

2022 年上海市嘉定区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题

1. 下列函数中是二次函数的是 ()

- A. $y = x - 1$ B. $y = \frac{1}{x^2}$ C. $y = (x - 2)^2 - x^2$ D. $y = x(x - 1)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数的定义求解即可.

【详解】解: A、 $y = x - 1$ 是一次函数, 不是二次函数, 故 A 不符合题意;

B、 $y = \frac{1}{x^2}$ 函数关系式不是整式, 不是二次函数, 故 B 不符合题意;

C、 $y = (x - 2)^2 - x^2 = x^2 - 4x + 4 - x^2 = -4x + 4$, 是一次函数, 不是二次函数, 故 C 不符合题意;

D、 $y = x(x - 1) = x^2 - x$ 是二次函数, 故 D 符合题意;

故选: D.

【点睛】本题考查了二次函数, 利用二次函数的定义是解题关键. 二次函数定义: 一般地, 把形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a 、 b 、 c 是常数, 且 $a \neq 0$) 的函数叫做二次函数, 其中 a 称为二次项系数, b 为一次项系数, c 为常数项. x 为自变量, y 为因变量.

2. 已知抛物线 $y = (a - 1)x^2 + 2$ 的顶点是此抛物线的最低点, 那么 a 的取值范围是 ()

- A. $a \neq 0$ B. $a \neq 1$ C. $a > 1$ D. $a < 1$

【答案】C

【解析】

【分析】根据抛物线 $y = (a - 1)x^2 + 2$ 的顶点是此抛物线的最低点, 得出抛物线开口向上, 即 $a - 1 > 0$, 解出 a 即可.

【详解】解: $\because$ 抛物线 $y = (a - 1)x^2 + 2$ 的顶点是此抛物线的最低点,

$\therefore$ 抛物线开口向上,

$\therefore a - 1 > 0$,

解得: $a > 1$,

故选 C.

【点睛】本题考查二次函数的性质. 理解抛物线有最低点时, 抛物线开口向上是解答本题的关键.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 2$, 那么下列各式中正确的是 ()

A. $\tan A = \frac{1}{3}$ B. $\cot A = \frac{1}{3}$ C. $\sin A = \frac{1}{3}$ D. $\cos A = \frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用锐角三角函数的定义以及勾股定理分别求解，再进行判断即可.

【详解】解： $\because \angle C=90^\circ$, $BC=6$, $AC=2$,

$$\therefore AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10},$$

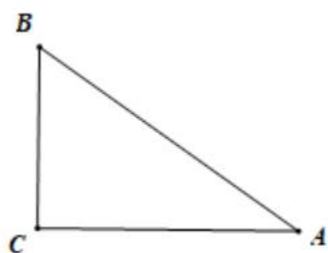
A. $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{2} = 3$, 正确;

B. $\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, 故不正确;

C. $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 故不正确;

D. $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, 故不正确;

故选 A.



【点睛】本题考查了锐角三角函数的概念，熟练掌握锐角三角函数的定义是解答本题的关键. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，若 $\angle C=90^\circ$ ，则 $\angle A$ 的正弦等于 $\angle A$ 的对边比斜边， $\angle A$ 的余弦等于 $\angle A$ 的邻边比斜边， $\angle A$ 的正切等于 $\angle A$ 的对边比邻边， $\angle A$ 的余切等于 $\angle A$ 的邻边比对边.

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 10$ ， $\cos B = \frac{2}{5}$ ，那么 BC 的长是 ()

A. 4 B. 8 C. $2\sqrt{21}$ D. $4\sqrt{21}$

【答案】B

【解析】

【分析】作底边上的高，根据锐角三角函数的概念和等腰三角形的三线合一的性质求解.

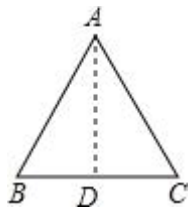
【详解】解：作 $AD \perp BC$ 于 D .

$$\because AB = AC = 10, \cos B = \frac{2}{5},$$

$$\therefore BD = AB \cdot \cos B = 10 \times \frac{2}{5} = 4,$$

$$\therefore BC = 2BD = 8.$$

故选：B



【点睛】考查了锐角三角函数的概念以及等腰三角形的三线合一性质，解题关键是作高构建直角三角形.

5. 已知一个单位向量 $\vec{e}$ ，设 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量，那么下列等式中一定正确的是（ ）

A. $|\vec{e}|a = a$ B. $|\vec{b}|e = b$ C. $\frac{1}{|\vec{b}}\vec{b} = \vec{e}$ D. $\frac{1}{|\vec{a}}a = \frac{1}{|\vec{b}}b$

【答案】A

【解析】

【分析】由 $\vec{e}$ 是一个单位向量，可得 $|\vec{e}|=1$ ，即可判断 A；根据题目并没有告诉 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的长度和方向，即可判断 B、C、D.

【详解】解： $\because \vec{e}$ 是一个单位向量，

$$\therefore |\vec{e}|=1,$$

A、 $\because |\vec{e}|=1$ ， $\therefore |\vec{e}|a = a$ ，故 A 选项符合题意；

B、题目并没有告诉 $\vec{b}$ 的长度和方向，无法推出 $|\vec{b}|e = b$ ，故 B 选项不符合题意；

C、题目并没有告诉 $\vec{b}$ 的长度和方向，无法推出 $\frac{1}{|\vec{b}}\vec{b} = \vec{e}$ ，故 C 选项不符合题意；

D、题目并没有告诉 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的长度和方向，无法推出 $\frac{1}{|\vec{a}}a = \frac{1}{|\vec{b}}b$ ，故 D 选项不符合题意；

故选 A.

