

2022 年上海市奉贤区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 在平面直角坐标系 xOy 中, 下列函数的图像过点 $(-1, 1)$ 的是 ()

- A. $y = x - 1$ B. $y = -x + 1$ C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = x^2$

【答案】D

【解析】

【分析】利用 $x=-1$ 时, 求函数值进行一一检验是否为 1 即可

【详解】解: 当 $x=-1$ 时, $y = -1 - 1 = -2 \neq 1$, $y = x - 1$ 图象不过点 $(1, 1)$, 选项 A 不合题意;

当 $x=-1$ 时, $y = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 1$, $y = -x + 1$ 图象不过点 $(1, 1)$, 选项 B 不合题意;

当 $x=-1$ 时, $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1 \neq 1$, $y = \frac{1}{x}$ 图象不过点 $(1, 1)$, 选项 C 不合题意;

当 $x=-1$ 时, $y = (-1)^2 = 1$, $y = x^2$ 图象过点 $(1, 1)$, 选项 D 合题意;

故选择: D.

【点睛】本题考查求函数值, 识别函数经过点, 掌握求函数值的方法, 点在函数图像上点的坐标满足函数解析式是解题关键.

2. 从图形运动的角度研究抛物线, 有利于我们认识新的抛物线的特征. 如果将抛物线 $y = x^2 + 2$ 绕着原点旋转 180° , 那么关于旋转后所得新抛物线与原抛物线之间的关系, 下列法正确的是 ()

- A. 它们的开口方向相同 B. 它们的对称轴相同
C. 它们的变化情况相同 D. 它们的顶点坐标相同

【答案】B

【解析】

【分析】根据旋转的性质及抛物线的性质即可确定答案.

【详解】抛物线 $y = x^2 + 2$ 的开口向上, 对称轴为 y 轴, 顶点坐标为 $(0, 2)$, 将此抛物线绕原点旋转 180° 后所得新抛物线的开口向下, 对称轴仍为 y 轴, 顶点坐标为 $(0, -2)$, 所以在四个选项中, 只有 B 选项符合题意.

故选: B

【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质, 旋转的性质等知识, 掌握这两方面的知识是关键.

3. 如果直线 $y = 2x$ 与 x 轴正半轴的夹角为锐角 α , 那么下列各式正确的是 ()

- A. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ B. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ C. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ D. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】在直线 $y=2x$ 上任取一点 $P(a, 2a)$ ，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为点 B ，则可求得 α 的正余弦、正余切值，从而可得答案.

【详解】如图，在直线 $y=2x$ 上任取一点 $P(a, 2a)$ ，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为点 B
则 $OB=|a|$ ， $PB=2|a|$

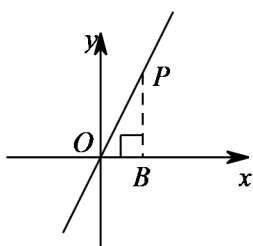
由勾股定理得： $OP = \sqrt{OB^2 + PB^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5} |a|$

在直角 $\triangle POB$ 中， $\sin \alpha = \frac{PB}{OP} = \frac{2|a|}{\sqrt{5}|a|} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ， $\cos \alpha = \frac{OB}{OP} = \frac{|a|}{\sqrt{5}|a|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

$\tan \alpha = \frac{PB}{OB} = \frac{2|a|}{|a|} = 2$ ， $\cot \alpha = \frac{OB}{PB} = \frac{|a|}{2|a|} = \frac{1}{2}$

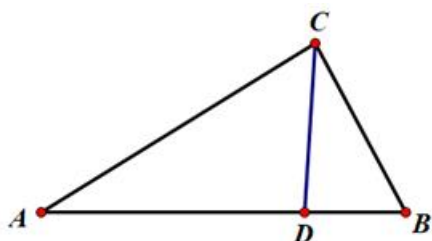
故选项 D 正确

故选：D



【点睛】本题考查了正比例函数的图象与性质，锐角三角函数，关键是画出图形，并在直线任取一点，作 x 轴的垂线得到直角三角形.

4. 如图，已知 D 是 $\triangle ABC$ 边 AB 上的一点，如果 $\angle BCD = \angle A$ ，那么下列结论中正确的是（ ）



A. $AC^2 = AD \cdot AB$

B. $BC^2 = BD \cdot AB$

C. $CD^2 = AD \cdot BD$

D. $AD^2 = BD \cdot CD$

【答案】B

【解析】

【分析】由已知条件： $\angle BCD = \angle A$ ， $\angle B = \angle B$ ，可判定 $\triangle BCD \sim \triangle BAC$ ，再根据相似三角形的性质进行判断即可.

【详解】 $\because \angle BCD = \angle A$ ， $\angle B = \angle B$ ，

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}, \text{ 即 } BC^2 = BD \cdot AB.$$

故选: B.

【点睛】此题主要考查的是相似三角形的判定和性质, 能够发现隐含条件公共角 $\angle B$ 是解答此题的关键.

5. 已知线段 AB . 按以下步骤作图:

(1) 作以 A 为端点的射线 AP (不与线段 AB 所在直线重合);

(2) 在射线 AP 上顺次截取 $AC = CD = DE$;

(3) 联结 BE , 过点 D 作 $DF \parallel BE$, 交线段 AB 于点 F .

根据上述作图过程, 下列结论中正确的是 ()

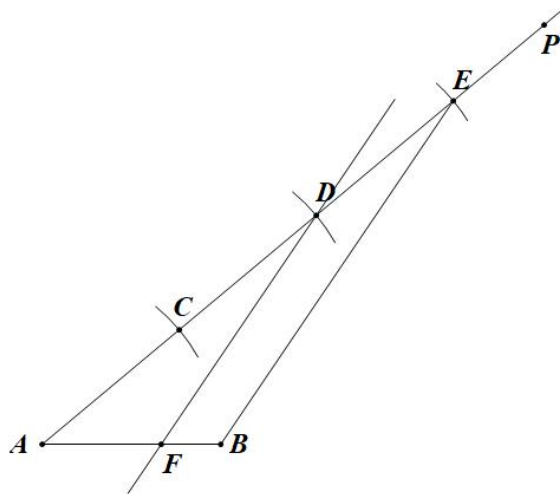
- A. $AF:AB=1:2$ B. $AF:AB=1:3$ C. $AF:AB=2:3$ D. $AF:AB=2:1$.

【答案】C

【解析】

【分析】作出图形如图, 由题意, 得 $AD = 2DE$, 由平行线分线段成比例定理求出 $AF:BF$, 至此问题不难解答.

【详解】解: 作出图形如图.



由题意, 得 $AD = 2DE$.

$$\because DF \parallel BE,$$

$$\therefore AD:DE = AF:BF = 2:1,$$

$$\therefore AF:AB = 2:3,$$

故选: C.

