

2021 年上海市黄浦区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）绝对值小于 3 的整数有（ ）

- A. 2 个 B. 3 个 C. 5 个 D. 6 个

【分析】求绝对值小于 3 的整数，即求绝对值等于 0，1，2 的整数，可以结合数轴，得出到原点的距离等于 0，1，2 的整数.

【解答】解：根据绝对值的定义，则绝对值小于 3 的整数是 0， ± 1 ， ± 2 .

符合要求的一共有 5 个，

故选：C.

【点评】本题考查的是绝对值的性质，解答此题的关键是掌握绝对值的意义.

2.（4 分）化简 $(a^2)^3$ 的结果为（ ）

- A. a^5 B. a^6 C. a^8 D. a^9

【分析】利用幂的乘方法则：底数不变，指数相乘. $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是正整数)，求出即可.

【解答】解： $(a^2)^3 = a^6$.

故选：B.

【点评】此题主要考查了幂的乘方运算，正确掌握运算法则是解题关键.

3.（4 分）下列图形中，是轴对称图形，但不是中心对称图形的是（ ）

- A. 圆 B. 正六边形 C. 菱形 D. 等边三角形

【分析】把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心. 如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴，据此判断即可.

【解答】解：A、圆既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项不合题意；

B、正六边形既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项不合题意；

C、菱形既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项不合题意；

D、等腰三角形是轴对称图形，但不是中心对称图形，故本选项符合题意；

故选：D.

【点评】本题主要考查了轴对称图形与中心对称图形，熟记定义是解答本题的关键.

4. (4分) 对数据：1、1、1、2、2、3、4，下列判断正确的是 ()

- A. 中位数和众数相等
- B. 中位数和平均数相等
- C. 众数和平均数相等
- D. 中位数、众数和平均数都不相等

【分析】根据众数、中位数及平均数的定义求解，从而得出答案.

【解答】解：这组数据的众数为1，中位数为2，平均数为 $\frac{1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 + 4}{7} = 2$,

所以这组数据的中位数和平均数相等，

故选：B.

【点评】本题主要考查众数和中位数、平均数，一组数据中出现次数最多的数据叫做众数，将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

5. (4分) “利用描点法画函数图象，进而探究函数的一些简单性质”是初中阶段研究函数的主要方式，请试着研究函数 $y = \frac{1}{x^2}$ ，其图象位于 ()

- A. 第一、二象限
- B. 第三、四象限
- C. 第一、三象限
- D. 第二、四象限

【分析】根据 x 的取值，判断 y 的范围，即可求解.

【解答】解：根据题意 $x \neq 0$,

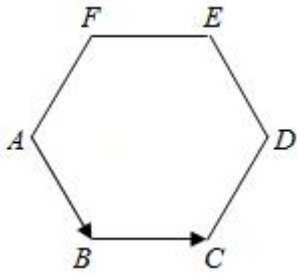
当 $x < 0$ 时， $y > 0$ ；此时点在二象限；

当 $x > 0$ 时， $y > 0$ ；此时点在一象限；

故选：A.

【点评】本题考查函数的特征和性质，研究函数图象一般的方法是描点法.

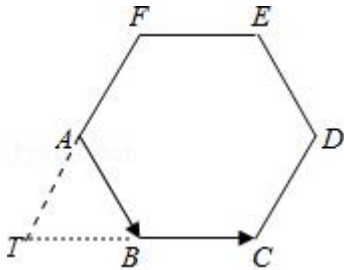
6. (4分) 如图，正六边形 $ABCDEF$ 中，记 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，则 $\vec{a} - \vec{b}$ 是 ()



- A. $\overrightarrow{CD}$ B. $\overrightarrow{DE}$ C. $\overrightarrow{EF}$ D. $\overrightarrow{FA}$

【分析】如图，延长 CB 交 FA 的延长线于 T ，可知 $\triangle ABT$ 是等边三角形，推出 $AT = AB = FA = \vec{a} - \vec{b}$ ，可得结论．

【解答】解：如图，延长 CB 交 FA 的延长线于 T ．



$$\text{则 } \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\because \angle FAB = \angle ABC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle TAB = \angle TBA = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle TAB$ 是等边三角形，

$$\therefore AT = AB = FA,$$

$$\therefore \overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}.$$

故选：D．

【点评】本题考查正多边形与圆，平面向量，等边三角形的判定和性质，三角形法则等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）计算： $\sqrt{1+2^3} = \underline{3}$ ．

【分析】根据算术平方根的意义求解即可．

【解答】解： $\sqrt{2^3+1} = \sqrt{9} = 3$ ．

故答案为：3．

【点评】本题考查算术平方根，理解算术平方根的意义是正确解答的关键.