【点睛】本题主要考查了平面向量，熟知平面向量的相关知识是解题的关键.

6. 如图，已知 $AB \parallel CD \parallel EF$ ， $AC:AE = 3:5$ ，那么下列结论正确的是（ ）



A. $BD:DF=2:3$

B. $AB:CD=2:3$

C. $CD:EF=3:5$

D. $DF:BF=2:5$

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行线分线段成比例定理判断即可.

【详解】解: $\because AC:AE=3:5$,

$$\therefore AC:EC=3:2, CE:EA=2:5$$

$$\because AB \parallel CD \parallel EF,$$

$$\therefore BD:DF=AC:EC=3:2, \text{ 故 } A \text{ 错误;}$$

$$DF:BF=CE:EA=2:5, \text{ 故 } D \text{ 正确;}$$

根据平行线分线段成比例定理无法判定 B, C ,

故选: D.

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理, 正确理解平行线分线段成比例定理是解本题的关键.

二、填空题

7. 抛物线 $y=ax^2+2$ 经过点 $(-2,6)$, 那么 $a=$ _____.

【答案】1

【解析】

【分析】把点的坐标代入解析式, 得 $6=4a+2$, 解方程即可.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y=ax^2+2$ 经过点 $(-2,6)$,

$$\therefore 6=4a+2,$$

解得 $a=1$,

故答案为: 1.

【点睛】本题考查了抛物线与点的关系, 熟记图像过点, 点的坐标满足函数的解析式是解题的关键.

8. 抛物线 $y=-x^2-2x+1$ 的对称轴是_____.

【答案】直线 $x=-1$

【解析】

【分析】根据顶点坐标公式计算即可得到答案.

【详解】解: 抛物线的对称轴是直线 $x=-\frac{-2}{2 \times (-1)}=-1$,

故答案为: 直线 $x=-1$.

【点睛】此题考查了求抛物线的顶点坐标, 熟记抛物线顶点坐标公式是解题的关键.

9. 抛物线 $y=(m+3)x^2+x-1$ 在对称轴右侧的部分是上升的, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m>-3$

【解析】

【分析】由于二次函数的图象在对称轴右侧部分是上升的，由此可以确定二次函数的二次项系数为正数.

【详解】解：∵二次函数 $y = (m+3)x^2 + x - 1$ 的图象在它的对称轴右侧部分是上升的，

∴这个二次函数图象开口向上，

$$\therefore m+3 > 0,$$

$$\therefore m > -3,$$

故答案为 $m > -3$.

【点睛】本题考察了二次函数的图象和性质，对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$)，当 $a > 0$ 时，开口向上，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而减小，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而增大；当 $a < 0$ 时，开口向下，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而增大，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而减小.

10. 将抛物线 $y = x^2 - 2x$ 向左平移 2 个单位，得到一条新抛物线，这条新抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = x^2 + 2x$

【解析】

【分析】根据抛物线平移的规律解答.

【详解】解：∵ $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ ，

∴将抛物线 $y = x^2 - 2x$ 向左平移 2 个单位，得到一条新抛物线，这条新抛物线的表达式是

$$y = (x-1+2)^2 - 1 = x^2 + 2x,$$

故答案为： $y = x^2 + 2x$.

【点睛】此题考查了抛物线的平移规律：左加右减，上加下减，抛物线平移的关键是抓住顶点的位置变化，还要理解坐标系的平移和抛物线的平移是反方向的.

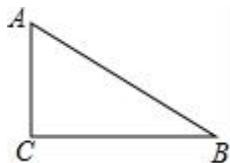
11. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\cos B = \frac{1}{4}$ ， $BC = 4$ ，那么 $AB =$ _____.

【答案】 16

【解析】

【分析】由 $\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{4}$ ，代入计算可得.

【详解】解：如图：



∴在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{4}$ ，且 $BC = 4$ ，

$$\therefore \frac{4}{AB} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore AB = 16,$$

故答案为：16.

【点睛】本题主要考查解直角三角形，解题的关键是熟练掌握三角函数的定义. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，若 $\angle C = 90^\circ$ ，则 $\angle A$ 的正弦等于 $\angle A$ 的对边比斜边， $\angle A$ 的余弦等于 $\angle A$ 的邻边比斜边， $\angle A$ 的正切等于 $\angle A$ 的对边比邻边.

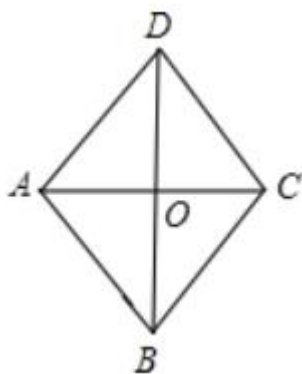
12. 在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 之比是 $3:4$ ，那么 $\sin \angle BAC =$ _____.

【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】首先根据菱形的性质得到 $OA = \frac{1}{2}AC$, $OB = \frac{1}{2}BD$ ，然后由对角线 AC 与 BD 之比是 $3:4$ ，可求得 $\frac{OA}{OB} = \frac{3}{4}$ ，然后根据正弦值的概念求解即可.

