

2022 年上海市崇明区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 若将抛物线 $y = 2x^2$ 向上平移 3 个单位, 所得抛物线的解析式为 ()

- A. $y = 2x^2 + 3$ B. $y = 2x^2 - 3$ C. $y = 2(x - 3)^2$ D. $y = 2(x + 3)^2$

【答案】A

【解析】

【分析】直接根据“上加下减、左加右减”的原则进行解答即可.

【详解】由“上加下减”的原则可知, 将二次函数 $y = 2x^2$ 向上平移 3 个单位可得到函数 $y = 2x^2 + 3$, 故选 A.

【点睛】本题考查的是二次函数的图象与几何变换, 熟知“上加下减、左加右减”的原则是解答此题的关键.

2. 如果两个相似三角形的周长比为 1: 4, 那么这两个三角形的对应中线的比为 ()

- A. 1: 2 B. 1: 4 C. 1: 8 D. 1: 16

【答案】B

【解析】

【分析】根据相似三角形的周长比等于相似比, 可得两个相似三角形的相似比为 1: 4, 再由相似三角形的对应边的中线比等于相似比, 即可求解.

【详解】解: $\because$ 两个相似三角形的周长比为 1: 4,

$\therefore$ 两个相似三角形的相似比为 1: 4,

$\therefore$ 这两个三角形的对应中线的比为 1: 4.

故选: B

【点睛】本题主要考查了相似三角形的性质, 熟练掌握相似三角形的周长比等于相似比, 相似三角形的对应边的中线比等于相似比是解题的关键.

3. 如果向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 方向相反, 且 $3|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么向量 $\vec{a}$ 用向量 $\vec{b}$ 表示为 ()

- A. $\vec{a} = 3\vec{b}$ B. $\vec{a} = -3\vec{b}$ C. $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{b}$ D. $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量的表示方法直接解答即可

【详解】解: 向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 方向相反, 且 $3|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么向量 $\vec{a}$ 用向量 $\vec{b}$ 表示为 $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$

故选 D

【点睛】 本题考查了向量的表示方法，理解 $3|\vec{a}|=|\vec{b}|$ 是解题的关键.

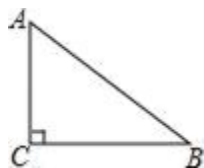
4. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $AC = 1$ ，则 $\cos B$ 的值是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 2

【答案】 C

【解析】

【分析】 直接利用勾股定理求出 BC 的长，再利用锐角三角函数关系求解即可



【详解】

解： 如图所示： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $AC = 1$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选 C.

【点睛】 本题考查了锐角三角函数的定义以及勾股定理，熟练掌握相关概念是解题关键

5. 下列各组条件中，一定能推得 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似的是 ()

- A. $\angle A = \angle E$ 且 $\angle D = \angle F$ B. $\angle A = \angle B$ 且 $\angle D = \angle F$
C. $\angle A = \angle E$ 且 $\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{ED}$ D. $\angle A = \angle E$ 且 $\frac{AB}{BC} = \frac{DF}{ED}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据三角形相似的判定方法：①两角法：有两组角对应相等的两个三角形相似可以判断出 A、B 的正误；②两边及其夹角法：两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似可以判断出 C、D 的正误，即可选出答案.

【详解】 A、 $\angle D$ 和 $\angle F$ 不是两个三角形的对应角，故不能判定两三角形相似，故此选项错误；

B、 $\angle A = \angle B$ ， $\angle D = \angle F$ 不是两个三角形的对应角，故不能判定两三角形相似，故此选项错误；

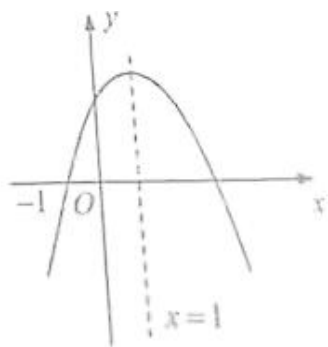
C、由 $\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{ED}$ 可以根据两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似可以判断出 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似，故此选项正确；

D、 $\angle A = \angle E$ 且 $\frac{AB}{BC} = \frac{DF}{ED}$ 不能判定两三角形相似，因为相等的两个角不是夹角，故此选项错误；

故选 C.

【点睛】此题主要考查了相似三角形的判定，关键是掌握三角形相似的判定方法：（1）平行线法：平行于三角形的一边的直线与其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似；（2）三边法：三组对应边的比相等的两个三角形相似；（3）两边及其夹角法：两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似；（4）两角法：有两组角对应相等的两个三角形相似.

6. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像如图所示，那么下列结论中正确的是 ()



A. $ac > 0$

B. 当 $x > -1$ 时, $y > 0$

C. $b = 2a$

D. $9a + 3b + c = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数的图象与性质逐一进行判断即可求解.

【详解】解：A、由图象可知： $a < 0$, $c > 0$,

$\therefore ac < 0$, 选项错误;

B、由对称轴可知： $x = 1$,

$\therefore$ 另一个交点为： $x = 3$,

从图象可得： $x > 3$ 时, $y < 0$, 选项错误;

C、由对称轴可知： $x = -\frac{b}{2a} = 1$,

$\therefore b = -2a$, 选项错误;

D、由 B 选项证明可得:

当 $x = 3$ 时,

$y = 0$, 即 $9a + 3b + c = 0$, 选项正确;

故选: D.

【点睛】本题考查二次函数的基本性质，解题的关键是熟练运用二次函数的图象与性质.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 36 分)

7. 如果 $\frac{x-y}{y} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{x}{y} =$ _____.

【答案】 $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】 先将 $\frac{x-y}{y} = \frac{2}{3}$ 变形成 $\frac{x}{y} - 1 = \frac{2}{3}$ ，然后解关于 $\frac{x}{y}$ 的方程即可.

【详解】 解：由 $\frac{x-y}{y} = \frac{2}{3}$ 可得 $\frac{x}{y} - 1 = \frac{2}{3}$ ，解得 $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$.

故答案是 $\frac{5}{3}$.

【点睛】 本题主要考查了求分式混合运算，灵活分式混合运算法则对已知等式进行变形成为解答本题的关键.

8. 计算： $2(3\vec{a} + 2\vec{b}) - 5\vec{a} =$ _____.

【答案】 $\vec{a} + 4\vec{b}$

【解析】

【分析】 先去括号，然后根据向量加减法进行计算即可.

【详解】 解： $2(3\vec{a} + 2\vec{b}) - 5\vec{a}$

$$= 6\vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{a},$$

$$= \vec{a} + 4\vec{b},$$

故答案为： $\vec{a} + 4\vec{b}$.