8. (4分) 分解因式: $x^2 - 9 = \underline{(x+3)(x-3)}$.

【分析】本题中两个平方项的符号相反，直接运用平方差公式分解因式.

【解答】解: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$.

故答案为: $(x+3)(x-3)$.

【点评】主要考查平方差公式分解因式，熟记能用平方差公式分解因式的多项式的特征，即“两项、异号、平方形式”是避免错用平方差公式的有效方法.

9. (4分) 方程 $\sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 1$ 的解是 1.

【分析】先将方程两边平方，然后再解分式方程，注意要检验.

【解答】解: 方程两边平方得: $2 - \frac{1}{x} = 1$,

解这个分式方程得: $x = 1$.

检验: 当 $x = 1$ 时, $x \neq 0$, $2 - \frac{1}{x} > 0$,

$\therefore$ 原方程的解为: $x = 1$.

故答案为: 1.

【点评】本题考查了解无理方程，解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解. 常用的方法有: 乘方法，配方法，因式分解法，设辅助元素法等. 注意: 用乘方法 (即将方程两边各自乘同次方来消去方程中的根号) 来解无理方程，往往会产生增根，应注意验根.

10. (4分) 已知关于 x 的方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 有两个相等的实数根，那么 k 的值是 9.

【分析】关于 x 的方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 有两个相等的实数根，即 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，代入即可求 k 值.

【解答】解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times k = 0,$$

解得 $k = 9$,

故答案为: 9.

【点评】此题主要考查一元二次方程的根的判别式，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: ①当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根; ②当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根; ③当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根. 上述结论反过来也成立.

11. (4分) 如果反比例函数 $y = \frac{2-k}{x}$ (k 为正整数), 在每个象限内, 当自变量 x 的值逐渐增大时, y 的值随着逐渐减小, 那么正整数 k 的值为 1.

【分析】由已知求出 k 的范围再取符合条件的正整数即可.

【解答】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{2-k}{x}$ (k 为正整数), 在每个象限内, 当自变量 x 的值逐渐增大时, y 的值随着逐渐减小,

$$\therefore 2 - k > 0, \text{ 解得 } k < 2,$$

而 k 为正整数,

$$\therefore k = 1,$$

故答案为: 1.

【点评】本题考查反比例函数的增减性, 解题的关键是求出 k 取值范围.

12. (4分) 直线 $y = 2x + 6$ 与两坐标轴围成的三角形面积是 9.

【分析】分别令 $x = 0$, $y = 0$ 求出直线与坐标轴的交点, 再根据三角形的面积公式解答即可.

【解答】解: 令 $x = 0$, 则 $y = 6$,

令 $y = 0$, 则 $x = -3$,

故直线 $y = 2x + 6$ 与两坐标轴的交点分别为 $(0, 6)$ 、 $(-3, 0)$,

故直线 $y = 2x + 6$ 与两坐标轴围成的三角形面积 $= \frac{1}{2} |-3| \times 6 = 9$.

【点评】此题比较简单, 只要求出直线与两坐标轴的交点即可解答.

13. (4分) 掷两枚骰子, 两者朝上面点数之和只可能是 2、3、4、5、6、7、8、9、10、11 和 12, 共 11 种可能, 所以小明认为“掷两枚骰子, 出现两者朝上面点数之和为 2”的概率是 $\frac{1}{11}$. 你同意小明的观点吗? 答: 不同意, 理由是 11 种情况非等可能发生,
出现两者朝上面点数之和为 2”的概率为 $\frac{1}{36}$.

【分析】列表得出所有情况, 再由概率公式求解即可.

【解答】解: 列表如下:

第2枚 第1枚	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

共有 36 种等可能出现的结果，11 种情况非等可能发生，出现两者朝上面点数之和为 2” 的有 1 个，

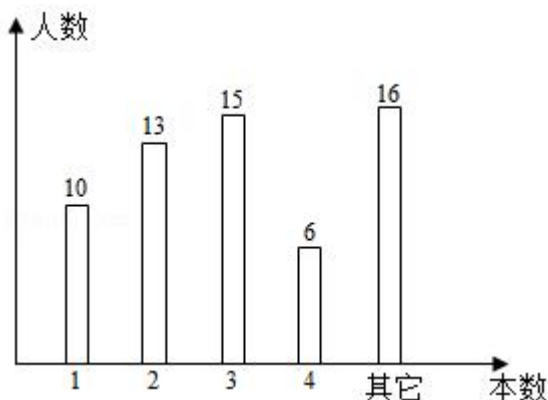
∴ 出现两者朝上面点数之和为 2” 的概率为 $\frac{1}{36}$ ，

∴ 不同意小明的观点．

故答案为：不同意；11 种情况非等可能发生，出现两者朝上面点数之和为 2” 的概率为 $\frac{1}{36}$ ．

【点评】 本题考查了列表法与树状图法：利用列表法和树状图法展示所有可能的结果求出 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，求出概率．