【详解】解：如图所示，



$\therefore$ 在菱形 $ABCD$ 中，

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC, OB = \frac{1}{2}BD$$

$\therefore$ 对角线 AC 与 BD 之比是 $3:4$ ，即 $\frac{AC}{BD} = \frac{3}{4}$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}BD} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ 设 $OA = 3x$ ， $OB = 4x$

$\therefore$ 菱形的对角线互相垂直，即 $AC \perp BD$

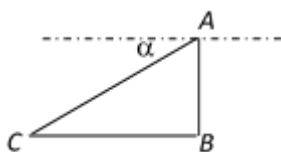
$\therefore$ 在 $Rt\triangle AOB$ 中， $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 5x$

$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{OB}{AB} = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$$

故答案为: $\frac{4}{5}$.

【点睛】此题考查了菱形的性质，勾股定理和三角函数等知识，解题的关键是熟练掌握菱形的性质，勾股定理和三角函数的概念.

13. 如图，飞机在目标 B 的正上方 A 处，飞行员测得地面目标 C 的俯角 $\alpha = 30^\circ$ ，如果地面目标 B 、 C 之间的距离为 6 千米，那么飞机离地面的高度 AB 等于_____千米. (结果保留根号)



【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据题意，得 $\angle ACB = 30^\circ$ ，利用正切函数的定义，变形计算即可.

【详解】 $\because$ 地面目标 C 的俯角 $\alpha = 30^\circ$,

$$\therefore \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{AB}{BC},$$

$$\therefore AB = BC \tan 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3},$$

故答案为: $2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了俯角视线与水平线所成的角，特殊角的三角函数值，熟练掌握俯角的意义，熟记特殊角的函数值是解题的关键.

14. 已知 $x:y = 2:3$ ，那么 $(x+y):y =$ _____.

【答案】 $5:3$

【解析】

【分析】根据比例的性质，设 $x = 2a$ ，则 $y = 3a$ ，再代入计算即可.

【详解】解: $\because x:y = 2:3$,

$$\therefore \text{可设 } x = 2a, \text{ 则 } y = 3a,$$

$$\therefore (x+y):y = (2a+3a):3a = 5:3.$$

故答案为: $5:3$.

【点睛】本题主要考查了比例的性质，根据比例式用同一个未知数表示出 x, y 的值进而求解是解题关键.

15. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{x}$ 满足 $2(\vec{a}-\vec{x})=3(\vec{b}-\vec{x})$ ，试用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\vec{x}$ ，那么 $\vec{x}=\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3\vec{b}-2\vec{a}$

【解析】

【分析】 根据向量数量积可得 $2\vec{a}-2\vec{x}=3\vec{b}-3\vec{x}$ ，根据向量加减法的互逆性质的 $3\vec{x}-2\vec{x}=3\vec{b}-2\vec{a}$ 即可.

【详解】 解： $\because 2(\vec{a}-\vec{x})=3(\vec{b}-\vec{x})$,

$$\therefore 2\vec{a}-2\vec{x}=3\vec{b}-3\vec{x},$$

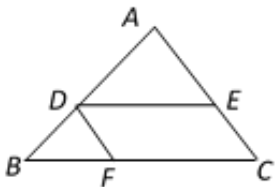
$$\therefore 3\vec{x}-2\vec{x}=3\vec{b}-2\vec{a},$$

$$\therefore \vec{x}=3\vec{b}-2\vec{a}.$$

故答案为： $3\vec{b}-2\vec{a}$.

【点睛】 本题考查向量的数量积，与向量加减法则，掌握向量的数量积，与向量加减法则是解题关键.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $DF \parallel AC$ ， $AD=3$ ， $BD=2$ ，那么 $BF:DE$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 根据平行线性质的得出 $\angle ADE=\angle B$ ， $\angle BDF=\angle BAC$ ，证出 $\triangle DBF \sim \triangle ADE$ ，得出 $\frac{BF}{DE}=\frac{2}{3}$ 即可.

【详解】 解： $\because DE \parallel BC$ ， $DF \parallel AC$ ，

$$\therefore \angle ADE=\angle B, \quad \angle BDF=\angle BAC,$$

$$\therefore \triangle DBF \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{BD}{DA}=\frac{BF}{DE}=\frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{BF}{DE}=\frac{2}{3}.$$

故答案为： $\frac{2}{3}$.

【点睛】 本题考查平行线性质的，三角形相似判定与性质，掌握平行线性质的，三角形相似判定与性质是解题关键.

17. 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， 对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， 如果 $\triangle AOD$ 、 $\triangle BOC$ 的面积分别是 1cm^2 、 4cm^2 ， 那么梯形 $ABCD$ 的面积等于 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}^2$.

【答案】9

【解析】

【分析】由于 $AD \parallel BC$ ，可得 $\triangle OAD \sim \triangle OCB$ ，再根据相似三角形的面积之比等于相似比的平方即可求出 BO 与 OD 的关系， AO 与 OC 的关系，从而求出 $\triangle ABO$ 和 $\triangle CDO$ 的面积，进而求出梯形的面积。

【详解】解： $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \triangle OAD \sim \triangle OCB,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COB}} = \left(\frac{OA}{OC}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore AO: CO = DO: BO = 1: 2,$$

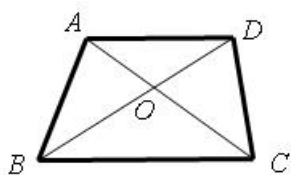
$$\therefore \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle ADO}} = \frac{BO}{DO} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABO} = 2\text{cm}^2,$$

同理求出 $S_{\triangle CDO} = 2\text{cm}^2$

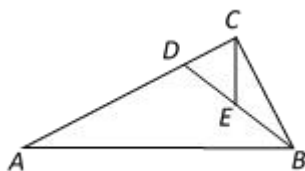
$$S_{\text{梯形}ABCD} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle AOD} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle CDO} = 9\text{cm}^2,$$

故答案为：9.



