle ABD = \frac{DH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}x}{\frac{2\sqrt{3}}{3}x} = \frac{\sqrt{2}}{4};$$



【小问 2 详解】

证明: $\because \angle BDE = \angle A, \angle DBE = \angle ABD,$

$\therefore \triangle DEB \sim \triangle ADB,$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{DB}{AB},$$

$\because \angle F = \angle C = 90^\circ, \angle BDE = \angle A,$

$\therefore \triangle DFB \sim \triangle ACB,$

$$\therefore \frac{BF}{BC} = \frac{DB}{AB},$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{BF}{BC} \text{ 即 } AD \cdot BF = BC \cdot DE;$$

【小问 3 详解】

解: 由 $DE : EF = 3 : 1$ 可设 $DE = 3k, EF = k$, 则 $DF = 4k$,

$$\because \angle BDE = \angle A,$$

$$\therefore \cot \angle BDE = \cot \angle A = \sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{DF}{BF} = \frac{4k}{BF} = \sqrt{2},$$

$$\therefore BF = 2\sqrt{2}k, \text{ 又 } \angle F = 90^\circ,$$

$$\therefore EB = \sqrt{BF^2 + EF^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}k)^2 + k^2} = 3k,$$

$$BD = \sqrt{BF^2 + DF^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}k)^2 + (4k)^2} = 2\sqrt{6}k,$$

$$\because \triangle DEB \sim \triangle ADB,$$

$$\therefore \frac{EB}{BD} = \frac{BD}{AB} \text{ 即 } \frac{3k}{2\sqrt{6}k} = \frac{2\sqrt{6}k}{AB},$$

$$\therefore AB = 8k,$$

$$\therefore AE = AB - EB = 5k,$$

$$\therefore AE:EB = 5k:3k = 5:3.$$

【点睛】 本题考查锐角三角函数、勾股定理、相似三角形的判定与性质，熟练掌握相关知识的联系与运用是解答的关键.