- 14.（4 分）为了了解某区初中学生暑假中阅读课外读物的情况，小杰和小丽随机调查了该区内 60 名初中学生，并将调查数据整理成下面的条形图（如图）．如果该区共有初中学生 15000 人，那么估计该区在暑假中阅读了 4 本课外读物的初中学生有 1500 人．



【分析】 用样本的“读 4 本”课外读物的百分比估计总体的百分比，然后进行计算即可．

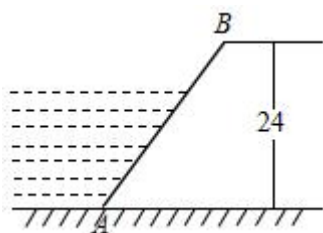
【解答】 解： $15000 \times \frac{6}{60} = 1500$ （人），

故答案为：1500．

【点评】 本题考查样本估计总体，求出样本中“读 4 本”所占得百分比是解决问题的关键．

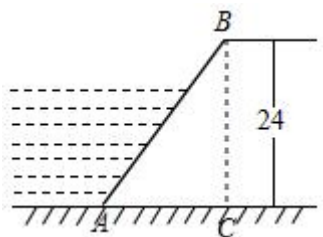
- 15.（4 分）如图，某水库水坝的坝高为 24 米，如果迎水坡 AB 的坡度为 1: 0.75，那么该水

库迎水坡 AB 的长度为 30 米.



【分析】 先根据坡度的定义求出 AC 的长, 再根据勾股定理即可求出该大坝迎水坡 AB 的长度.

【解答】 解: 如图, 过点 B 作 BC 垂直于水平面于点 C ,



$\because$ 迎水坡 AB 的坡度为 $1:0.75$

$\therefore BC:AC = 1:0.75$,

$\therefore 24:AC = 1:0.75$,

$\therefore AC = 18$ (米),

$\therefore AB =$

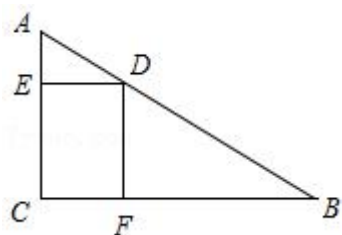
$$\sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30 \text{ (米)},$$

即该大坝迎水坡 AB 的长度为 30 米,

故答案为: 30.

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题, 解决本题的关键是掌握坡度坡角定义.

16. (4 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$, 点 D 位于边 AB 上, 过点 D 作边 BC 的平行线交边 AC 于点 E , 过点 D 作边 AC 的平行线交边 BC 于点 F (如图), 设 $AD = x$, 四边形 $CEDF$ 的面积为 y , 则 y 关于 x 的函数关系式是 $y = -\frac{12}{25}x^2 + \frac{12}{5}x$. (不必写定义域)



【分析】根据 $AC=3$ ， $BC=4$ ， $AB=5$ ，判断是直角三角形，根据平行，即可判断四边形 $CEDF$ 是矩形，利用相似三角形的性质求出四边形 $CEDF$ 的各边，即可求出面积。

【解答】解： $\because AC=3$ ， $BC=4$ ， $AB=5$ 。

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle C = 90^\circ$ 。

$\because$ 边 BC 的平行线交边 AC 于点 E ，

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC.$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{ED}{BC}. \text{ 即: } \frac{x}{5} = \frac{ED}{4}.$$

$$\therefore ED = \frac{4x}{5}.$$

$\because$ 边 AC 的平行线交边 BC 于点 F 。

$$\therefore \triangle BDF \sim \triangle BCA.$$

$$\therefore \frac{BD}{BA} = \frac{DF}{AC}. \text{ 即: } \frac{5-x}{5} = \frac{DF}{3}.$$

$$DF = \frac{3(5-x)}{5}.$$

$\because \angle C = 90^\circ$ ， $DE \parallel BC$ ， $DF \parallel AC$ 。

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是矩形。

$$\therefore \text{四边形 } CEDF \text{ 的面积为 } y = ED \cdot DF = \frac{4x}{5} \cdot \frac{3(5-x)}{5} = -\frac{12}{25}x^2 + \frac{12}{5}x.$$