【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质、梯形的性质，以及三角形面积的求解，难度适中，解题的关键是注意数形结合思想的应用。

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 2$ ， $AB = 2\sqrt{5}$ ，点 D 在边 AC 上， $CD:AD = 1:3$ ，联结 BD ，点 E 在线段 BD 上，如果 $\angle BCE = \angle A$ ，那么 $CE =$ _____.



【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】根据勾股定理求出 $AC=4$ ， $DB=\sqrt{5}$ ，通过 $Rt\triangle ABC \sim Rt\triangle BDC$ 证得 $\angle ABC = \angle BDC$ ，再证 $\angle DBC = \angle ECB$ ，最后证 E 是 DB 的中点问题可解。

【详解】解：∵ $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 2$ ， $AB = 2\sqrt{5}$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4,$$

$$\because CD:AD = 1:3,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{4}AC = \frac{1}{4} \times 4 = 1,$$

$$\therefore DB = \sqrt{DC^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{DC}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC},$$

$$\therefore Rt\triangle ABC \sim Rt\triangle BDC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle CDB,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle DBC = \angle A + \angle ABD,$$

$$\therefore \angle A = \angle DBC,$$

$$\because \angle A = \angle BCE,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle BCE,$$

$$\therefore CE = BE,$$

$$\because \angle BCE + \angle DCE = \angle CDB + \angle CBD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle CDB = \angle DCE,$$

$$\therefore DE = CE,$$

$$\therefore DE = BE = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore CE = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

故答案为： $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【点睛】本题考查了勾股定理，相似三角形的判定和性质，利用三角形外角的性质证得 $\angle EBC = \angle BCE$ 是解本题关键.

三、解答题

19. 计算： $\tan 60^\circ \cdot \cot 30^\circ + \frac{\tan 45^\circ}{\cot 45^\circ + 2 \sin 45^\circ} + 2|\cos 60^\circ - 1|$.

【答案】 $3 + \sqrt{2}$

【解析】

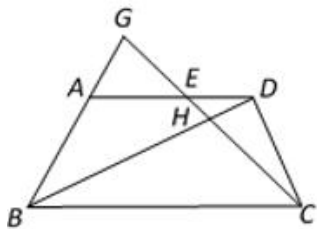
【分析】根据绝对值的性质和特殊角的三角函数值化简求解即可.

【详解】解: $\tan 60^\circ \cdot \cot 30^\circ + \frac{\tan 45^\circ}{\cot 45^\circ + 2 \sin 45^\circ} + 2|\cos 60^\circ - 1|$

$$= \sqrt{3} \times \sqrt{3} + \frac{1}{1 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} + 2\left|\frac{1}{2} - 1\right|$$
$$= 3 + \sqrt{2} - 1 + 1$$
$$= 3 + \sqrt{2}$$

【点睛】此题考查了绝对值的性质和特殊角的三角函数值, 解题的关键是熟练掌握绝对值的性质和特殊角的三角函数值.

20. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 在线段 AD 上, CE 与 BD 相交于点 H , CE 与 BA 的延长线相交于点 G , 已知 $DE:AE = 2:3$, $BC = 4DE$, $CE = 10$. 求 EH 、 GE 的长.



【答案】 $EH = 2$, $GE = 6$

【解析】

【分析】由平行线分线段成比例定理可得 $\frac{DE}{BC} = \frac{EH}{HC}$, 进而可求出 EH 的长, 由 $\triangle AGE \sim \triangle BGC$, 可得

$\frac{AE}{BC} = \frac{GE}{GC}$, 整理可求出 GE 的长.

【详解】解: $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{EH}{HC}.$$

$$\because BC = 4DE,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{1}{4}.$$

$$\because CE = 10,$$

$$\therefore HC = 10 - EH$$

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{EH}{10 - EH},$$

$$\therefore EH = 2.$$

$$\because BC = 4DE, DE:AE = 2:3,$$

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{3}{8}.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AGE \sim \triangle BGC,$$

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{GE}{GC}.$$

$$\because CE = 10,$$

$$\therefore GC = 10 + GE,$$

$$\therefore \frac{3}{8} = \frac{GE}{10 + GE},$$

$$\therefore GE = 6.$$

【点睛】此题考查了平行线分线段成比例定理，以及相似三角形的判定与性质，难度适中，解题的关键是注意数形结合思想的应用.

21. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像经过点 $A(3, -2)$ 、 $B(2, -3)$ 、 $C(0, 1)$.

(1) 求这个二次函数的解析式;

(2) 用配方法求出这个二次函数图像的顶点坐标.

【答案】(1) $y = x^2 - 4x + 1$

(2) $(2, -3)$

【解析】

【分析】(1) 将点 $A(3, -2)$ 、 $B(2, -3)$ 、 $C(0, 1)$ 代入二次函数的解析式 $y = ax^2 + bx + c$ ，利用待定系数法求得这个二次函数的解析式;

(2) 利用 (1) 的结果，将二次函数的解析式转化为顶点式，然后根据解析式求这个二次函数的顶点坐标.