【点睛】 题目主要考查向量加减混合运算，熟练掌握运算是解题关键.

9. 已知线段 $AB = 8\text{cm}$ ，点 C 是 AB 的黄金分割点，且 $AC > BC$ ，那么线段 AC 的长为 _____ cm .

【答案】 $4\sqrt{5} - 4$

【解析】

【分析】 根据黄金分割的概念得到 $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$ ，把 $AB = 8\text{cm}$ 代入计算即可.

【详解】 解： $\because$ 线段 $AB = 8\text{cm}$ ，点 C 是线段 AB 的黄金分割点， $AC > BC$ ，

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 8 = (4\sqrt{5} - 4)\text{cm},$$

故答案为： $4\sqrt{5} - 4$.

【点睛】 本题考查了黄金分割的概念，解题的关键是掌握如果一个点把一条线段分成两条线段，并且较长线段是较短线段和整个线段的比例中项，那么就说这个点把这条线段黄金分割，这个点叫这条线段的黄金

分割点；较长线段是整个线段的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 倍.

10. 如果抛物线 $y = (k-2)x^2$ 的开口向上，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k > 2$

【解析】

【分析】 由题意根据二次函数的性质可知，当抛物线开口向上时，二次项系数 $k-2 > 0$ 进而可得答案.

【详解】 解：因为抛物线 $y = (k-2)x^2$ 的开口向上，

所以 $k-2 > 0$ ，即 $k > 2$ ，

故 k 的取值范围是 $k > 2$.

故答案为： $k > 2$.

【点睛】 本题考查二次函数的性质，解答此题要掌握二次函数图象的特点.

11. 如果抛物线 $y = -x^2 + 3x - 1 + m$ 经过原点，那么 $m =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 把原点坐标代入 $y = -x^2 + 3x - 1 + m$ 中得到关于 m 的一次方程，然后解一次方程即可.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + 3x - 1 + m$ 经过点 $(0, 0)$ ，

$\therefore -1 + m = 0$ ，

$\therefore m = 1$.

故答案为 1.

【点睛】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数图象上点的坐标满足其解析式.

12. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 自变量 x 的值和它对应的函数值 y 如下表所示：

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	0	3	4	3	m	...

那么上表中 m 的值为_____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 由表中数据可得抛物线的对称轴为： $x = 1$ ，根据抛物线对称轴的性质可得 $x = 3$ 与 $x = -1$ 的函数值相同，即可得出结果.

【详解】 解：由表中数据可得： $x = 0$ 与 $x = 2$ 的函数值均为 $y = 3$ ，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为： $x = 1$ ，

$\therefore x = 3$ 与 $x = -1$ 的函数值相同，均为 $y = 0$ ，

$$\therefore m = 0,$$

故答案为：0.

【点睛】题目主要考查抛物线的对称性质，理解题意，从表中得出对称轴是解题关键.

13. 某滑雪运动员沿着坡比为 $1: \sqrt{3}$ 的斜坡向下滑行了 100 米，则运动员下降的垂直高度为_____米.

【答案】50

【解析】

【详解】解：设垂直高度下降了 x 米，则水平前进了 $\sqrt{3}x$ 米.

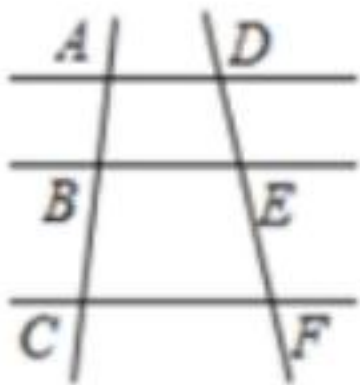
根据勾股定理可得： $x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 100^2$.

解得： $x=50$ ，即它距离地面的垂直高度下降了 50 米.

故答案为 50.

点睛：本题考查了解直角三角形的应用，此题的关键是用同一未知数表示出下降高度和水平前进距离.

14. 如图，直线 $AD \parallel BE \parallel CF$ ，如果 $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$ ， $AD = 2$ ， $CF = 6$ ，那么线段 BE 的长是_____.

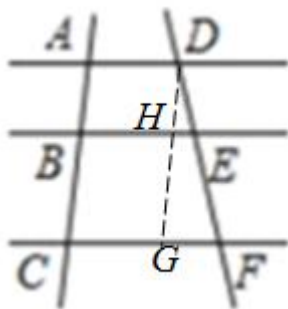


【答案】3

【解析】

【分析】过点 D 作 $DG \parallel AC$ 交 CF 于点 G ，交 BE 于点 H ，根据 $AD \parallel BE \parallel CF$ ，可得 $\frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$ ，四边形 $ABHD$ 和四边形 $ACGD$ 是平行四边形，从而得到 $BH=AD=CG=2$ ， $\frac{DE}{DF} = \frac{1}{4}$ ，进而得到 $FG=4$ ，再由 $BE \parallel CF$ ，得到 $\triangle DEH \sim \triangle DFG$ ，从而得到 $HE=1$ ，即可求解.

【详解】解：如图，过点 D 作 $DG \parallel AC$ 交 CF 于点 G ，交 BE 于点 H ，



$$\because AD \parallel BE \parallel CF,$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}, \text{ 四边形 } ABHD \text{ 和四边形 } ACGD \text{ 是平行四边形,}$$

$$\therefore BH = AD = CG = 2, \quad \frac{DE}{DF} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore CF = 6,$$

$$\therefore FG = 4,$$

$$\therefore BE \parallel CF,$$

$$\therefore \triangle DEH \sim \triangle DFG,$$

$$\therefore \frac{HE}{FG} = \frac{DE}{DF} = \frac{1}{4},$$

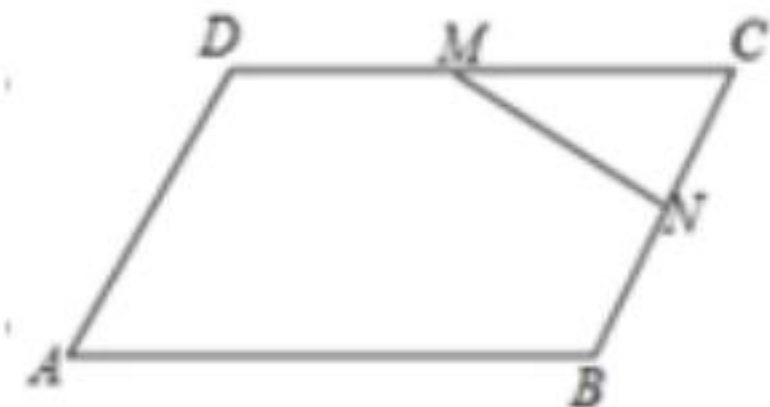
$$\therefore HE = 1,$$

$$\therefore BE = BH + HE = 3.$$

故答案为：3

【点睛】本题主要考查了平行线分线段成比例，平行四边形的判定和性质，相似三角形的性质和判定，熟练掌握平行线分线段成比例，平行四边形的判定和性质，相似三角形的性质和判定是解题的关键.

15. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 M 是边 CD 中点，点 N 是边 BC 的中点，设 $AB = \vec{a}$ ， $BC = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{MN}$ 可用 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示为_____.



【答案】 $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质和线段的中点，可用 $\vec{a}$ 表示出 $\overrightarrow{MC}$ ，用 $\vec{b}$ 表示出 $\overrightarrow{CN}$ ，再根据 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$ ，即可用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示出 $\overrightarrow{MN}$ 。

【详解】 $\because \overrightarrow{BC} = \vec{b}$,

$\therefore \overrightarrow{CB} = -\vec{b}$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$,

$\because$ 点 M 是边 CD 中点，点 N 是边 BC 的中点,

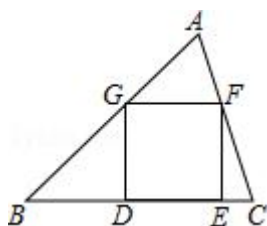
$\therefore \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\vec{b}$,

$\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\vec{a} + (-\frac{1}{2}\vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

故答案为: $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

【点睛】本题考查平行四边形的性质，线段的中点和向量的线性运算。利用数形结合的思想是解答本题的关键。

16. 如图，已知正方形 $DEFG$ 的顶点 D 、 E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，顶点 G 、 F 分别在边 AB 、 AC 上。如果 $BC=4$ ， $\triangle ABC$ 的面积是 6，那么这个正方形的边长是_____。



【答案】 $\frac{12}{7}$

【解析】

【分析】作 $AH \perp BC$ 于 H ，交 GF 于 M ，如图，先利用三角形面积公式计算出 $AH=3$ ，设正方形 $DEFG$ 的边长为 x ，则 $GF=x$ ， $MH=x$ ， $AM=3-x$ ，再证明 $\triangle AGF \sim \triangle ABC$ ，则根据相似三角形的性质得 $\frac{x}{4} = \frac{3-x}{3}$ ，然后解关于 x 的方程即可。

【详解】作 $AH \perp BC$ 于 H ，交 GF 于 M ，如图，

$\because \triangle ABC$ 的面积是 6，

$$\therefore \frac{1}{2} BC \cdot AH = 6,$$

$$\therefore AH = \frac{2 \times 6}{4} = 3,$$

设正方形 DEFG 的边长为 x ，则 $GF = x$ ， $MH = x$ ， $AM = 3 - x$ ，

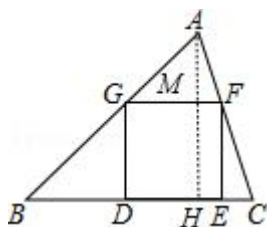
$\because GF \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AGF \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{GF}{BC} = \frac{AM}{AH}, \text{ 即 } \frac{x}{4} = \frac{3-x}{3}, \text{ 解得 } x = \frac{12}{7},$$

即正方形 DEFG 的边长为 $\frac{12}{7}$ ，

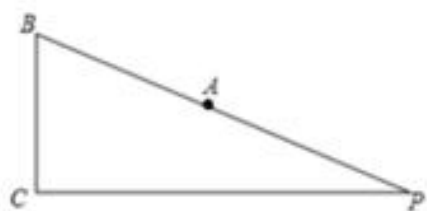
故答案为 $\frac{12}{7}$ 。



【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，正确添加辅助线求出 BC 边上的高是解题的关键。

17. 定义：有一组对边相等而另一组对边不相等的凸四边形叫做“对等四边形”，如图，在 $Rt\triangle PBC$ 中，

$\angle PCB = 90^\circ$ ，点 A 在边 BP 上，点 D 在边 CP 上，如果 $BC = 11$ ， $\tan \angle PBC = \frac{12}{5}$ ， $AB = 13$ ，四边形 ABCD 为“对等四边形”，那么 CD 的长为_____。

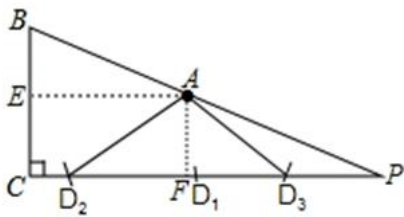


【答案】13 或 $12 - \sqrt{85}$ 或 $12 + \sqrt{85}$

【解析】

【分析】根据对等四边形的定义，分两种情况：①若 $CD = AB$ ，此时点 D 在 D_1 的位置， $CD_1 = AB = 13$ ；②若 $AD = BC = 11$ ，此时点 D 在 D_2 、 D_3 的位置， $AD_2 = AD_3 = BC = 11$ ；利用勾股定理和矩形的性质，求出相关相关线段的长度，即可解答。

【详解】解：如图，点 D 的位置如图所示：



①若 $CD=AB$ ，此时点 D 在 D_1 的位置， $CD_1=AB=13$ ；

②若 $AD=BC=11$ ，此时点 D 在 D_2 、 D_3 的位置， $AD_2=AD_3=BC=11$ ，

过点 A 分别作 $AE \perp BC$ ， $AF \perp PC$ ，垂足为 E ， F ，

设 $BE=x$ ，

$$\therefore \tan \angle PBC = \frac{12}{5},$$

$$\therefore AE = \frac{12}{5}x,$$

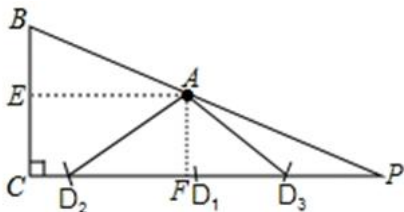
在 $Rt\triangle ABE$ 中， $AE^2 + BE^2 = AB^2$ ，

$$\text{即 } x^2 + \left(\frac{12}{5}x\right)^2 = 13^2,$$

解得： $x_1=5$ ， $x_2=-5$ （舍去），

$$\therefore BE=5, AE=12,$$

$$\therefore CE=BC-BE=6,$$



由四边形 $AECF$ 为矩形，可得 $AF=CE=6$ ， $CF=AE=12$ ，

$$\text{在 } Rt\triangle AFD_2 \text{ 中， } FD_2 = \sqrt{AD_2^2 - AF^2} = \sqrt{85},$$