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理, 尺规作图, 正确理解平行线分线段成比例定理是解此题的关键.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2\sqrt{3}$, $\angle BAC = 30^\circ$. 下列线段 BC 的长度不能使 $\triangle ABC$ 的形状和大小都确定的是

()

A. 2

B. 4

C. $\sqrt{3}$

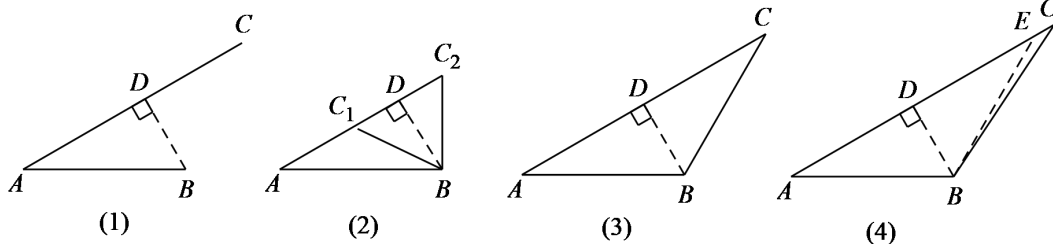
D. $2\sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 画出图形，过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D ，则可求得 BD 的长为 $\sqrt{3}$ ，根据所给 BC 的长度与 BD 比较即可作出判断.

【详解】 如图 (1)，过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D



$$\text{则 } BD = AB \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

故当 $BC = \sqrt{3}$ ，即点 D 与点 C 重合时， $\triangle ABC$ 的形状和大小唯一确定，即 C 选项不符合题意；

当 $BC = 2$ 时，如图 (2)，则 $BC_1 = BC_2 = 2$ ，此时 $\triangle ABC_1$ 与 $\triangle ABC_2$ 的形状和大小不相同，即选项 A 符合题意；

当 $BC = 2\sqrt{3}$ 时， $\triangle ABC$ 是等腰三角形，如图 (3)，此时 $\triangle ABC$ 的形状与大小确定，故选项 D 不符合题意；

当 $BC = 4$ 时，如图 (4)， $\triangle ABC$ 是钝角三角形，形状与大小确定，故选项 B 不符合题意；

故选：A

【点睛】 本题考查了锐角三角函数及三角形形状的确定，关键是作 $BD \perp AC$ ，把 BC 与 BD 进行比较.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 如果 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \neq 0$ ，那么 $\frac{y-x}{z} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 由 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \neq 0$ ，设 $x = 2k$ ，则 $y = 3k, z = 5k$ ，再代入求值即可.

【详解】 解： $\because \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \neq 0$,

设 $x = 2k$ ，则 $y = 3k, z = 5k$,

$$\therefore \frac{y-x}{z} = \frac{3k-2k}{5k} = \frac{1}{5},$$

故答案为: $\frac{1}{5}$

【点睛】 本题考查的是比例的基本性质, 掌握“设参数的方法解决比例问题”是解本题的关键.

8. 函数 $y = \frac{x}{x+1}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq -1$

【解析】

【分析】 根据分母不为零, 即可求得定义域.

【详解】 解: 由题意, $x+1 \neq 0$

即 $x \neq -1$

故答案为: $x \neq -1$

【点睛】 本题考查了使函数有意义的自变量的取值范围, 即函数的定义域, 对于分母中含有未知数的函数解析式, 必须考虑其分母不为零.

9. 计算: $2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) =$ _____.

【答案】 $5\vec{a} - \vec{b}$

【解析】

【分析】 根据平面向量的运算法则解答即可.

【详解】 解: $2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 4\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - \vec{b}$.

故答案为: $5\vec{a} - \vec{b}$.

【点睛】 本题考查了平面向量的运算, 掌握平面向量的运算法则是解题的关键.

10. 如果函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象经过第二、四象限, 那么 y 的值随 x 的值增大而_____. (填“增大”或“减小”)

【答案】 减小

【解析】

【分析】 根据正比例函数的性质进行解答即可.

【详解】 解: 函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象经过第二、四象限, 那么 y 的值随 x 的值增大而减小,

故答案为: 减小.

【点睛】 此题考查的是判断正比例函数的增减性, 掌握正比例函数的性质是解决此题的关键.

11. 如果抛物线 $y = (x-2)^2 + k$ 不经过第三象限, 那么 k 的值可以是_____. (只需写一个)

【答案】 $k = 2$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 抛物线 $y = (x-2)^2 + k$ 不经过第三象限, 可得抛物线与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴或原点, 可得 $4+k \geq 0$, 从而可得答案.

【详解】解：∵ 抛物线 $y = (x-2)^2 + k$ 的开口向上，又不经过第三象限，

∴ 抛物线与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴或原点，

而当 $x=0$ 时， $y=4+k$ ，

$$\begin{cases} 4+k \geq 0, \end{cases}$$

解得： $k \geq -4$ ，

所以当 $k=2$ 时，符合题意，

故答案为： $k=2$ （答案不唯一）

【点睛】本题考查的是抛物线的性质，掌握“抛物线与 y 轴的交点的位置与图象的关系”是解本题的关键.

12. 用描点法画二次函数的图像需要经过列表、描点、连线三个步骤. 以下是小明画二次函数

$y = ax^2 + bx + c$ 图像时所列的表格:

x	...	-4	-3	-2	0	2	...
y	...	3	0	-1	3	15	...

根据表格可以知道该二次函数图像的顶点坐标是_____.

【答案】(-2, -1)

【解析】

【分析】根据表格得出 (-4, 3) 与 (0, 3) 是二次函数图像上关于对称轴对称的两点，根据对称两点求对称轴的公式可求二次函数的对称轴为： $x = \frac{-4+0}{2} = -2$ ，根据图表得出二次函数的顶点坐标为 (-2, -1).

【详解】解：∵ $x=-4$ 与 $x=0$ 时的函数值都为 3，

∴ (-4, 3) 与 (0, 3) 是二次函数图像上关于对称轴对称的两点，

∴ 二次函数的对称轴为： $x = \frac{-4+0}{2} = -2$ ，

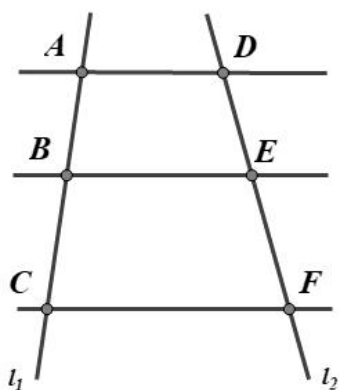
∴ (-2, -1) 是对称轴与二次函数的交点，

∴ 二次函数的顶点坐标为 (-2, -1).

故答案为 (-2, -1).

【点睛】本题考查二次函数表格数据的获取和处理，会从表格中找出关于二次函数对称轴对称的两点，会求对称轴，掌握对称轴与函数图像的交点是二次函数的顶点是解题关键.

13. 如图, 已知 $AD \parallel BE \parallel CF$, 它们依次交直线 l_1 、 l_2 于点 A 、 B 、 C 和点 D 、 E 、 F . 如果 $5AB = 2AC$, $DE = 6$, 那么线段 EF 的长是_____.



【答案】 9

【解析】

【分析】 先证明 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, 再利用 $5AB = 2AC$, 求解 $\frac{AB}{BC}$, 从而可得答案.

【详解】 解: $\because AD \parallel BE \parallel CF$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF},$$

$$\because 5AB = 2AC,$$

设 $AB = 2k$, 则 $AC = 5k$,

$$\therefore BC = AC - AB = 5k - 2k = 3k,$$

$$\because DE = 6,$$

$$\therefore \frac{2k}{3k} = \frac{6}{EF},$$

解得: $EF = 9$, 经检验符合题意;

故答案为: 9.