【小问 1 详解】

$$\text{解: 由题意, 得 } \begin{cases} 9a + 3b + c = -2, \\ 4a + 2b + c = -3, \\ c = 1 \end{cases}$$

解这个方程组, 得 $a = 1$, $b = -4$

所以, 这个二次函数的解析式是 $y = x^2 - 4x + 1$.

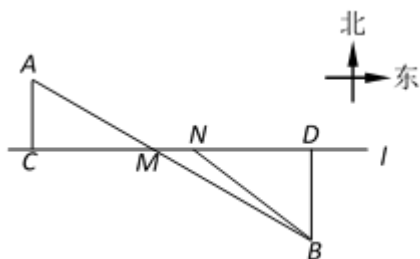
【小问 2 详解】

$$\text{解: } y = x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 1 = (x - 2)^2 - 3$$

所以, 这个二次函数图像的顶点坐标为 $(2, -3)$

【点睛】本题考查了待定系数法求二次函数的解析式、二次函数的三种形式. 将二次函数的一般解析式转化为顶点式时, 采用了“配方法”.

22. 如图, 在航线 l 的两侧分别有两个灯塔 A 和 B, 灯塔 A 到航线 l 的距离为 $AC = 3$ 千米, 灯塔 B 到航线 l 的距离为 $BD = 4$ 千米, 灯塔 B 位于灯塔 A 南偏东 60° 方向. 现有一艘轮船从位于灯塔 B 北偏西 53° 方向的 N (在航线 l 上) 处, 正沿该航线自东向西航行, 10 分钟后该轮船行至灯塔 A 正南方向的点 C (在航线 l 上) 处.



(1) 求两个灯塔 A 和 B 之间的距离;

(2) 求该轮船航行的速度 (结果精确到 0.1 千米/小时). (参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.73$, $\sin 53^\circ \approx 0.80$, $\cos 53^\circ \approx 0.60$, $\tan 53^\circ \approx 1.33$)

【答案】 (1) 两个灯塔 A 和 B 之间的距离为 14 千米

(2) 该轮船航行的速度是 40.7 千米/小时

【解析】

【分析】 (1) 由题意, 得 $\angle ACM = \angle BDM = 90^\circ$, $AC = 3\text{km}$, $BD = 4\text{km}$, $\angle CAM = \angle DBM = 60^\circ$, 然后解直角三角形分别求出 $AM = 6\text{km}$, $BM = 8\text{km}$ 即可得到答案;

(2) 解直角三角形求出 $MC = 3\sqrt{3}\text{km}$, $DM = 4\sqrt{3}\text{km}$, 则 $CD = MC + DM = 7\sqrt{3}\text{km}$, 然后求出 $CN = CD - DN = 7\sqrt{3} - 4 \tan 53^\circ$, 设该轮船航行的速度是 V 千米/小时则 $V = (7\sqrt{3} - 4 \tan 53^\circ) \div \frac{10}{60}$, 由此求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意, 得 $\angle ACM = \angle BDM = 90^\circ$, $AC = 3\text{km}$, $BD = 4\text{km}$,

$\angle CAM = \angle DBM = 60^\circ$,

在 $Rt\triangle ACM$ 中, $\cos \angle CAM = \frac{AC}{AM}$,

$$\therefore \cos 60^\circ = \frac{3}{AM},$$

$$\therefore AM = 6\text{km},$$

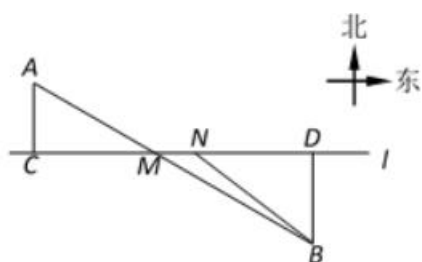
在 $Rt\triangle BDM$ 中, $\cos \angle DBM = \frac{BD}{BM}$,

$$\therefore \cos 60^\circ = \frac{4}{BM},$$

$$\therefore BM = 8\text{km},$$

$$\therefore AB = AM + BM = 14\text{km}$$

答：两个灯塔 A 和 B 之间的距离为 14 千米；



【小问 2 详解】

解：在 $Rt\triangle ACM$ 中， $\tan \angle CAM = \frac{MC}{AC}$ ，

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{MC}{3}$$

$$\therefore MC = 3\sqrt{3}\text{km}$$

在 $Rt\triangle BDM$ 中， $\tan \angle DBM = \frac{DM}{DB}$ ，

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{DM}{4}$$

$$\therefore DM = 4\sqrt{3}\text{km}$$

$$\therefore CD = MC + DM = 7\sqrt{3}\text{km}$$

在 $Rt\triangle BDN$ 中， $\tan \angle DBN = \frac{DN}{DB}$ ，

由题意，得 $\angle DBN = 53^\circ$ ，

$$\therefore \tan 53^\circ = \frac{DN}{4}$$

$$\therefore DN = 4 \tan 53^\circ$$

$$\therefore CN = CD - DN = 7\sqrt{3} - 4 \tan 53^\circ$$

设该轮船航行的速度是 V 千米/小时

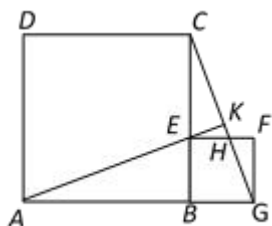
$$\text{由题意，得 } V = (7\sqrt{3} - 4 \tan 53^\circ) \div \frac{10}{60}$$

$$\therefore V \approx 40.7 \text{ (千米/小时)}$$

答：该轮船航行的速度是 40.7 千米/小时.