$$\therefore CD_2 = CF - FD_2 = 12 - \sqrt{85},$$

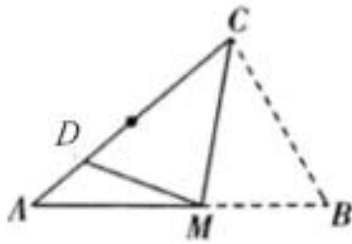
$$CD_3 = CF + FD_2 = 12 + \sqrt{85},$$

综上所述， CD 的长度为 13 、 $12 - \sqrt{85}$ 或 $12 + \sqrt{85}$ 。

故答案为：13、 $12 - \sqrt{85}$ 或 $12 + \sqrt{85}$ 。

【点睛】本题主要考查了新定义，锐角三角函数，勾股定理等知识，解题的关键是理解并能运用“等对角四边形”这个概念。在（2）中注意分类讨论思想的应用、勾股定理的应用。

18. 如图所示，在三角形纸片 ABC 中， $AB=9$ ， $BC=6$ ， $\angle ACB=2\angle A$ ，如果将 $\triangle ABC$ 沿过顶点 C 的直线折叠，使点 B 落在边 AC 上的点 D 处，折痕为 CM ，那么 $\cos \angle DMA =$ _____。



【答案】 $\frac{31}{32}$

【解析】

【分析】由折叠及相似三角形的判定和性质可得 $\frac{BC}{AB} = \frac{BM}{BC} = \frac{CM}{AC}$ ，将已知线段代入可得 $BM = DM = 4$ ，

$CM = AM = 5$ ，继续代入确定 $AC = \frac{15}{2}$ ，过点 D 作 $DE \perp AB$ ，交 AB 于点 E ，设 $EM = x$ ，则 $AE = 5 - x$ ，

在 $Rt\triangle ADE$ 与 $Rt\triangle MDE$ 中，分别利用勾股定理理解方程可得 $x = \frac{31}{8}$ ，由余弦函数的性质求解即可得.

【详解】解：由折叠可得： $\angle BCM = \angle DCM$ ， $BC = CD = 6$ ， $BM = DM$ ，

$$\therefore \angle ACB = 2\angle A,$$

$$\therefore \angle A = \angle BCM = \angle DCM, \quad CM = AM,$$

$$\therefore \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BCM \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{BM}{BC} = \frac{CM}{AC},$$

$$\text{即 } \frac{6}{9} = \frac{BM}{6} = \frac{CM}{AC},$$

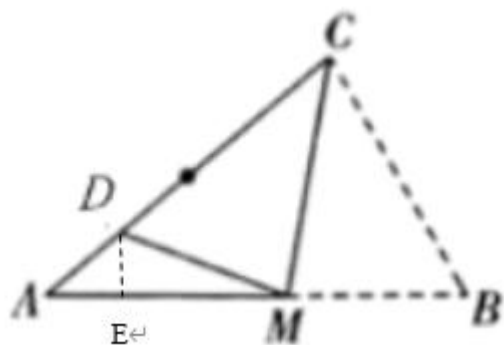
$$\text{解得： } BM = DM = 4, \quad CM = AM = AB - BM = 5,$$

$$\therefore \frac{6}{9} = \frac{5}{AC},$$

$$\therefore AC = \frac{15}{2},$$

$$\therefore AD = AC - CD = \frac{3}{2},$$

过点 D 作 $DE \perp AB$ ，交 AB 于点 E ，



设 $EM = x$ ，则 $AE = 5 - x$ ，

在 $Rt\triangle ADE$ 中，

$$DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (5-x)^2},$$

在 $Rt\triangle MDE$ 中，

$$DE = \sqrt{DM^2 - EM^2} = \sqrt{4^2 - x^2},$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^2 - (5-x)^2 = 4^2 - x^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{31}{8},$$

$$\therefore \cos \angle DMA = \frac{EM}{DM} = \frac{\frac{31}{8}}{4} = \frac{31}{32},$$

$$\text{故答案为: } \frac{31}{32}.$$

【点睛】题目主要考查相似三角形的判定和性质，折叠的性质，勾股定理，余弦函数等，理解题意，作出相应辅助线，综合运用这些知识点是解题关键。

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 计算： $3 \tan 30^\circ + 2 \cos 45^\circ - 2 \sin 60^\circ \times \cot 45^\circ$

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先计算特殊角的三角函数值，然后计算乘法，最后从左向右依次计算，求出算式的值是多少即可。

【详解】解： $3 \tan 30^\circ + 2 \cos 45^\circ - 2 \sin 60^\circ \times \cot 45^\circ$

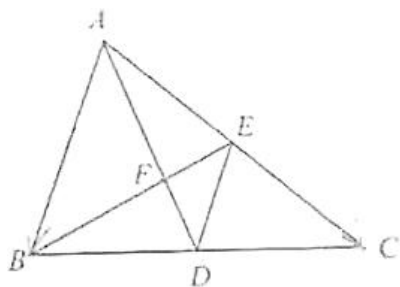
$$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$=\sqrt{2}$$

【点睛】此题主要考查了特殊角三角函数值的混合运算，熟练掌握特殊角三角函数值以及运算法则是解答本题的关键.

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 F 为 $\triangle ABC$ 的重心，联结 AF 并延长交 BC 于点 D ，联结 BF 并延长交 AC 于点 E .



(1) 求 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABF}}$ 的值;

(2) 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BE}$ 和 $\overrightarrow{AF}$.

【答案】(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】(1) 根据重心是三角形三边中线的交点即可得到 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，则 $DE = \frac{1}{2}AB$, $DE \parallel AB$,

即可证明 $\triangle ABF \sim \triangle DEF$, 得到 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABF}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$;

(2) 先求出 $AE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\vec{b}$, 再由 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$, 即可求出 $\overrightarrow{BE}$; 由 $\triangle ABF \sim \triangle DEF$, 得到

$\frac{BF}{EF} = \frac{AB}{DE} = 2$, 可以推出 $BF = \frac{2}{3}BE = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$, 则 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

【小问1详解】

解: $\because F$ 是三角形 ABC 的重心,

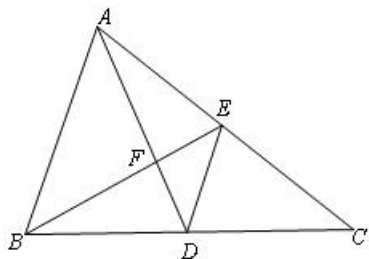
$\therefore D, E$ 分别是 BC, AC 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE = \frac{1}{2}AB$, $DE \parallel AB$,

$\therefore \triangle ABF \sim \triangle DEF$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABF}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4};$$