【点睛】 本题考查的是平行线分线段成比例, 掌握“利用平行线分线段成比例列方程”是解本题的关键.

14. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{3}{4}$, $BC = 6$, 则 AB 的长是____.

【答案】 8.

【解析】

【详解】 试题分析: 利用锐角三角函数定义求出所求即可,

$$\because \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \angle C = 90^\circ, \sin A = \frac{3}{4}, BC = 6,$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB}, \text{ 即 } \frac{6}{AB} = \frac{3}{4},$$

解得：AB=8.

考点：解直角三角形.

15. 联结三角形各边中点，所得的三角形的周长与原三角形周长的比是_____.

【答案】1: 2.

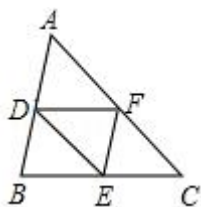
【解析】

【分析】根据 D 、 E 、 F 分别是 AB 、 BC 、 AC 的中点，得出 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ ，然后利用相似三角形周长比等于相似比，可得出答案.

【详解】如图， $\because D$ 、 E 、 F 分别是 AB 、 BC 、 AC 的中点， $\therefore DE = \frac{1}{2}AC$ ， $DE \parallel AC$ ， $\therefore \triangle DEF \sim \triangle CAB$ ， $\therefore$

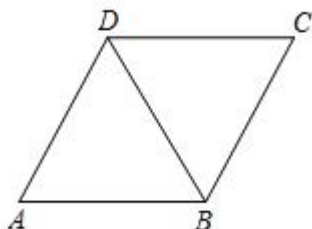
所得到的 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的周长之比是：1: 2.

故答案为 1: 2.



【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质和三角形中位线定理的理解和掌握，解答此题的关键是利用了相似三角形周长比等于相似比.

16. 如图，已知菱形 $ABCD$ ， E 、 F 分别为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 的重心，如果边 $AB=5$ ，对角线 $BD=6$ ，那么 EF 的长为_____.



【答案】 $\frac{8}{3}$

【解析】

【分析】连接 AE 并延长交 BD 于点 M ，连接 AC 交 BD 于点 O ，连接 OM ，由菱形的性质及三角形中位线的性质可得 $OM \parallel AD$ ，则 $\triangle OEM \sim \triangle AED$ ，从而由相似三角形性质可得 $AE=2OE$ ，同理 $CF=2OF$ ，则可得 $EF = \frac{1}{3}AC$ ，由菱形的性质可求得 OA 的长，从而可得 AC 的长，因此可求得 EF 的长.

【详解】连接 AE 并延长交 BD 于点 M ，连接 AC 交 BD 于点 O ，连接 OM ，如图

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形

$$\therefore OB = \frac{1}{2}BD = 3, AC = 2OA = 2OC, AC \perp BD$$

$\therefore E$ 点是 $\triangle ABD$ 的重心

$\therefore$ 点 M 是 AB 的中点

$\therefore OM$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线

$\therefore OM \parallel AD, AD = 2OM$

$\therefore \triangle OEM \sim \triangle AED$

$$\therefore \frac{OE}{AE} = \frac{OM}{AD} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore AE = 2OE$$

$$\text{即 } OE = \frac{1}{3}OA$$

$$\text{同理 } OF = \frac{1}{3}OC$$

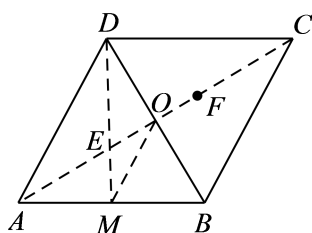
$$\therefore EF = OE + OF = \frac{1}{3}AC$$

在 $Rt\triangle AOB$ 中, 由勾股定理得: $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$$\therefore AC = 2OA = 8$$

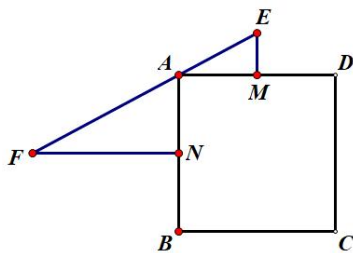
$$\therefore EF = \frac{1}{3}AC = \frac{8}{3}$$

故答案为: $\frac{8}{3}$



【点睛】 本题考查了菱形的性质, 相似三角形的判定与性质, 三角形中位线定理, 勾股定理, 重心的概念等知识, 灵活运用这些知识并构造适当的辅助线是解题的关键.

17. 《九章算术》是我国古代的数学名著, 书中有这样一个问题: “今有邑方不知大小, 各中 开门, 出北门一百步立一表, 出西门二百二十五步适可见之, 问邑方几何?” 它的意思是: 如图, M 、 N 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AD , AB 的中点, $ME \perp AD$, $NF \perp AB$, EF 过点 A , 且 $ME = 100$ 步, $NF = 225$ 步, 那么该正方形城邑边长 AD 约为_____步.



【答案】 300

【解析】

【分析】 设 $AD=2x$ ，则由 M 、 N 分别是 AD 、 AB 的中点可得 $AM=AN=x$ ，由两个垂直条件及正方形的性质，易得 $\triangle EAM \sim \triangle AFN$ ，由相似三角形的性质即可求得 x 的值，从而可得 AD 的值.

【详解】 设 $AD=2x$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore AD=AB$, $AD \perp AB$

$\because M$ 、 N 分别是 AD 、 AB 的中点

$\therefore AM = \frac{1}{2} AD = x$, $AN = \frac{1}{2} AB = x$

$\therefore AM=AN=x$

$\because NF \perp AB$, $AD \perp AB$

$\therefore NF \parallel AD$

$\therefore \angle EAM = \angle AFN$

$\because EM \perp AD$, $NF \perp AB$

$\therefore \angle EMA = \angle FNA = 90^\circ$

$\therefore \triangle EAM \sim \triangle AFN$

$\therefore \frac{EM}{AN} = \frac{AM}{NF}$

即 $AM \times AN = EM \times NF$

$\therefore x^2 = 100 \times 225$

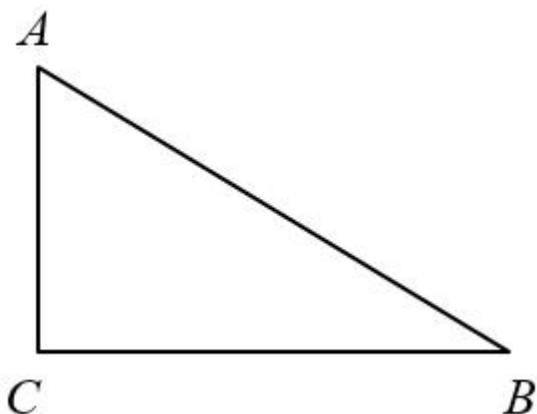
$\therefore x = 150$

$\therefore AD$ 的长为 $2 \times 150 = 300$ (步)

故答案为: 300

【点睛】 本题考查了正方形的性质，相似三角形的判定与性质等知识，关键是相似三角形的判定与性质的运用.

18. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$, $\sin B = \frac{3}{5}$. D 是边 BC 的中点，点 E 在边 AB 上，将 $\triangle BDE$ 沿直线 DE 翻折，使得点 B 落在同一平面内的点 F 处. 如果线段 FD 交边 AB 于点 G ，当 $FD \perp AB$ 时， $AE:BE$ 的值为_____.



【答案】 1:4

【解析】

【分析】 过点 E 作 $EH \perp AC$ 与 H , $EI \perp BC$ 与 I , 设 $AC=3m$, 根据三角函数可求 $AB = \frac{AC}{\sin B} = \frac{3m}{\frac{3}{5}} = 5m$, 根

据勾股定理 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(5m)^2 - (3m)^2} = 4m$, 根据点 D 是边 BC 的中点, 得出 $CD=BD=2m$,

$DG=BD\sin B = 2m \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}m$, 根据 $\triangle BDE$ 沿直线 DE 翻折, 得到 $\triangle FDE$, 得出 $\angle EDC = \angle EDF$, 可证

$\triangle EID \cong \triangle EGD$ (AAS), 得出 $ID=GD=\frac{6}{5}m$, 再证四边形 $HCIE$ 为矩形 $HE=CI=\frac{4}{5}m$, $HE \parallel CI$ 即 $HE \parallel CB$,

证明 $\triangle AEH \sim \triangle ABC$, $AE = \frac{\frac{4}{5}m}{4m} \times 5m = m$ 即可.

【详解】 解: 过点 E 作 $EH \perp AC$ 与 H , $EI \perp BC$ 与 I ,

设 $AC=3m$, $\angle C = 90^\circ$, $\sin B = \frac{3}{5}$,

$$\therefore AB = \frac{AC}{\sin B} = \frac{3m}{\frac{3}{5}} = 5m,$$

根据勾股定理 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(5m)^2 - (3m)^2} = 4m$,

$\because$ 点 D 是边 BC 的中点,

$$\therefore CD=BD=2m,$$

$\because FD \perp AB$,

$$\therefore DG=BD\sin B = 2m \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}m,$$

$\because \triangle BDE$ 沿直线 DE 翻折,得到 $\triangle FDE$,

$$\therefore \angle EDC = \angle EDF,$$

$$\because EI \perp BC,$$

$$\therefore \angle EID = 90^\circ = \angle EGD,$$

在 $\triangle EID$ 和 $\triangle EGD$ 中,

$$\begin{cases} \angle EID = \angle EGD \\ \angle EDI = \angle EDG, \\ ED = ED \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EID \cong \triangle EGD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore ID = GD = \frac{6}{5}m,$$

$$\therefore CI = CD - ID = 2m - \frac{6}{5}m = \frac{4}{5}m,$$

$$\because EH \perp AC,$$

$$\therefore \angle EHC = 90^\circ,$$

$$\because \angle HCI = \angle ACB = 90^\circ, \quad \angle EIC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EHC = \angle HCI = \angle EIC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $HCIE$ 为矩形,

$$\therefore HE = CI = \frac{4}{5}m, \quad HE \parallel CI \text{ 即 } HE \parallel CB,$$

$$\therefore \angle AHE = \angle ACB, \quad \angle AEH = \angle B,$$

$$\therefore \triangle AEH \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{HE}{CB} \text{ 即 } \frac{AE}{5m} = \frac{\frac{4}{5}m}{4m},$$

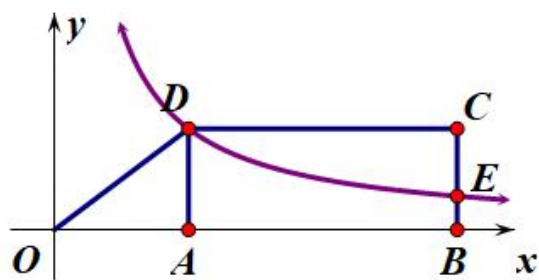
$$\text{解得 } AE = \frac{\frac{4}{5}m}{4m} \times 5m = m,$$

$$\therefore BE = AB - AE = 5m - m = 4m,$$

$$\therefore AE : BE = m : 4m = 1 : 4.$$

故答案为 1:4.

比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 在第一象限内的图像经过点 D ，交 BC 于点 E . $CE = 2BE$, $\tan \angle AOD = \frac{3}{4}$.



- (1) 求反比例函数的解析式；
- (2) 联结 OC ，求 $\angle BOC$ 的正切值.

【答案】 (1) $y = \frac{12}{x}$; (2) $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 (1) 由 $\tan \angle AOD = \frac{3}{4}$ 及点 A 的坐标可求得 AD 的长，从而可得点 D 的坐标，则可求得反比例函数的解析式；

(2) 由矩形的性质及 $CE=2BE$ ，可得 BE 的值，再由点 E 在反比例函数的图象上可求得点 E 的坐标，进而可得 OB 的长，从而可求得结果.

【详解】 (1) $\because A(4, 0)$

$$\therefore OA=4$$

$$\because \tan \angle AOD = \frac{AD}{OA} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore AD=3$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为}(4, 3)$$

把点 D 的坐标代入 $y = \frac{k}{x}$ 中，得 $3 = \frac{k}{4}$

$$\therefore k=12$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{12}{x}$$

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形

$$\therefore BC=AD=3$$

$$\because CE=2BE$$

$$\therefore BE = \frac{1}{3}BC = 1$$

即点 E 的纵坐标为 1

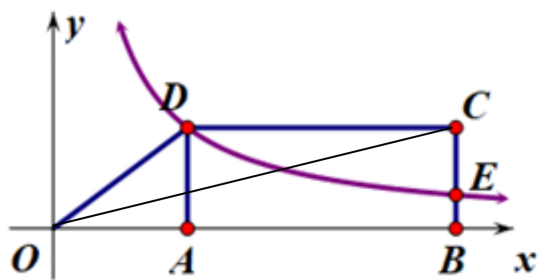
∵ 点 E 在反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象上

$$\therefore \frac{12}{x} = 1$$

$$\therefore x = 12$$

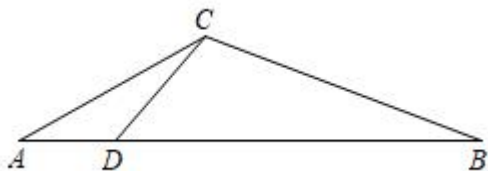
即 $OB = 12$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle OBC \text{ 中, } \tan \angle BOC = \frac{BC}{OB} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$



【点睛】 本题考查了反比例函数的图象，求反比例函数的解析式，锐角三角函数，矩形的性质等知识，熟练运用是关键.

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 5$ ， $\cot A = 2$ ， $\cot B = 3$ ， D 是 AB 边上的一点， $\angle BDC = 45^\circ$.



(1) 求线段 BD 的长；

(2) 如果设 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{AB} = \Delta$ ， $\overrightarrow{AD} = \Delta$ ， $\overrightarrow{CD} = \Delta$. (含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示).

【答案】 (1) $BD = 4\sqrt{5}$ ； (2) $\vec{b} - \vec{a}$ ， $\frac{1}{5}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{a}$ ， $\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$.