$$\text{故答案为: } y = -\frac{12}{25}x^2 + \frac{12}{5}x.$$

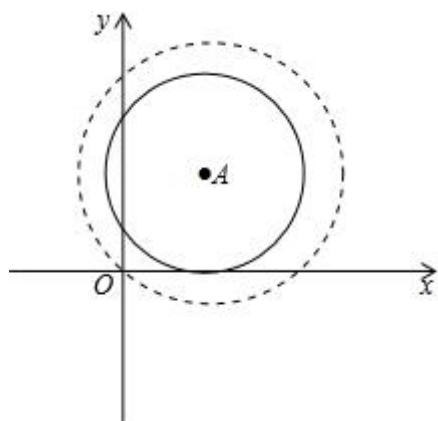
【点评】本题考查三角形相似的判定和性质、矩形的判定和面积计算，关键在于利用相似的性质表示出矩形的边的长度，比较综合。

17. (4分) 在平面直角坐标系内，已知点 $A(3, 4)$ ，如果圆 A 与两坐标轴有且只有 3 个公共点，那么圆 A 的半径长是 4 或 5。

【分析】利用圆与坐标轴的位置关系，分两种情形分别求解即可。

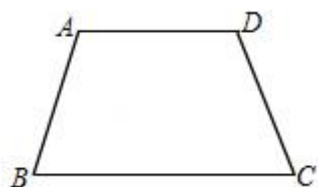
【解答】解：①如图，当圆心在 $(3, 4)$ 且与 x 轴相切时， $r=4$ ，此时 $\odot A$ 与坐标轴有且只有 3 个公共点。

②当圆心在 $(3, 4)$ 且经过原点时, $r = 5$. 此时 $\odot A$ 与坐标轴有且只有 3 个公共点,
故答案为: 4 或 5.



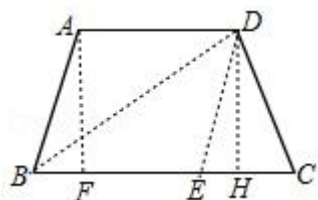
【点评】 本题考查了直线与圆的位置关系, 直线和圆的位置关系的确定一般是利用圆心到直线的距离与半径比较来判断. 若圆心到直线的距离是 d , 半径是 r , 则① $d > r$, 直线和圆相离, 没有交点; ② $d = r$, 直线和圆相切, 有一个交点; ③ $d < r$, 直线和圆相交, 有两个交点.

18. (4 分) 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$. 将 $\triangle ABD$ 沿对角线 BD 翻折, 点 A 的对应点 E 恰好位于边 BC 上, 且 $BE:EC = 3:2$, 则 $\angle C$ 的余切值是 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.



【分析】 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于 F , $DH \perp BC$ 于 H , 设 $BE = 3x$, $EC = 2x$, 分别求出 CH 和 DH 的长, 即可求解.

【解答】 解: 如图, 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于 F , $DH \perp BC$ 于 H ,



$\therefore AF \parallel DH$,

又 $\because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ADHF$ 是平行四边形,

又 $\because AF \perp BC$,

∴ 四边形 $ADHF$ 是矩形,

∴ $AF = DH$, $AD = FH$,

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 和 $\text{Rt}\triangle DCH$ 中,

$$\begin{cases} AB=DC \\ AF=DH \end{cases},$$

∴ $\text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle DCH$ (HL),

∴ $BF = CH$,

∴ 将 $\triangle ABD$ 沿对角线 BD 翻折,

∴ $AB = BE$, $\angle ABD = \angle DBC$,

∴ $AD \parallel BC$,

∴ $\angle ADB = \angle DBC = \angle ABD$,

∴ $AB = AD$,

∴ $BE : EC = 3 : 2$,

∴ 设 $BE = 3x$, $EC = 2x$,

∴ $AB = CD = 3x = AD = FH$,

∴ $BF = CH = x$,

∴ $DH = \sqrt{DC^2 - CH^2} = 2\sqrt{2}x$,

∴ $\angle C$ 的余切值 $= \frac{x}{2\sqrt{2}x} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

【点评】 本题考查了翻折变换, 全等三角形的判定和性质, 矩形的判定和性质, 锐角三角函数等知识, 灵活运用这些性质解决问题是本题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $(\pi - 3)^0 + \frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - 4\sin^2 30^\circ - \sqrt{20}$.