【小问 2 详解】

解: $\because F$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore D、E$ 分别是 $BC、AC$ 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{b},$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} b,$$

$$\therefore BE = AE - AB = \frac{1}{2} b - a,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle DEF,$$

$$\therefore \frac{BF}{EF} = \frac{AB}{DE} = 2,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2} BF,$$

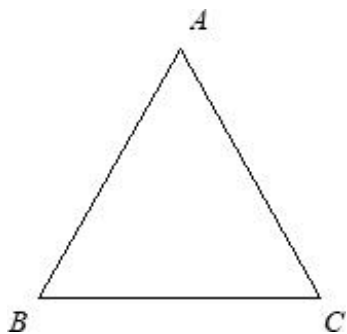
$$\therefore BF = \frac{2}{3} BE,$$

$$\therefore BF = \frac{2}{3} BE = \frac{1}{3} b - \frac{2}{3} a,$$

$$\therefore AF = AB + BF = \frac{1}{3} a + \frac{1}{3} b.$$

【点睛】 本题主要考查了三角形重心的性质，三角形中位线定理，相似三角形的性质与判定，向量的线性运算等等，熟知相似三角形的性质与判定条件是解题的关键.

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = \sqrt{5}$ ， $\sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.



(1) 求边 BC 的长度;

(2) 求 $\cos A$ 的值.

【答案】 (1) 2; (2) $\frac{3}{5}$.

【解析】

【分析】 (1) 作 $\triangle ABC$ 的高 AD , 由等腰三角形的性质“三线合一”, 可知 $AB = AC$. 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 由 $\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 即可求出 AD 的长, 再根据勾股定理即可求出 BD 的长, 从而即可求出 BC 的长;

(2) 再作 $\triangle ABC$ 的高 BE , 由面积法即可求出 BE 的长, 再在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, 由勾股定理即可求出 AE 的长, 最后根据 $\cos A = \frac{AE}{AB}$ 求值即可.

【小问 1 详解】

解: 如图, 作 $\triangle ABC$ 的高 AD ,

$\because AB = AC$,

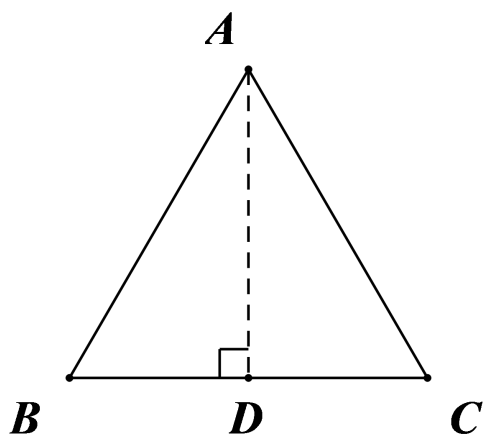
$\therefore$ 点 D 为 BC 中点, 即 $BD = CD$.

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 即 $\frac{AD}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore AD = 2$,

$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1$,

$\therefore BC = 2BD = 2$.



【小问 2 详解】

如图，再作 $\triangle ABC$ 的高 BE ，

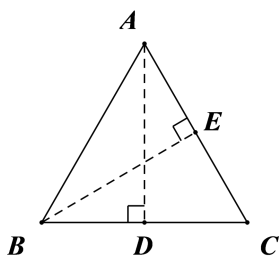
$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}AC \cdot BE,$$

$$\therefore 2 \cdot 2 = \sqrt{5} \cdot BE,$$

$$\therefore BE = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

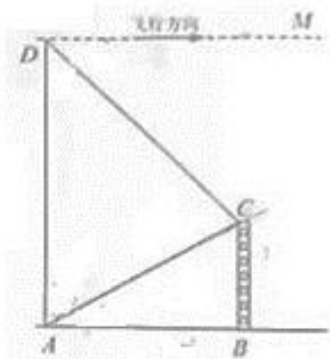
$$\because \text{在 } Rt\triangle ABE \text{ 中, } AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \cos A = \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}.$$



【点睛】本题考查等腰三角形的性质，勾股定理以及解直角三角形．作出常用的辅助线是解答本题的关键．

22. 如图，小明同学在学习了解直角三角形及其应用的知识后，尝试利用无人机测量他所住小区的楼房 BC 的高度，当无人机在地面 A 点处时，测得小区楼房 BC 顶端点 C 处的仰角为 30° ，当无人机垂直向上飞行到距地面 60 米的 D 点处时，测得小区楼房 BC 顶端点 C 处的俯角为 45° ．



(1) 求小区楼房 BC 的高度;

(2) 若无人机保持现有高度沿平行于 AB 的方向, 并以 5 米/秒的速度继续向前匀速飞行, 问: 经过多少秒后, 无人机无法观察到地面上点 A 的位置 (计算结果保留根号)

【答案】(1) $30(\sqrt{3}-1)$ 米

(2) $12\sqrt{3}$ 秒

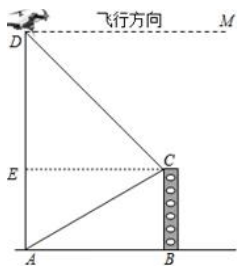
【解析】

【分析】(1) 过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 E , 可得四边形 $ABCE$ 为平行四边形, 从而得到 $AB=CE$, $AE=BC$, $\angle ACE=30^\circ$, 然后在 $Rt\triangle ACE$ 和 $Rt\triangle CDE$ 中, 利用锐角三角函数, 可得 $CE = \frac{AE}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}AE$, $DE=CE$, 即可求解;

(2) 设直线 DM 交 AC 延长线于点 F , 则 $DF \parallel AB$, 可得 $\angle F = \angle BAC = 30^\circ$, 在 $Rt\triangle ADF$ 中, 可得 $DF = \frac{AD}{\tan 30^\circ} = 60\sqrt{3}$ 米, 再除以速度, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图, 过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 E ,



根据题意得: $AD \perp AB$, $BC \perp AB$, $AD=60$ 米, $\angle BAC=30^\circ$, $\angle CDE=45^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$, $AB \parallel CE$,

$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 为平行四边形,

$\therefore AB=CE$, $AE=BC$, $\angle ACE=30^\circ$,

在 $Rt\triangle ACE$ 中, $\angle ACE=30^\circ$,

【解析】

【分析】(1) 由 $BC^2 = CD \cdot BE$ 可得 $\frac{BC}{CD} = \frac{BE}{BC}$ 可得 $\triangle BCE \sim \triangle BCD$, 然后再说明 $\triangle ABC \sim \triangle BCD$, 即可证明结论;

(2) 说明 $\triangle ABE \sim \triangle CMF$ 即可证明结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because BC^2 = CD \cdot BE$