【解析】

【分析】 (1) 过点 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ，根据 $\angle BDC = 45^\circ$ ，可得 $DE = CE$ ，设 $CE = x$ ， $\cot A = \frac{AE}{CE} = 2$ ，可得 $AE = 2CE = 2x$ ，根据勾股定理 $AC^2 = CE^2 + AE^2$ 即 $5^2 = x^2 + (2x)^2$ ，得出 $x = \sqrt{5}$ ，在 $Rt\triangle CEB$ 中， $\cot B = \frac{EB}{CE} = 3$ ，可得 $BE = 3CE = 3\sqrt{5}$ ；

(2) 根据向量三角形法则可得 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ ，根据相反向量可得 $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ ，可求

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \vec{b} - \vec{a}$, 根据 $AD = AE - DE = 2DE - DE = DE$, $BD = 4DE$, 得出 $AD = \frac{1}{5}AB$, 可得

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{5}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{a}, \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{a} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}.$$

【详解】解: (1) 过点 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ,

$$\therefore \angle BDC = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle DCE = 90^\circ - \angle CDE = 45^\circ = \angle CDE,$$

$$\therefore DE = CE,$$

$$\therefore AC = 5, \quad \cot A = 2,$$

$$\text{设 } CE = x, \quad \cot A = \frac{AE}{CE} = 2,$$

$$\therefore AE = 2CE = 2x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACE \text{ 中, 根据勾股定理 } AC^2 = CE^2 + AE^2 \text{ 即 } 5^2 = x^2 + (2x)^2,$$

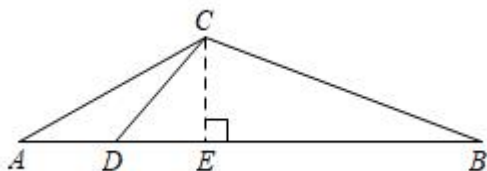
$$\text{解得 } x = \sqrt{5},$$

$$\therefore DE = CE = \sqrt{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CEB \text{ 中, } \cot B = \frac{EB}{CE} = 3,$$

$$\therefore BE = 3CE = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore BD = DE + BE = \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5};$$



$$(2) \quad \overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore AD = AE - DE = 2DE - DE = DE, \quad BD = 4DE,$$

$$\therefore AB = AD + BD = 5AD,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{5}AB,$$

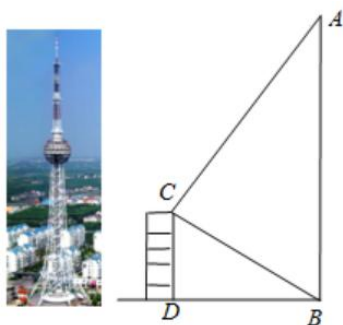
$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{5}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{a} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}.$$

故答案为: $\vec{b} - \vec{a}$, $\frac{1}{5}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{a}$, $\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$.

【点睛】本题考查等腰直角三角形判定与性质, 锐角三角函数, 勾股定理, 向量, 掌握等腰直角三角形判定与性质, 锐角三角函数, 勾股定理, 向量运算是解题关键.

22. 如图是位于奉贤南桥镇解放东路 866 号的“奉贤电视发射塔”, 它建于 1996 年, 在长达二十几年的时间里它一直是奉贤区最高建筑物, 该记录一直保持到 2017 年, 历了 25 年风雨的电视塔铭刻了一代奉贤人的记忆.



某数学活动小组在学习了“解直角三角形的应用”后, 开展了测量“奉贤电视发射塔的高度”的实践活动.

测量方案: 如图, 在电视塔附近的高楼楼顶 C 处测量塔顶 A 处的仰角和塔底 B 处的俯角.

数据收集: 这幢高楼共 12 层, 每层高约 2.8 米, 在二楼楼顶 C 处测得塔顶 A 处的仰角为 58° , 塔底 B 处的俯角为 22° .

问题解决: 求奉贤电视发射塔 AB 的高度 (结果精确到 1 米).

参考数据: $\sin 22^\circ \approx 0.37$, $\cos 22^\circ \approx 0.93$, $\tan 22^\circ \approx 0.40$, $\sin 58^\circ \approx 0.85$, $\cos 58^\circ \approx 0.53$, $\tan 58^\circ \approx 1.60$.

根据上述测量方案及数据, 请你完成求解过程.

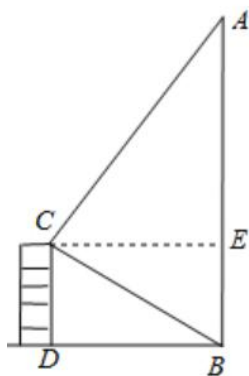
【答案】168 米

【解析】

【分析】作 $CE \perp AB$ 于 E , 则在 $Rt\triangle BCE$ 中由正切关系可求得 CE 的长, 再在 $Rt\triangle ACE$ 中, 由正切关系可求得 AE 的长, 从而可求得 AB 的长, 即电视发射塔的高.

【详解】由题意 $CD = 12 \times 2.8 = 33.6$ (米)

作 $CE \perp AB$ 于 E , 如图所示



则 $\angle CEA = \angle CEB = 90^\circ$

$\because CD \perp BD, AB \perp BD$

$\therefore \angle CDB = \angle DBE = \angle CEB = 90^\circ$

$\therefore$ 四边形 $CDBE$ 是矩形

$\therefore BE = CD = 33.6$ 米

$\because \angle ECB = 22^\circ, \angle ACE = 58^\circ$

在 $Rt\triangle BCE$ 中, $CE = \frac{BE}{\tan 22^\circ} = \frac{33.6}{0.40} = 84$ (米)

在 $Rt\triangle ACE$ 中, $AE = CE \cdot \tan 58^\circ = 84 \times 1.60 = 134.4$ (米)

$\therefore AB = AE + BE = 134.4 + 33.6 = 168$ (米)

即电视发射塔的高度为 168 米

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，矩形的判定与性质，关键是理解题中的仰角、俯角的含义，作辅助线把非直角三角形转化为直角三角形来解决.

23. 根据相似形的定义可以知道，如果一个四边形的四个角与另一个四边形的四个角对应相等，且它们各有的四边对应成比例，那么这两个四边形叫做相似四边形. 对应相等的角的顶点叫做这两个相似四边形的对应顶点，以对应顶点为端点的边是这两个相似四边形的对应边，对应边的比叫做这两个相似多边形的相似比. (我们研究的四边形都是指凸四边形)

(1) 某学习小组在探究相似四边形的判定时，得到如下两个命题，请判断它们是真命题还是假命题 (直接在横线上填写“真”或“假”)

①梯形的中位线将原梯形分成的两个小的梯形相似;

②有一个内角对应相等的两个菱形相似;

(2) 已知: 如图 1, $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的等腰直角三角形, 以 BC 为直角边作等腰直角三角形 BCD , 再以 BD 为直角边作等腰直角三角形 BDE .

求证: 四边形 $ABDC$ 与四边形 $CBED$ 相似.