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形，勾股定理与航海问题，解题的关键在于能够熟练掌握相关知识.

23. 如图，已知正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ ，点 E 在边 BC 上，点 G 在边 AB 的延长线上，连接 AE ，并延长 AE 交 CG 于点 K 。



(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle CKE$;

(2) 如果 CG 与 EF 交于点 H , 求证: $BE^2 = FH \cdot AB$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 首先根据正方形的性质得到 $AB = CB$, $BE = BG$, $\angle ABE = \angle CBG = 90^\circ$, 然后证明 $\triangle ABE \cong \triangle CBG$ (SAS), 进而根据全等三角形的性质得到 $\angle BAE = \angle ECK$, 结合 $\angle AEB = \angle CEK$, 即可证明 $\triangle ABE \sim \triangle CKE$;

(2) 首先根据 $\angle CEF = \angle F = \angle ABE = 90^\circ$ 得到 $FG \parallel BC$, 然后根据平行线的性质得 $\angle ECK = \angle FGH$ 到, 然后通过等量代换得到 $\angle BAE = \angle ECK$, 结合 $\angle BAE = \angle FGH$ 即可证明出 $\triangle ABE \sim \triangle GFH$, 然后根据相似三角形对应边成比例即可证明出 $BE^2 = FH \cdot AB$.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$$\therefore AB = CB, \angle ABC = 90^\circ$$

$\because$ 四边形 $BEFG$ 是正方形

$$\therefore FG = BG = BE, \angle CBG = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CBG = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBG \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ECK$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CEK$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CKE;$$

【小问 2 详解】

解: 由题意, 得 $\angle CEF = \angle F = \angle ABE = 90^\circ$

$$\therefore FG \parallel BC$$

$$\therefore \angle ECK = \angle FGH$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ECK$$

$$\therefore \angle BAE = \angle FGH$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle GFH$$

$$\therefore \frac{AB}{FG} = \frac{BE}{FH}$$

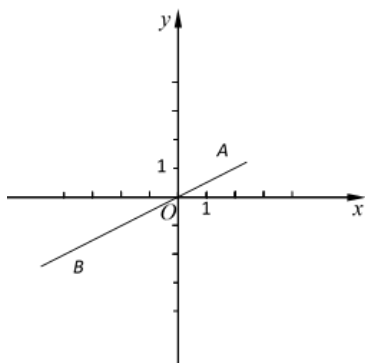
$$\therefore FG = BE$$

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{BE}{FH}$$

$$\therefore BE^2 = FH \cdot AB$$

【点睛】此题考查了正方形的性质，相似三角形的性质和判定，全等三角形的性质和判定等知识，解题的关键是熟练掌握正方形的性质，相似三角形的性质和判定方法，全等三角形的性质和判定方法. 全等三角形的性质：全等三角形对应边相等，对应角相等. 判定三角形全等的方法有：SSS, SAS, AAS, ASA, HL(直角三角形). 相似三角形性质：相似三角形对应边成比例，对应角相等. 相似三角形的相似比等于周长比，相似三角形的相似比等于对应高，对应角平分线，对应中线的比，相似三角形的面积比等于相似比的平方. 相似三角形的判定方法：①两组角对应相等的两个三角形相似；②两组边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似；③三组边对应成比例的两个三角形相似.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 、 B 两点在直线 $y = \frac{1}{2}x$ 上，如图. 二次函数 $y = ax^2 + bx - 2$ 的图像也经过点 A 、 B 两点，并与 y 轴相交于点 C ，如果 $BC \parallel x$ 轴，点 A 的横坐标是 2.



(1) 求这个二次函数的解析式；

(2) 设这个二次函数图像的对称轴与 BC 交于点 D ，点 E 在 x 轴的负半轴上，如果以点 E 、 O 、 B 所组成的三角形与 $\triangle OBD$ 相似，且相似比不为 1，求点 E 的坐标；

(3) 设这个二次函数图像的顶点是 M ，求 $\tan \angle AMC$ 的值.

【答案】(1) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

(2) $(-10, 0)$

(3) $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】(1) 先确定点 C 的坐标，根据 $BC \parallel x$ 轴，判定 B 、 C 两点的纵坐标相等，借助直线 $y = \frac{1}{2}x$ 可以

确定 A, B 的坐标, 用待定系数法确定解析式即可;

(2) 根据 $\angle OBD = \angle BOE$, 选择两边对应成比例且夹角相等, 分两种情形求解;

(3) 过点 C 作 $CH \perp AM$, 垂足为 H , 设直线 AM 与 x 轴、 y 轴的交点分别为点 P, Q , 根据两点间距离公式确定 MQ 的长, 确定直线 AM 的解析式, 计算 MH, CH 的长度, 根据正切的定义计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx - 2$ 的图像与 y 轴相交于点 C ,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, -2)$,

$\because BC \parallel x$ 轴,

$\therefore$ 点 B 的纵坐标是 -2 ,

$\because$ 点 A, B 两点在直线 $y = \frac{1}{2}x$ 上, 点 A 的横坐标是 2 ,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2, 1)$, 点 B 的坐标为 $(-4, -2)$,