【分析】 先根据零指数幂和特殊角的三角函数值进行计算, 再分母有理化, 然后合并即可.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= 1 + \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\sqrt{5} \\ &= 1 + 2(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - 4 \times \frac{1}{4} - 2\sqrt{5} \\ &= 1 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{3}.$$

【点评】 本题考查了二次根式的混合运算：先把二次根式化为最简二次根式，然后进行二次根式的乘除运算，再合并即可．在二次根式的混合运算中，如能结合题目特点，灵活运用二次根式的性质，选择恰当的解题途径，往往能事半功倍．

20. (10分) 解方程组：
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, & \text{①} \\ x^2 - 4y^2 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

【分析】 先利用加减消元法解得 y^2 和 x^2 的值，再开平方解得 x 和 y 的值即可．

【解答】 解：① - ②得： $5y^2 = 5$,

$$\therefore y^2 = 1 \text{③},$$

把③代入①，得 $x^2 = 4$,

$$\therefore x = \pm 2, y = \pm 1,$$

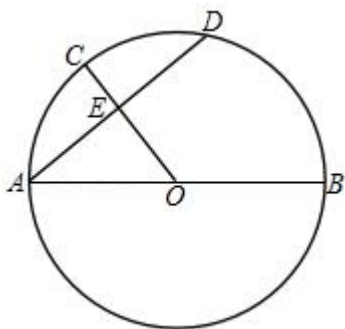
$$\therefore \text{方程组的解为} \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = -2 \\ y_3 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = -2 \\ y_4 = -1 \end{cases}.$$

【点评】 本题考查了高次方程的解法，运用整体思想、熟练掌握二元一次方程组的解法是解题的关键．

21. (10分) 如图， AB 是圆 O 的直径，点 C 、 D 为圆 O 上的点，满足： $\widehat{AC} = \widehat{CD}$ ， AD 交 OC 于点 E ．已知 $OE = 3$ ， $EC = 2$ ．

(1) 求弦 AD 的长；

(2) 请过点 C 作 AB 的平行线交弦 AD 于点 F ，求线段 EF 的长．



【分析】 (1) 根据圆心角、弧、弦的关系得到 $CO \perp AD$ ， $AE = DE$ ，然后根据勾股定理即可求得 AE ，进而求得 AD ；

(2) 根据平行线分线段成比例定理即可求得结论．

【解答】 解：(1) 由 $\widehat{AC} = \widehat{CD}$ ，得 $CO \perp AD$ ， $AE = DE$ ，

在 $\triangle AOE$ 中， $\angle AEO = 90^\circ$ ， $OE = 3$ ， $OA = OC = OE + CE = 5$ ，

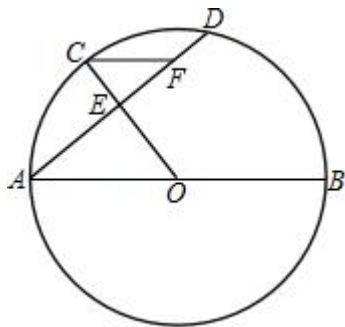
得 $AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = 4$,

所以 $AD = AE + DE = 8$;

(2) 由 $CF \parallel AB$,

得 $\frac{EF}{CE} = \frac{AE}{OE}$,

则 $EF = \frac{AE \times CE}{OE} = \frac{8}{3}$.



【点评】此题考查圆心角、弧、弦的关系，勾股定理的应用，平行线分线段成比例定理，熟练掌握性质定理是解题的关键。

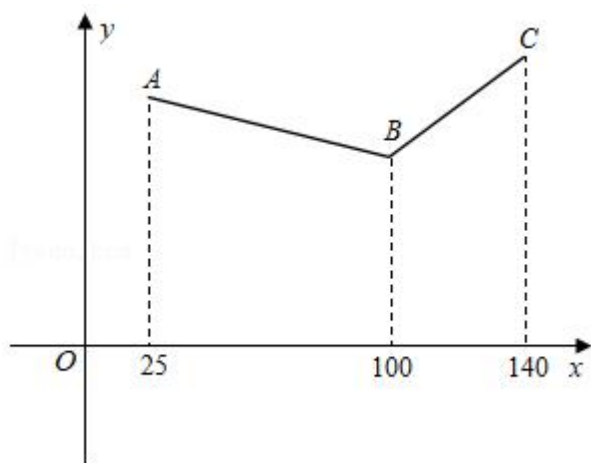
22. (10分) 某款轿车每行驶 100 千米的耗油量 y 升与其行驶速度 x 千米/小时之间的函数关系

图象如图所示，其中线段 AB 的表达式为 $y = -\frac{1}{25}x + 13$ ($25 \leq x \leq 100$)，点 C 的坐标为

(140, 14)，即行驶速度为 140 千米/小时时该轿车每行驶 100 千米的耗油量是 14 升。

(1) 求线段 BC 的表达式；

(2) 如果从甲地到乙地全程为 260 千米，其中有 60 千米限速 50 千米/小时的省道和 200 千米限速 120 千米/小时的高速公路，那么在不考虑其他因素的情况下，这款轿车从甲地行驶到乙地至少需要耗油多少升？



【分析】(1) 根据线段 AB 的表达式求出点 B 的坐标，利用待定系数法即可求解；

(2) 根据题意当在省道上行驶速度为 50 千米/小时, 在高速公路上行驶速度为 100 千米/小时时, 耗油最少, 根据线段 AB 的表达式求出省道的耗油量加上在高速公路行驶的耗油量即可求解.