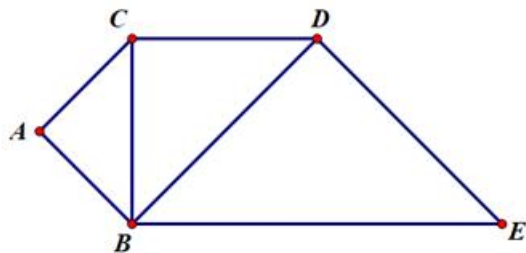


图 1

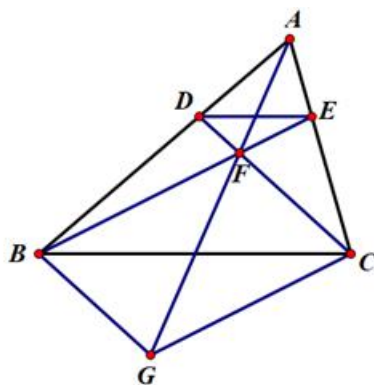


图 2

(3) 已知: 如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, BE 、 CD 相交于点 F , 点 G 在 AF 的延长线上, 联结 BG 、 CG . 如果四边形 $ADFE$ 与四边形 $ABGC$ 相似, 且点 A 、 D 、 F 、 E 分别对应 A 、 B 、 G 、 C .

求证: $AF \cdot BF = AG \cdot EF$.

【答案】(1) ①假; ②真 (2) 见解析 (3) 见解析

【解析】

【分析】(1) ①与②直接利用四边形相似的定义, 判别即可.

(2) 利用 $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle BDE$ 是等腰直角三角形, 求证两个四边形的对应角相等, 设出 $AB = AC = a$, 利用勾股定理求出两个四边形的边长, 然后即可得到四组对应边的比相等, 最后即可证明.

(3) 利用四边形的相似, 先得出对应边的比和对应角相等, 进而证明 $\triangle ADF \sim \triangle ABG$, 得到

$$\frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AB}, \text{ 利用相似条件, 求证 } \triangle ADE \sim \triangle ABC, \text{ 得到 } \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}, \text{ 再根据平行关系, } \triangle DEF \sim \triangle CBF,$$

进而得到 $\frac{EF}{BF} = \frac{DE}{BC}$, 最后即可证明结论.

【详解】(1) 解: ①梯形的中位线将原梯形分成的两个小的梯形, 两个小梯形的四个角相等, 并且其对应的腰相等, 但是两个小梯形的上底不相等, 故对应边不成比例, 因此是假命题

②有一个内角对应相等的两个菱形相似, 有一个内角的相等的两个菱形的四个角相等, 并且菱形四条边相等, 故对应的边之比相等, 因此是真命题

(2) 解: 由题意可知: $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle BDE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle A = \angle BCD = 90^\circ, \angle CDB = \angle E = \angle ABC = \angle CBD = \angle DBC = 45^\circ,$$

$$AB = AC, CB = CD, DB = DE,$$

$$\text{故有 } \angle ABD = \angle CBE = 90^\circ, \angle ACD = \angle CDE = 135^\circ,$$

$$\text{设 } AB = AC = a,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABC, \text{ 由勾股定理可知: } CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2}a,$$

在 $Rt\triangle BCD$ 中, 由勾股定理可知: $DB = \sqrt{CB^2 + CD^2} = 2a$,

在 $Rt\triangle BDE$ 中, 由勾股定理可知: $BE = \sqrt{DB^2 + DE^2} = 2\sqrt{2}a$,

$\therefore$ 在四边形 $ABDC$ 与四边形 $CBED$ 中, $\angle A = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle CDB = \angle E = 45^\circ$,

$$\angle ABD = \angle CBE = 90^\circ, \angle ACD = \angle CDE = 135^\circ, \text{ 且 } \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{DE} = \frac{DB}{BE} = \frac{AB}{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore$ 四边形 $ABDC$ 与四边形 $CBED$ 相似.

(3) 解: $\therefore$ 四边形 $ADFE$ 与四边形 $ABGC$ 相似,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \angle ADF = \angle ABG,$$

$\therefore$ 在 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ABG$ 中, $\angle ADF = \angle ABG$, $\angle DAF = \angle BAG$,

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ABG,$$

$$\therefore \frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AB},$$

$\therefore$ 在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 中, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, $\angle DAE = \angle BAC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}, \angle ADE = \angle ABC,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle CBF,$$

$\therefore$ 在 $\triangle DEF$ 与 $\triangle CBF$ 中, $\angle DEF = \angle CBF$, $\angle DFE = \angle CFB$,

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle CBF,$$

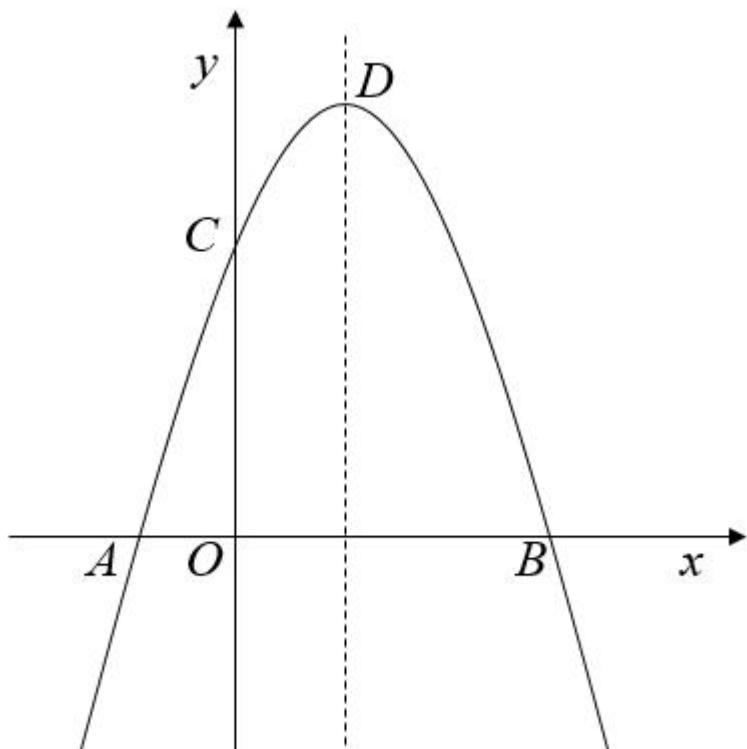
$$\therefore \frac{EF}{BF} = \frac{DE}{BC},$$

$$\therefore \frac{AF}{AG} = \frac{EF}{BF} = \frac{AD}{AB},$$

$$\therefore AF \cdot BF = AG \cdot EF.$$

【点睛】 本题主要是考查了四边形相似的判定和性质以及三角形相似的判定和性质, 熟练根据题意, 找出四边形相似的条件, 进而证明四边形相似, 综合利用三角形和四边形相似的性质, 得出对应边成比例, 这是解决该题的关键.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D .