$\because$ 二次函数的图像也经过点 $A(2, 1), B(-4, -2)$, 得

$$\begin{cases} 4a + 2b - 2 = 1 \\ 16a - 4b - 2 = -2 \end{cases},$$

解这个方程组, 得 $a = \frac{1}{4}, b = 1$,

$\therefore$ 二次函数的解析式是 $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$;

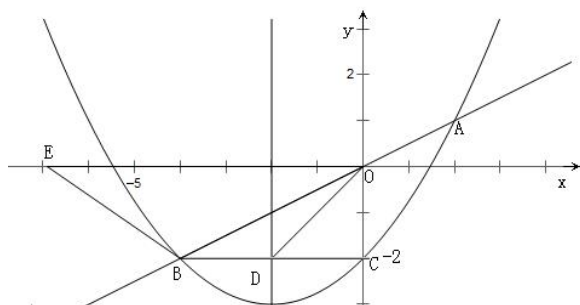
【小问 2 详解】

根据 (1) 得, 二次函数 $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ 图像的对称轴是直线 $x = -2$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-2, -2)$,

$\therefore OB = 2\sqrt{5}, BD = 2$,

$\because BC \parallel x$ 轴,



$\therefore \angle OBD = \angle BOE$,

$\therefore$ 以点 E, O, B 组成的三角形与 $\triangle OBD$ 相似有以下两种可能:

当 $\frac{BO}{OB} = \frac{BD}{OE}$ 时, $\triangle BOD \sim \triangle OBE$,

显然这两相似三角形的相似比为1,

与已知相似比不为1矛盾, 这种情况应舍去;

当 $\frac{BO}{OE} = \frac{BD}{OB}$ 时, $\triangle BOD \sim \triangle OEB$,

$$\therefore \frac{2\sqrt{5}}{OE} = \frac{2}{2\sqrt{5}},$$

$$\therefore OE = 10,$$

又点 E 在 x 轴的负半轴上,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(-10, 0)$.

【小问3详解】

过点 C 作 $CH \perp AM$, 垂足为 H

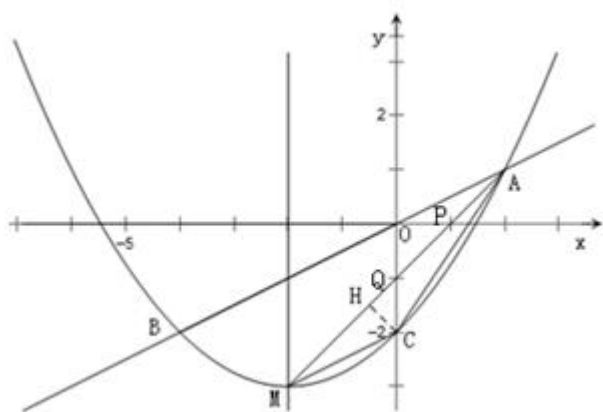
根据 (1) 得, 二次函数的解析式是 $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ 的顶点坐标为 $M(-2, -3)$,

设直线 AM 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} 2k + b = 1 \\ -2k + b = -3 \end{cases},$$

解得 $k = 1$, $b = -1$

$\therefore$ 直线 AM 的解析式为 $y = x - 1$



设直线 AM 与 x 轴、 y 轴的交点分别为点 P 、 Q ,

则点 P 的坐标为 $(1, 0)$, 点 Q 的坐标为 $(0, -1)$,

$\therefore \triangle OPQ$ 是等腰直角三角形, $\angle OQP = 45^\circ$, $OQ = OP = 1$,

$\therefore \angle OQP = \angle HQC$,

$\therefore \angle HQC = 45^\circ$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, -2)$,

$\therefore CQ = 1$,

$$\therefore HC = HQ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{又 } MQ = \sqrt{(-2-0)^2 + (-3-(-1))^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore MH = MQ - HQ = \frac{3}{2}\sqrt{2},$$

$$\therefore \tan \angle AMC = \frac{HC}{MH} = \frac{1}{3}.$$

【点睛】 本题考查了待定系数法确定二次函数的解析式，一次函数的解析式，三角形相似的判定与性质，正切值的计算，熟练掌握待定系数法，灵活选择相似的判定是解题的关键.

25. 在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与边 CD 垂直， $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ ，四边形 $ABCD$ 的周长是 16，点 E 是在 AD 延长线上的一点，点 F 是在射线 AB 上的一点， $\angle CED = \angle CDF$.

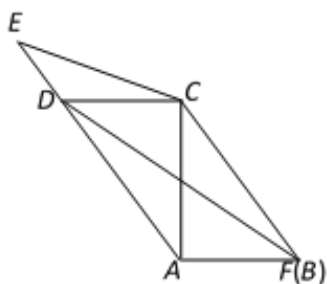


图 1

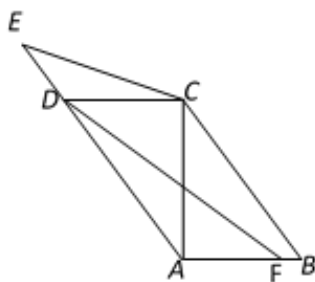
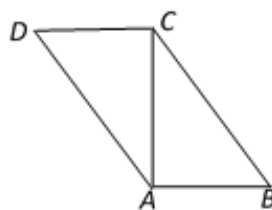


图 2



备用图

- (1) 如图 1，如果点 F 与点 B 重合，求 $\angle AFD$ 的余切值；
- (2) 如图 2，点 F 在边 AB 上的一点. 设 $AE = x$ ， $BF = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式并写出它的定义域；
- (3) 如果 $BF : FA = 1 : 2$ ，求 $\triangle CDE$ 的面积.