【解答】 解: (1) 当 $x = 100$ 时, $y = -\frac{1}{25} \times 100 + 13$, 即 $B(100, 9)$,

令 BC 的表达式为 $y = kx + b$,

$$\text{则} \begin{cases} 9 = 100k + b \\ 14 = 140k + b \end{cases},$$

$$\text{解得:} \begin{cases} k = \frac{1}{8} \\ b = -\frac{7}{2} \end{cases},$$

所以表达式为 $y = \frac{1}{8}x - \frac{7}{2} (100 \leq x \leq 140)$;

(2) 当 $x = 50$ 时, $y = -\frac{1}{25} \times 50 + 13 = 11$.

则当在省道上行驶速度为 50 千米/小时, 在高速公路上行驶速度为 100 千米/小时时, 耗油最少,

$$11 \times \frac{60}{100} + 9 \times \frac{200}{100} = 24.6 \text{ (升)}.$$

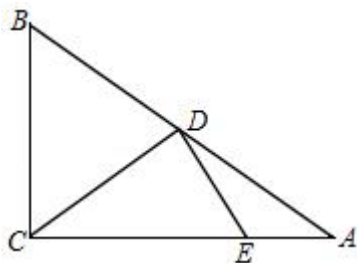
答: 这款轿车从甲地行驶到乙地至少需要耗油 24.6 升.

【点评】 本题考查了一次函数的应用, 解题的关键结合图形, 理解图形中点的坐标代表的意义.

23. (12 分) 如图, CD 是直角 $\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线, 点 E 位于边 AC 上, 且 $\angle ADE = \angle B - \angle A$.

(1) 求证: $\triangle CDE \sim \triangle ABC$;

(2) 当 $DA:EA = \sqrt{6}:1$ 时, 求 $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比.



【分析】 (1) 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $DC = DA = DB$, 所以 $\angle DCA = \angle A$, 根据已知条件和三角形外角定义即可得 $\angle DEC = \angle B$, 进而可得结论;

(2) 令 $EA = k$, $DA = \sqrt{6}k$, $CE = x$, 根据 $\triangle CDE \sim \triangle ABC$, 对应边成比例可得 $x = 3k$,

进而根据相似三角形面积比等于相似比的平方即可得结论.

【解答】(1) 证明: $\because CD$ 是直角 $\triangle ABC$ 斜边上的中线,

$$\therefore DC = DA = DB,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle A,$$

在 $\triangle ADE$ 中, $\angle DEC = \angle A + \angle ADE$.

又 $\angle ADE = \angle B - \angle A$, 即 $\angle B = \angle A + \angle ADE$,

$$\therefore \angle DEC = \angle B,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle ABC,$$

(2) 解: 令 $EA = k$, $DA = \sqrt{6}k$, $CE = x$,

$$\because \triangle CDE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{CE}{CD} = \frac{AB}{AC},$$

$$\text{即 } \frac{x}{\sqrt{6}k} = \frac{2\sqrt{6}k}{x+k},$$

解得 $x = 3k$, $x = -4k$ (舍),

$$\text{所以 } \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{CE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{3}{2\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

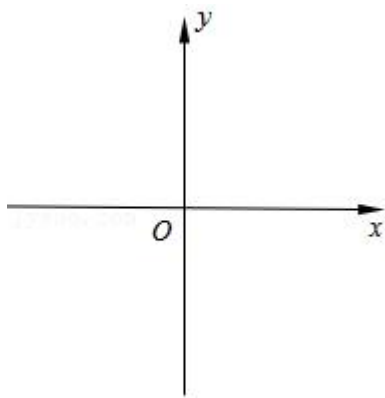
【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 直角三角形斜边上的中线, 解决本题的关键是掌握相似三角形的判定与性质.

24. (12 分) 如果抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx + c$ 与抛物线 $C_2: y = -ax^2 + dx + e$ 的开口方向相反, 顶点相同, 我们称抛物线 C_2 是 C_1 的“对顶”抛物线.