- (1) 求该抛物线的表达式的顶点 D 的坐标；
- (2) 将抛物线沿 y 轴上下平移，平移后所得新抛物线顶点为 M ，点 C 的对应点为 E 。
- ①如果点 M 落在线段 BC 上，求 $\angle DBE$ 的度数；
- ②设直线 ME 与 x 轴正半轴交于点 P ，与线段 BC 交于点 Q ，当 $PE = 2PQ$ 时，求平移后新抛物线的表达式。

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$ ， $D(1, 4)$ ； (2) ① $\angle DBE = 45^\circ$ ； ② $y = -x^2 + 2x - \frac{3}{2}$ 。

【解析】

【分析】 (1) 把点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(3, 0)$ 代入抛物线的解析式。利用待定系数法求解抛物线的解析式即可；

(2) ①先求解 $C(0, 3)$ ，直线 BC 为： $y = -x + 3$ ，设平移后的抛物线为： $y = -(x-1)^2 + 4 + m$ ，由新抛物线的顶点 M 在 BC 上， $m = -2$ ，可得新的抛物线为： $y = -(x-1)^2 + 2$ ，同理可得： $M(1, 2)$ ， $E(0, 1)$ ，再利用勾股定理的逆定理证明 $\angle DEB = 90^\circ$ ， $\angle DBE = 45^\circ$ ，从而可得答案；②如图，连接 CD ， BD ，同理可得： $\angle DCB = 90^\circ$ ， $DC \perp BC$ ，由平移的性质可得： $CD \parallel ME$ ，则 $ME \perp BC$ ，可得 $PQ = BQ$ ， $OP = OE$ ，设平移后的抛物线为： $y = -(x-1)^2 + 4 + m$ ，同理： $E(0, 3+m)$ ，且 $3+m < 0$ ，再利用 $PE = 2PQ$ ，列方程解方程求解 $m = -\frac{9}{2}$ ，从而可得答案。

【详解】 解：(1) 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(3, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} a-b+3=0 \\ 9a+3b+3=0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases},$$

所以抛物线的解析式为: $y = -x^2 + 2x + 3$,

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

$\therefore$ 抛物线的顶点 $D(1, 4)$.

$$(2) \text{ ① } \therefore y = -x^2 + 2x + 3,$$

令 $x=0$, 则 $y=3$, $\therefore C(0, 3)$,

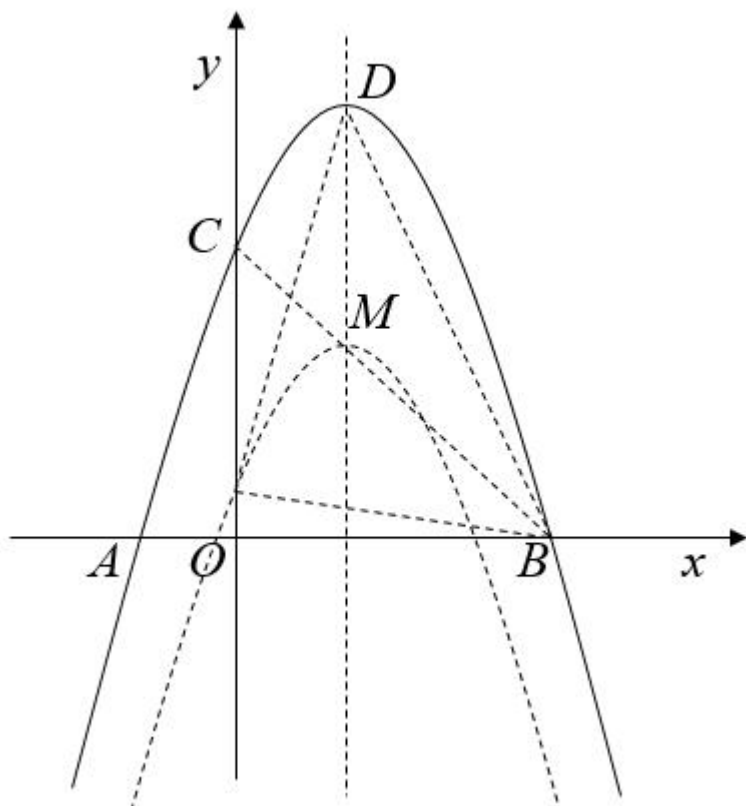
设直线 BC 为: $y=kx+n$,

$$\therefore \begin{cases} n=3 \\ 3k+n=0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=-1 \\ n=3 \end{cases},$$

所以直线 BC 为: $y=-x+3$,

设平移后的抛物线为: $y=-(x-1)^2 + 4 + m$,

$\therefore$ 抛物线的顶点为: $M(1, 4+m)$,



$\therefore M$ 在 BC 上, $\therefore 4+m=-1+3$,

$$\therefore m=-2,$$

所以新的抛物线为: $y = -(x-1)^2 + 2$,

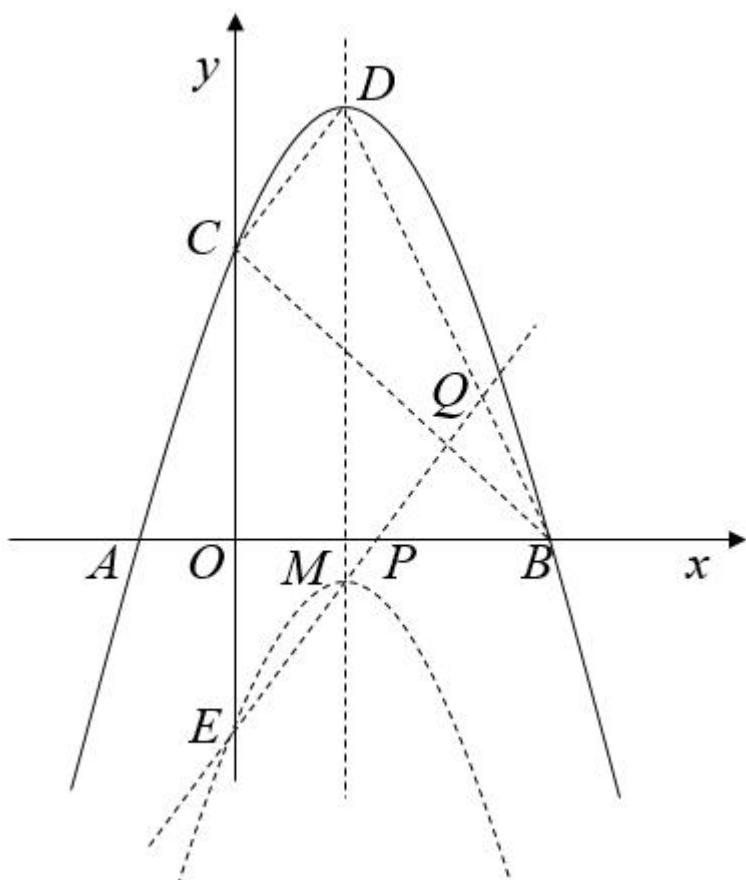
同理可得: $M(1,2), E(0,1)$,

$$\therefore BE^2 = 1^2 + 3^2 = 10, DE^2 = (1-0)^2 + (4-1)^2 = 10, BD^2 = (1-3)^2 + (4-0)^2 = 20,$$

$$\therefore BE^2 + DE^2 = BD^2, BE = DE,$$

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ, \angle DBE = 45^\circ.$$

②如图, 连接 CD, BD ,



$$\text{同理可得: } CD^2 = (1-0)^2 + (4-3)^2 = 2, BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18, BD^2 = 20,$$

$$\therefore CD^2 + BC^2 = BD^2,$$

$$\therefore \angle DCB = 90^\circ, DC \perp BC,$$

由平移的性质可得: $CD \parallel ME$, 则 $ME \perp BC$,

$$\because C(0,3), B(3,0),$$

$$\therefore \angle CBO = 45^\circ = \angle QPB = \angle OPE = \angle OEP,$$

$$\therefore PQ = BQ, OP = OE,$$

设平移后的抛物线为: $y = -(x-1)^2 + 4 + m$, 同理: $E(0, 3+m)$, 且 $3+m < 0$,

$$\therefore OE = OP = -3 - m, BP = 3 - (-3 - m) = 6 + m,$$

$$\therefore PE = \sqrt{2}(-3 - m), PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}(6 + m),$$

$$\because PE = 2PQ,$$

$$\therefore \sqrt{2}(-3 - m) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(6 + m),$$

$$\text{解得: } m = -\frac{9}{2},$$

$$\text{所以平移后的抛物线为: } y = -(x-1)^2 - \frac{1}{2} = -x^2 + 2x - \frac{3}{2}.$$

【点睛】 本题考查的是利用待定系数法求解二次函数的解析式与一次函数的解析式, 二次函数图象的平移, 平移的性质的应用, 勾股定理及勾股定理的逆定理的应用, 数形结合及证明 $CD \perp BC$ 是解 (2) ② 问的关键.