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{BE}{BC}$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad CD \perp AB$$

$$\therefore \angle BDC = \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle EBC \sim \triangle BCD$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad CD \perp AB$$

$$\therefore \angle A + \angle ABC = 90^\circ, \quad \angle DCB + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle DCB$$

$$\because \angle CBD = \angle CBD$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BCD$$

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ACB.$$

【小问 2 详解】

解: $\because \triangle BCE \sim \triangle ACB$

$$\therefore \angle A = \angle CBE$$

$$\because \triangle BCE \sim \triangle BCD$$

$$\therefore \angle DCB = \angle CBE$$

$$\because \angle AEB = \angle CBE + \angle BCE, \angle CFM = \angle CDA + \angle FMD$$

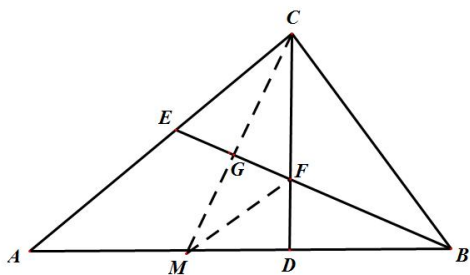
$$\therefore \angle AEB = \angle CFM$$

$$\because CG \perp BE, \quad CD \perp AB, \quad \angle CFD = \angle DFB$$

$$\therefore \angle MCF = \angle FBD$$

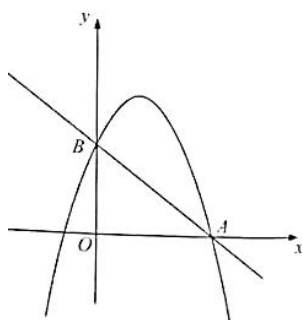
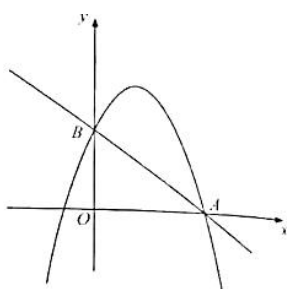
$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CMF$$

$$\therefore BE \cdot CM = AB \cdot CF.$$



【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定与性质，灵活运用相似三角形的判定定理成为解答本题的关键.

24. 如图，抛物线 $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(4, 0)$ ，与 y 轴交于点 $B(0, 3)$ ，点 $M(m, 0)$ 为线段 OA 上一动点，过点 M 且垂直于 x 轴的直线与直线 AB 及抛物线分别交于点 P, N .



(备用图)

- (1) 求抛物线的解析式，并写出此抛物线的对称轴和顶点坐标；
- (2) 如果以点 P, N, B, O 为顶点的四边形为平行四边形，求 m 的值；
- (3) 如果以 B, P, N 为顶点的三角形与 $\triangle ABO$ 相似，求点 M 的坐标.

【答案】(1) 抛物线的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3$ ，对称轴为 $x = \frac{3}{2}$ ，顶点坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{75}{16})$ ；

(2) $m=2$ ； (3) 点 M 的坐标为 $(\frac{11}{9}, 0)$ 或 $(3, 0)$.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求抛物线解析式，利用配方法可求得此抛物线的对称轴和顶点坐标；

(2) 先求得直线 AB 的解析式，得到 $NP = -\frac{3}{4}m^2 + 3m$ ，根据 $NP = OB$ ，列出方程求解即可；

(3) 利用两点间的距离公式计算出 $AB=5$, $BP=\frac{5}{4}m$, $NP=-\frac{3}{4}m^2+3m$, 分 $\frac{PB}{OB}=\frac{PN}{AB}$ 时, $\triangle BPN \sim \triangle OBA$;

$\frac{PB}{AB}=\frac{PN}{OB}$ 时, $\triangle BPN \sim \triangle ABO$ 两种情况讨论即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y=-\frac{3}{4}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(4, 0)$, 与 y 轴交于点 $B(0, 3)$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{3}{4} \times 4^2 + 4b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = \frac{9}{4}, \\ c = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x+3$,

$$\therefore y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x+3=-\frac{3}{4}(x-\frac{3}{2})^2+\frac{75}{16},$$

$\therefore$ 此抛物线的对称轴为 $x=\frac{3}{2}$,

顶点坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{75}{16})$;

【小问 2 详解】

解: 设直线 AB 的解析式为 $y=px+q$,

$$\text{把 } A(4, 0), B(0, 3) \text{ 代入得 } \begin{cases} 4p+q=0 \\ q=3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} p=-\frac{3}{4}, \\ q=3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$,

$\because M(m, 0)$, $MN \perp x$ 轴,

$$\therefore N(m, -\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{4}m+3), P(m, -\frac{3}{4}m+3),$$

$$\therefore NP=-\frac{3}{4}m^2+3m, OB=3,$$

$\because NP \parallel OB$, 且以点 P, N, B, O 为顶点的四边形为平行四边形,

$$\therefore NP = OB, \text{ 即 } -\frac{3}{4}m^2 + 3m = 3,$$

$$\text{整理得: } m^2 - 4m + 4 = 0,$$

$$\text{解得: } m = 2;$$

【小问 3 详解】

$$\because A(4, 0), B(0, 3), P(m, -\frac{3}{4}m + 3),$$

$$\therefore AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, BP = \sqrt{m^2 + \left(-\frac{3}{4}m + 3 - 3\right)^2} = \frac{5}{4}m,$$

$$\text{而 } NP = -\frac{3}{4}m^2 + 3m,$$

$$\because PN \parallel OB,$$

$$\therefore \angle BPN = \angle ABO,$$

$$\text{当 } \frac{PB}{OB} = \frac{PN}{AB} \text{ 时, } \triangle BPN \sim \triangle OBA,$$

$$\text{即 } \frac{\frac{5}{4}m}{3} = \frac{-\frac{3}{4}m^2 + 3m}{5},$$

$$\text{整理得 } 9m^2 - 11m = 0, \text{ 解得 } m_1 = 0 \text{ (舍去)}, m_2 = \frac{11}{9},$$

$$\text{此时 } M \text{ 点的坐标为 } \left(\frac{11}{9}, 0\right);$$

$$\text{当 } \frac{PB}{AB} = \frac{PN}{OB} \text{ 时, } \triangle BPN \sim \triangle ABO,$$