(1) 求抛物线 $y = x^2 - 4x + 7$ 的“对顶”抛物线的表达式;

(2) 将抛物线 $y = x^2 - 4x + 7$ 的“对顶”抛物线沿其对称轴平移, 使所得抛物线与原抛物线 $y = x^2 - 4x + 7$ 形成两个交点 M 、 N , 记平移前后两抛物线的顶点分别为 A 、 B , 当四边形 $AMBN$ 是正方形时, 求正方形 $AMBN$ 的面积.

(3) 某同学在探究“对顶”抛物线时发现: 如果抛物线 C_1 与 C_2 的顶点位于 x 轴上, 那么系数 b 与 d , c 与 e 之间的关系是确定的, 请写出它们之间的关系.



【分析】(1) 先求出抛物线 C_1 的顶点坐标，进而得出抛物线 C_2 的顶点坐标，即可得出结论；

(2) 设正方形 $AMBN$ 的对角线长为 $2k$ ，得出 $B(2, 3+2k)$ ， $M(2+k, 3+k)$ ， $N(2-k, 3+k)$ ，再用点 $M(2+k, 3+k)$ 在抛物线 $y = (x-2)^2+3$ 上，建立方程求出 k 的值，即可得出结论；

(3) 先根据抛物线 C_1 ， C_2 的顶点相同，得出 b ， d 的关系式，再由两抛物线的顶点在 x 轴，求出 c ， e 的关系，即可得出结论。

【解答】解：(1) $\because y = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$ ，

$\therefore$ 顶点为 $(2, 3)$ ，

$\therefore$ 其“对顶”抛物线的解析式为 $y = -(x-2)^2 + 3$ ，

即 $y = -x^2 + 4x - 1$ ；

(2) 如图，由 (1) 知， $A(2, 3)$ ，

设正方形 $AMBN$ 的对角线长为 $2k$ ，

则点 $B(2, 3+2k)$ ， $M(2+k, 3+k)$ ， $N(2-k, 3+k)$ ，

$\because M(2+k, 3+k)$ 在抛物线 $y = (x-2)^2 + 3$ 上，

$\therefore 3+k = (2+k-2)^2 + 3$ ，

解得 $k = 1$ 或 $k = 0$ (舍)；

$\therefore$ 正方形 $AMBN$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times (2k)^2 = 2$ ；

(3) 根据抛物线的顶点坐标公式得，抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx + c$ 的顶点为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ，

抛物线 $C_2: y = -ax^2 + dx + e$ 的顶点为 $(\frac{d}{2a}, \frac{-4ae-d^2}{-4a})$ ，

$\because$ 抛物线 C_2 是 C_1 的“对顶”抛物线，

$$\therefore -\frac{b}{2a} = \frac{d}{2a},$$

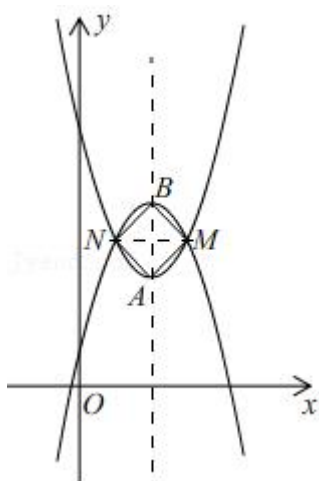
$$\therefore b = -d,$$

$\because$ 抛物线 C_1 与 C_2 的顶点位于 x 轴上,

$$\therefore \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{-4ae-d^2}{-4a} = 0,$$

$$\therefore c = -e,$$

即 $b = -d, c = -e$.



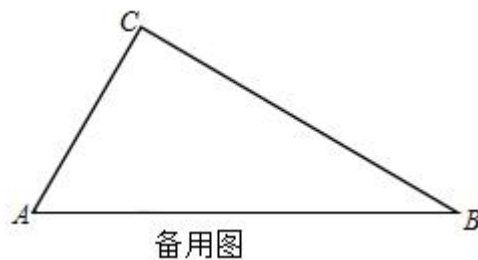
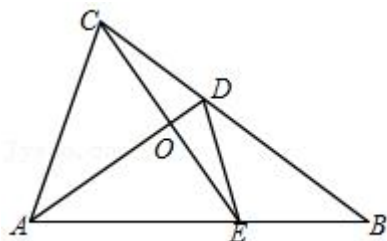
【点评】 此题主要考查了抛物线的顶点坐标公式，正方形的性质，理解新定义式解本题的关键.

25. (14分) 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 过点 C 作 AD 的垂线交边 AB 于点 E , 垂足为点 O , 连接 DE .