25. 如图 1, 已知锐角 $\triangle ABC$ 的高 AD 、 BE 相交于点 F , 延长 AD 至 G , 使 $DG = FD$, 连接 BG , CG .

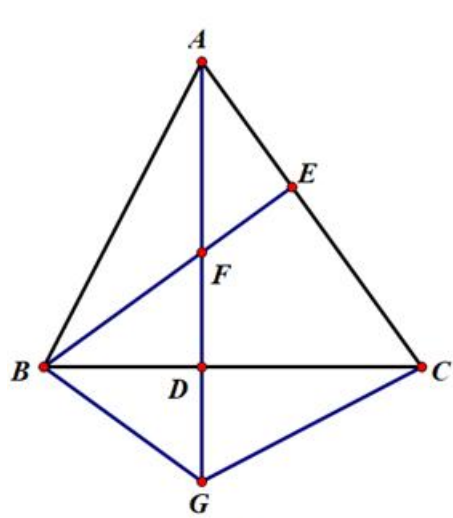


图 1

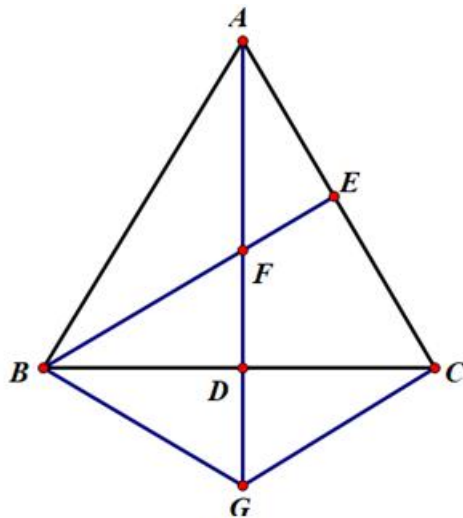


图 2

(1) 求证: $BD \cdot AC = AD \cdot BG$;

(2) 如果 $BC = 10$, 设 $\tan \angle ABC = m$.

①如图 2, 当 $\angle ABG = 90^\circ$ 时, 用含 m 的代数式表示 $\triangle BFG$ 的面积;

②当 $AB = 8$, 且四边形 $BGCE$ 是梯形时, 求 m 的值.

【答案】 (1) 见详解; (2) ① $S_{\triangle BFG} = \frac{25}{m}$; ② m 的值为 $\frac{16+5\sqrt{7}}{9}$ 或 $\frac{\sqrt{39}}{5}$

【解析】

【分析】 (1) 由题意易得 $\angle AEF = \angle ADB = 90^\circ$, 然后可得 $\angle DAC = \angle FBD = \angle DBG$, 则有

$\triangle ADC \sim \triangle BDG$ ，然后问题可求证；

(2) ①由 (1) 及题意易得 $\angle ABC = \angle BGD = \angle ACB$ ，则有 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，然后可得 $BD=CD=5$ ，进而根据三角函数可得 $DG = \frac{BD}{\tan \angle BGD} = \frac{5}{m}$ ，则 $FG = \frac{10}{m}$ ，最后根据三角形面积公式可求解；②由题意可分当 $BG \parallel CE$ 时和当 $CG \parallel BE$ 时，然后分类求解即可。

【详解】(1) 证明： $\because$ 锐角 $\triangle ABC$ 的高 AD 、 BE 相交于点 F ，

$$\therefore \angle AEF = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE + \angle DAC = \angle FBD + \angle BFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle BFD,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle FBD,$$

$$\therefore DG = FD,$$

$$\therefore BF = BG,$$

$$\therefore \triangle BFG \text{ 是等腰三角形},$$

$$\therefore \angle DBG = \angle FBD = \angle DAC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BDG,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BDG,$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BG}{AC}, \text{ 即 } BD \cdot AC = AD \cdot BG;$$

$$(2) \text{ ① } \because \triangle ADC \sim \triangle BDG,$$

$$\therefore \angle BGD = \angle ACD,$$

$$\therefore \angle ABG = \angle BDG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle DBG = \angle DBG + \angle BGD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BGD = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 是等腰三角形},$$

$$\therefore BC = 10, \tan \angle ABC = m,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 5, \tan \angle BGD = \tan \angle ABC = m,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BDG \text{ 中}, DG = \frac{BD}{\tan \angle BGD} = \frac{5}{m},$$

$$\therefore FG = \frac{10}{m},$$

$$\therefore S_{\triangle BFG} = \frac{1}{2}FG \cdot BD = \frac{25}{m};$$

$$\text{②由①可知 } \angle BGD = \angle ACD,$$

$$\therefore \text{四边形 } BGCE \text{ 是梯形, 且当 } BG \parallel CE \text{ 时},$$

$$\therefore \angle BGD = \angle ACD = \angle DBG,$$

$$\because \angle BDG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BGD = \angle ACD = \angle DBG = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle BDG$ 和 $\triangle ADC$ 都为等腰直角三角形,

设 $BD=x$, 则 $CD=AD=10-x$,

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, $BD^2 + AD^2 = AB^2$, 且 $AB=8$,

$$\text{即 } x^2 + (10-x)^2 = 8^2, \text{ 解得: } x = 5 \pm \sqrt{7},$$

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形,

$$\therefore BD = 5 - \sqrt{7}, AD = 5 + \sqrt{7},$$

$$\therefore \tan \angle ABC = \frac{AD}{BD} = \frac{5 + \sqrt{7}}{5 - \sqrt{7}} = \frac{16 + 5\sqrt{7}}{9} = m;$$

当 $CG \parallel BE$ 时,

$$\therefore \angle CGD = \angle BFG = \angle BGD = \angle ACD,$$

$$\because DG = DG, \angle BDG = \angle CDG = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BDG \cong \triangle CDG (ASA),$$

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC = 5,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle ABD \text{ 中, 由勾股定理得: } AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{39},$$

$$\therefore \tan \angle ABC = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{39}}{5} = m;$$

综上所述: m 的值为 $\frac{16 + 5\sqrt{7}}{9}$ 或 $\frac{\sqrt{39}}{5}$.

【点睛】 本题主要考查全等三角形的性质与判定、相似三角形的性质与判定及解直角三角形, 熟练掌握全等三角形的性质与判定、相似三角形的性质与判定及解直角三角形是解题的关键.