【答案】 (1) $\frac{3}{2}$

$$(2) y = -\frac{5}{3}x + \frac{34}{3}, \quad 5 < x \leq \frac{34}{5}$$

$$(3) \frac{36}{25} \text{ 或 } \frac{108}{25}$$

【解析】

【分析】 (1) 设 $AB = 3k$ ， $AC = 4k$ ，利用平行四边形的性质，构造直角三角形，用余切的定义计算即可；

(2) 利用平行四边形的性质, 得到 $\angle EDC = \angle DAF$, $\angle CED = \angle CDF = \angle DFA$, 从而证明 $\triangle CDE \sim \triangle DAF$, 用性质证明即可;

(3) 分点 F 在 AB 上和 AB 的延长线上, 两种情形计算即可.

【小问 1 详解】

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4},$$

$\therefore$ 设 $AB=3k$, $AC=4k$, AC 与 BD 的交点为 O ,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore OA=OC=\frac{1}{2}AC=2k, \quad CD \parallel AB,$$

$$\therefore AC \perp CD,$$

$$\therefore AC \perp AB,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 5k,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的周长为 16,

$$\therefore 5k+5k+3k+3k=16,$$

解得 $k=1$,

$$\therefore AB=3, \quad AC=4, \quad BC=5, \quad OA=2,$$

$$\therefore \cot \angle AFD = \frac{AB}{AO} = \frac{3}{2};$$

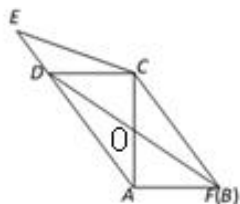


图 1

【小问 2 详解】

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle FAD, \quad \angle CDF = \angle AFD,$$

$$\therefore \angle CED = \angle CDF,$$

$$\therefore \angle CED = \angle AFD,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \frac{DE}{AF} = \frac{DC}{AD},$$

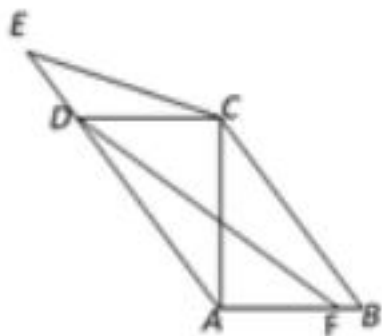


图 2

$$\because AE = x, \quad BF = y, \quad AD = BC = 5,$$

$$\therefore DE = x - 5, \quad DC = AB = 3, \quad AF = 3 - y,$$

$$\therefore \frac{x-5}{3-y} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore y = -\frac{5}{3}x + \frac{34}{3},$$

$$\text{定义域是: } 5 < x \leq \frac{34}{5}.$$

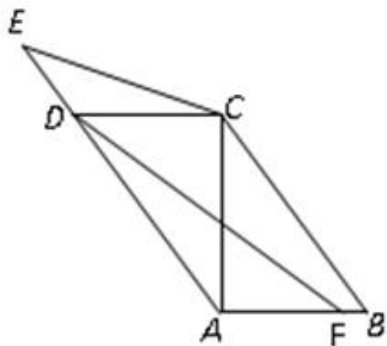
【小问 3 详解】

解：点 F 在射线 AB 上都能得到： $\triangle CDE \sim \triangle DAF$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle DAF}} = \left(\frac{DC}{AD}\right)^2,$$

①当点 F 在边 AB 上,

$$\because BF : FA = 1 : 2, \quad AB = 3 \therefore AF = 2,$$



$$\text{由题意, 得 } S_{\triangle DAF} = \frac{1}{2} AF \cdot AC,$$

$$\because AC = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle DAF} = \frac{1}{2} AF \cdot AC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDE}}{4} = \left(\frac{3}{5}\right)^2,$$

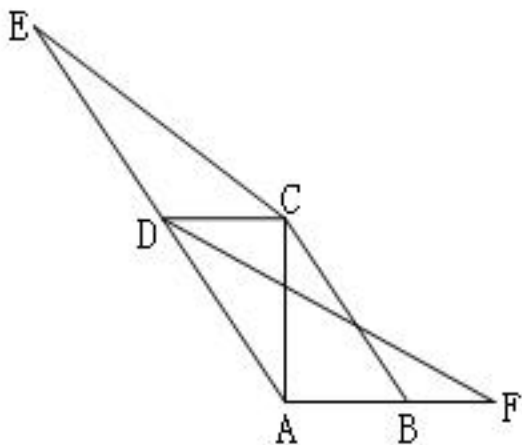
$$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{36}{25},$$

②当点 F 在 AB 的延长线上

$$\because BF : FA = 1 : 2, \quad AB = 3,$$

$$\therefore AF = 6,$$

$$\text{由题意, 得 } S_{\triangle DAF} = \frac{1}{2} AF \cdot AC,$$



$$\therefore S_{\triangle DAF} = \frac{1}{2} AF \cdot AC = 12,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDE}}{12} = \left(\frac{3}{5}\right)^2,$$

$$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{108}{25},$$

综上所述, $\triangle CDE$ 的面积是 $\frac{36}{25}$ 或 $\frac{108}{25}$.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质, 三角函数, 三角形相似的判定和性质, 勾股定理, 熟练掌握平行四边形的性质, 灵活运用三角形的相似是解题的关键.