(1) 求证: $DE = DC$;

(2) 当 $\angle ACB = 90^\circ$, 且 $\triangle BDE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 $1:3$ 时, 求 $CE:AD$ 的值;

(3) 是否存在 $\triangle ABC$ 能使 CE 为 $\triangle ABC$ 边 AB 上的中线, 且 $CE = AD$? 如果能, 请用 $\angle CAB$ 的某个三角比的值来表示它此时的大小; 如果不能, 请说明理由.



【分析】 (1) 根据已知条件证明 $\triangle AOC \cong \triangle AOE$, 可得 $AC = AE$. 再证明 $\triangle ACD \cong \triangle AED$, 即可得结论;

(2) 由 $\triangle BDE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 $1:3$, 又 $\triangle ACD \cong \triangle AED$, 可得 $\triangle BDE$ 、 $\triangle ACD$ 与 $\triangle AED$ 的面积均相等. 证明 $\triangle ACE$ 为等边三角形, 根据含 30° 角的直角三角形即可得结论;

(3) 作 $EF \parallel AD$ 交 BC 于点 F , 对应边成比例, 令 $AD = CE = 8k$, 则 $OE = OC = 4k$, $OD = 2k$, $OA = 6k$, 作 $CH \perp AE$ 于点 H , 证明 $\triangle CEH \sim \triangle ACO$, 可得 $\frac{CH}{OA} = \frac{CE}{AC} = \frac{HE}{CD}$, 再根据锐角三角形和即可得结论.

【解答】解: (1) $\because AD$ 是角平分线,

$$\therefore \angle CAO = \angle EAO.$$

又 $\because CE \perp AD$,

$$\therefore \angle COA = \angle EOA = 90^\circ.$$

又 $AO = AO$,

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle AOE \text{ (ASA)}$$

$$\therefore AC = AE.$$

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle AED$ 中,

$$\because AC = AE, \angle CAD = \angle OAD, AD = AD,$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AED \text{ (SAS)},$$

$$\therefore DE = DC;$$

(2) $\because \triangle BDE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 $1:3$,

$$\because \triangle ACD \cong \triangle AED,$$

$\therefore \triangle BDE$ 、 $\triangle ACD$ 与 $\triangle AED$ 的面积均相等.

$$\therefore BE = AE = AC, \text{ 又 } \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ACE$ 为等边三角形,

$$\therefore CE = AC.$$

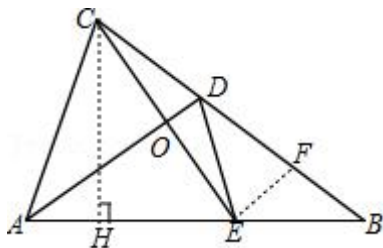
在 $\triangle ACD$ 中, $\angle ACD = 90^\circ$, $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle CAB = 30^\circ$,

$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } \frac{CE}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

(3) 存在这样的三角形,

如图, 作 $EF \parallel AD$ 交 BC 于点 F ,



$$\text{则 } \frac{OD}{EF} = \frac{CO}{CE} = \frac{1}{2}, \quad \frac{EF}{AD} = \frac{BE}{BA} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AD = CE,$$

$$\text{令 } AD = CE = 8k, \text{ 则 } OE = OC = 4k, OD = 2k, OA = 6k,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, 根据勾股定理, 得

$$AC = \sqrt{OC^2 + OA^2} = 2\sqrt{13}k,$$

$$\therefore AE = 2\sqrt{13}k.$$

如图, 作 $CH \perp AE$ 于点 H ,

$$\therefore \angle ECH + \angle CEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAE + \angle CEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECH = \angle OAE,$$

$$\therefore \angle OAE = \angle OAC,$$

$$\therefore \angle ECH = \angle OAC,$$

$$\therefore \angle CHE = \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CEH \sim \triangle ACO,$$

$$\therefore \frac{CH}{OA} = \frac{CE}{AC} = \frac{HE}{OC},$$

$$\therefore CH = 8k \times \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{24\sqrt{13}}{13}k,$$

$$EH = 8k \times \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{16\sqrt{13}}{13}k,$$

$$\therefore AH = AE - EH,$$

$$\therefore AH = 2\sqrt{13}k - \frac{16\sqrt{13}}{13}k = \frac{10\sqrt{13}}{13}k.$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ACH \text{ 中, } \tan \angle CAB = \frac{CH}{AH} = \frac{12}{5}.$$

【点评】 本题考查了相似形综合题, 主要考查了相似三角形的判定与性质, 全等三角形

的判定与性质，等边三角形的判定与性质，勾股定理，解直角三角形，解决本题的关键是综合运用以上知识.