$$\text{即 } \frac{\frac{5}{4}m}{5} = \frac{-\frac{3}{4}m^2 + 3m}{3},$$

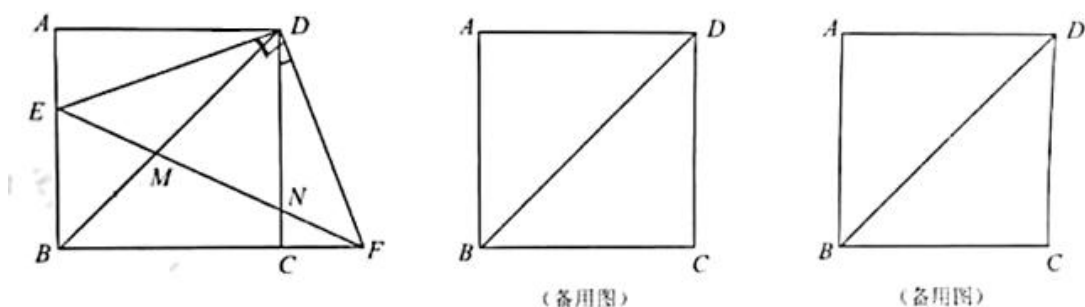
$$\text{整理得 } 2m^2 - 5m = 0, \text{ 解得 } m_1 = 0 \text{ (舍去)}, m_2 = 3,$$

$$\text{此时 } M \text{ 点的坐标为 } (3, 0);$$

$$\text{综上所述, 点 } M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{11}{9}, 0\right) \text{ 或 } (3, 0).$$

【点睛】本题考查了二次函数的综合题：熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的性质和相似三角形的判定与性质；会利用待定系数法求函数解析式；灵活应用相似比表示线段之间的关系；理解坐标与图形的性质；会利用分类讨论的思想解决数学问题.

25. 已知：如图，正方形的边长为 1，在射线 AB 上取一点 E ，联结 DE ，将 ADE 绕点 D 针旋转 90° ， E 点落在点 F 处，联结 EF ，与对角线 BD 所在的直线交于点 M ，与射线 DC 交于点 N 。求证：



- (1) 当 $AE = \frac{1}{3}$ 时, 求 $\tan \angle EDB$ 的值;
- (2) 当点 E 在线段 AB 上, 如果 $AE = x$, $FM = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;
- (3) 联结 AM , 直线 AM 与直线 BC 交于点 G , 当 $BG = \frac{1}{3}$ 时, 求 AE 的值.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$;

(2) $y = \frac{1}{2}(1+x)\sqrt{2+2x^2}$, $0 \leq x \leq 1$;

(3) AE 的值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】(1) 过点 E 作 $EH \perp BD$ 于 H , 根据正方形的边长为 1, $AE = \frac{1}{3}$, 求出 $EB = 1 - AE = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, 根据正方形性质可求 $\angle ABD = 45^\circ$, 根据 $EH \perp BD$, 得出 $\angle BEH = 180^\circ - \angle EBH - \angle EHB = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$, 求出 $EH = BH = BE \sin 45^\circ = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 以及 $DH = DB - BH = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 利用三角函数定义求解即可;

(2) 解: 根据 $AE = x$, 求出 $BE = 1 - x$, 根据旋转将 $\triangle ADE$ 绕点 D 针旋转 90° , 得到 $\triangle DCF$, $CF = AE = x$, 根据勾股定理 $ED = FD = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{1 + x^2}$, $EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (1+x)^2} = \sqrt{2 + 2x^2}$, 可证

$\triangle DEF$ 为等腰直角三角形, 先证 $\triangle BEM \sim \triangle FDM$, 得出 $\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{BM}{y}$, 再证 $\triangle EMD \sim \triangle BMF$, 得出

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x} = \frac{\sqrt{2+2x^2}-y}{BM}, \text{ 两式相乘得出 } \frac{1-x}{1+x} = \frac{\sqrt{2+2x^2}-y}{y}, \text{ 整理即可;}$$

(3) 当点 G 在 BC 上, $BG = \frac{1}{3}$, 先证 $\triangle BGM \sim \triangle DAM$, 得出 $\frac{BG}{DA} = \frac{BM}{DM} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$, 由 (2) 知 $\triangle BEM \sim \triangle FDM$,

得出 $\frac{BM}{MF} = \frac{BE}{DF}$, 得出 $\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{y} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$, 结合 $y = \frac{1}{2}(1+x)\sqrt{2+2x^2}$, 消去 y , 当点 G 在 CB 延长线上,

$BG = \frac{1}{3}$, 过 M 作 $ML \perp BC$, 交直线 BC 于 L , 证明 $\triangle BGM \sim \triangle DAM$, 得出 $BM = \frac{1}{2}BD$, 根据

$\angle LBM = \angle CBD = 45^\circ$, $ML \perp BC$, 证出 $\triangle MLB$ 为等腰直角三角形, 再证 $\triangle MLB \sim \triangle DCB$, $\frac{BM}{BD} = \frac{ML}{DC} = \frac{1}{2}$,

$CD=1$, $ML = \frac{1}{2}$, $ML \parallel BE$, 结合 $\triangle LMF \sim \triangle BEF$, 得出 $\frac{LM}{BE} = \frac{LF}{BF}$ 即 $\frac{\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{\frac{3}{2}+x}{1+x}$ 解方程即可.

【小问 1 详解】

解: 过点 E 作 $EH \perp BD$ 于 H ,

$\because$ 正方形的边长为 1, $AE = \frac{1}{3}$,

$\therefore EB = 1 - AE = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

$\because BD$ 为正方形对角线,

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD = 45^\circ$,

$\because EH \perp BD$,

$\therefore \angle BEH = 180^\circ - \angle EBH - \angle EHB = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$,

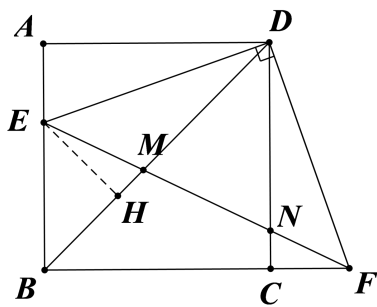
$\therefore EH = BH$,

$\therefore EH = BH = BE \sin 45^\circ = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $AB = BD \cos 45^\circ$,

$\therefore BD = 1 \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$,

$\therefore DH = DB - BH = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\tan \angle EDB = \frac{EH}{HD} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2}$;



【小问 2 详解】

解：如上图， $\because AE=x$,

$$\therefore BE=1-x,$$

$\therefore$ 将 $\triangle ADE$ 绕点 D 针旋转 90° , 得到 $\triangle DCF$,

$$\therefore CF=AE=x, \quad ED=FD=\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{1+x^2},$$

$$\therefore BF=BC+CF=1+x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle EBF \text{ 中 } EF=\sqrt{BE^2+BF^2}=\sqrt{(1-x)^2+(1+x)^2}=\sqrt{2+2x^2},$$

$$\because \angle EDF=90^\circ, \quad ED=FD,$$

$\therefore \triangle DEF$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle DFE=\angle DEF=45^\circ,$$

$$\therefore \angle EBM=\angle MFD=45^\circ,$$

$$\therefore \angle EMB=\angle DMF,$$

$$\therefore \triangle BEM \sim \triangle FDM,$$

$$\therefore \frac{BE}{DF}=\frac{BM}{FM}, \quad \text{即 } \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{BM}{y},$$

$$\therefore \angle DEM=\angle FBM=45^\circ, \quad \angle EMD=\angle BMF,$$

$$\therefore \triangle EMD \sim \triangle BMF,$$

$$\therefore \frac{ED}{BF}=\frac{EM}{BM}, \quad \text{即 } \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}=\frac{\sqrt{2+2x^2}-y}{BM},$$

$$\therefore \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}=\frac{BM}{y} \times \frac{\sqrt{2+2x^2}-y}{BM},$$

$$\therefore \frac{1-x}{1+x}=\frac{\sqrt{2+2x^2}-y}{y},$$

$$\therefore \frac{1-x+1+x}{1+x}=\frac{\sqrt{2+2x^2}-y+y}{y} \quad \text{即 } \frac{2}{1+x}=\frac{\sqrt{2+2x^2}}{y},$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}(1+x)\sqrt{2+2x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

【小问3 详解】

解：当点 G 在 BC 上， $BG = \frac{1}{3}$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AD \parallel BG$ ，

$\therefore \angle DAM = \angle BGM$ ， $\angle ADM = \angle GBM$ ，

$\therefore \triangle BGM \sim \triangle DAM$ ，

$$\therefore \frac{BG}{DA} = \frac{BM}{DM} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}，$$

$\because$ 由 (2) 知 $\triangle BEM \sim \triangle FDM$ ，

$$\therefore \frac{BM}{MF} = \frac{BE}{DF}，$$

$\because DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2}$ ，

$$\therefore BM = \frac{1}{3}DM， BM + DM = \sqrt{2}，$$

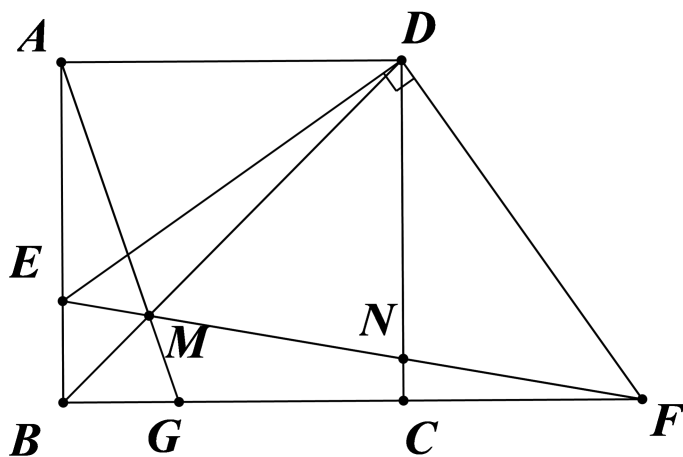
$$\therefore BM = \frac{\sqrt{2}}{4}，$$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{y} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}，$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}(1+x)\sqrt{2+2x^2}，$$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}(1+x)\sqrt{2+2x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ 即 } 1-x^2 = \frac{1}{2}，$$

解 $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 舍去；



当点 G 在 CB 延长线上, $BG = \frac{1}{3}$, 过 M 作 $ML \perp BC$, 交直线 BC 于 L ,

$\because GB \parallel AD$,

$\therefore \angle DAM = \angle BGM, \angle ADM = \angle GBM$,

$\therefore \triangle BGM \sim \triangle DAM$,

$$\therefore \frac{BG}{DA} = \frac{BM}{DM} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore BM = \frac{1}{3} DM,$$

$$\therefore BM = \frac{1}{2} BD,$$

$\because \angle LBM = \angle CBD = 45^\circ, ML \perp BC$,

$\therefore \triangle MLB$ 为等腰直角三角形,

$\because ML \parallel CD$,

$\therefore \angle LMB = \angle CDB, \angle L = \angle DCB$,

$\therefore \triangle MLB \sim \triangle DCB$,

$$\therefore \frac{BM}{BD} = \frac{ML}{DC} = \frac{1}{2}, \quad CD = 1,$$

$$\therefore ML = \frac{1}{2}$$

$\because ML \parallel BE$,

$\therefore \angle L = \angle FBE, \angle LMF = \angle BEF$,

$\therefore \triangle LMF \sim \triangle BEF$,

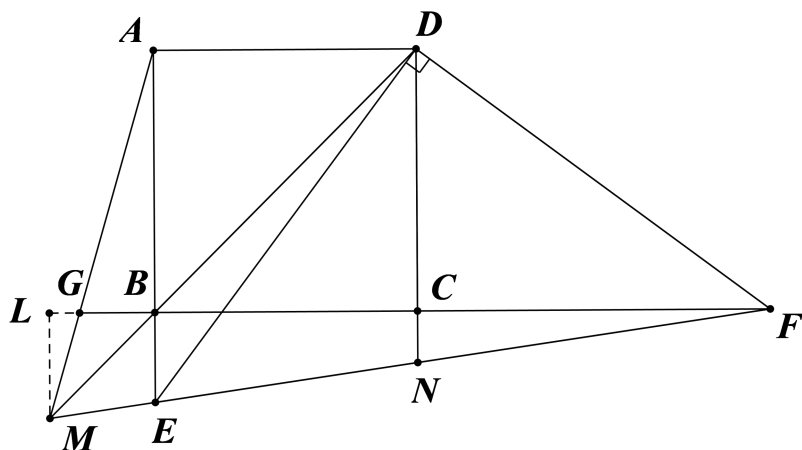
$$\therefore \frac{LM}{BE} = \frac{LF}{BF},$$

$$\because BE=AE-AB=x-1, \quad LF=LB+BC+CF=\frac{1}{2}+1+x=\frac{3}{2}+x, \quad BF=BC+CF=1+x,$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{\frac{3}{2}+x}{1+x},$$

$$\text{整理得: } 2x^2 = 4,$$

$$\text{解得 } x_3 = \sqrt{2}, \quad x_4 = -\sqrt{2} \text{ 舍去,}$$



$$\therefore AE \text{ 的值为 } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } \sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查正方形性质，图形旋转先证，等腰直角三角形判定与性质，锐角三角函数定义，三角形相似判定与性质，勾股定理，解一元二次方程，函数关系式，本题难度大，利用辅助线狗仔三角形相似是解题关键.