

2021 年上海市静安区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. 下列计算正确的是（ ）

- A. $1^{-1} = -1$ B. $1^0 = 0$ C. $(-1)^{-1} = 1$ D. $(-1)^0 = 1$

【答案】D

【解析】

【分析】直接利用零指数幂的性质以及负整数指数幂的性质分别化简得出答案.

【详解】解：A、 $1^{-1} = 1$ ，故此选项错误；

B、 $1^0 = 1$ ，故此选项错误；

C、 $(-1)^{-1} = -1$ ，故此选项错误；

D、 $(-1)^0 = 1$ ，故此选项正确.

故选：D.

【点睛】本题考查零指数幂的性质、负整数指数幂的性质，正确理解性质是关键

2. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 有实数根，那么 m 的取值范围是（ ）

- A. $m > 9$ B. $m \geq 9$ C. $m \leq 9$ D. $m < 9$

【答案】C

【解析】

【分析】由关于 x 的方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 有实数根知 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ，求出 m 的取值范围即可.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 有实数根，

$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4m \geq 0$ ，解得： $m \leq 9$ ，

故选：C.

【点睛】本题主要考查根的判别式，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：①当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；②当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；③当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

3. 一次函数 $y = 3x - 2$ 的图像不经过的象限是（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】根据一次函数的图象与系数的关系解答即可.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = 3x - 2$ 中, $k = 3 > 0$, $b = -2 < 0$,

$\therefore$ 此函数的图象经过一、三、四象限, 不经过第二象限.

故选: B.

【点睛】本题考查的是一次函数的图象, 熟知一次函数的图象与系数的关系是解答此题的关键.

4. 对于等边三角形, 下列说法正确的为 ()

A. 既是中心对称图形, 又是轴对称图形

B. 是轴对称图形, 但不是中心对称图形

C. 是中心对称图形, 但不是轴对称图形

D. 既不是中心对称图形, 又不是轴对称图形

【答案】B

【解析】

【分析】根据中心对称图形与轴对称图形的概念分析即可.

【详解】等边三角形是轴对称图形, 不是中心对称图形.

故选: B.

【点睛】本题考查判断轴对称图形与中心对称图形. 掌握轴对称图形和中心对称图形的概念是解答本题的关键.

5. 某厂对一个班组生产的零件进行调查, 该组在 8 天中每天所出的次品数如下 (单位: 个): 3, 3, 0, 2, 2, 3, 0, 3, 那么该班组在 8 天中出的次品数的中位数与方差分别是 ()

A. 2.5 与 1.5

B. 2 与 1.5

C. 2.5 与 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. 2 与 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】直接利用中位数的定义和方差的计算公式计算即可.

【详解】中位数 $= \frac{2+3}{2} = 2.5$.

$$\bar{x} = \frac{3+3+2+2+3+3}{8} = 2.$$

$$S^2 = \frac{(3-2)^2 + (3-2)^2 + (0-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2 + (0-2)^2 + (3-2)^2}{8} = 1.5.$$

综上所述, 中位数为 2.5、方差为 1.5.

故选: A.

【点睛】本题考查求中位数和方差. 掌握求一组数据中中位数和方差的公式是解答本题的关键.

6. 对于命题：①如果一个圆上所有的点都在另一个圆的内部，那么这个圆内含；②如果一个圆上所有的点都在另一个圆的外部，那么这个圆外离. 下列判断正确的是 ()

- A. ①是真命题，②是假命题
B. ①是假命题，②是真命题
C. ①、②都是真命题
D. ①、②都是假命题

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据圆与圆的位置关系判断即可.

【详解】 解：①如果一个圆上所有的点都在另一个圆的内部，那么这两个圆内含，是真命题；
②如果第一个圆上的点都在另一个圆的外部，那么这两个圆外离或内含，故原命题是假命题；
故选：A.

【点睛】 本题考查了命题的判断，掌握命题的定义及分类并能运用所学知识判断命题的真假是解题的关键.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 化简： $|\sqrt{3}-2|$ =_____.

【答案】 $2-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先判断两个实数的大小关系，再根据绝对值的代数意义化简，进而得出答案.

【详解】 解： $\because \sqrt{3} < 2$,

$$\therefore \text{原式} = -(\sqrt{3}-2)$$

$$= 2-\sqrt{3},$$

故答案为： $2-\sqrt{3}$.

【点睛】 此题主要考查了绝对值的代数意义，正确判断实数的大小是解题关键.

8. 计算： $x \div (x^2-x) =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{x-1}$

【解析】

【分析】 先把除法算式改写成成分式的形式，再根据分式的基本性质进行化简，即可得出结果.

【详解】 解： $x \div (x^2-x) = \frac{x}{x^2-x} = \frac{x}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}$.

故答案为: $\frac{1}{x-1}$.

【点睛】此题考查了分式的约分, 掌握分式的基本性质是解题的关键.

9. 函数 $f(x) = \frac{x-1}{3-2x}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x \neq \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】函数 $f(x) = \frac{x-1}{3-2x}$ 的定义域, 为自变量的取值范围, 即 $3-2x \neq 0$ 分母不为 0.

【详解】函数 $f(x) = \frac{x-1}{3-2x}$ 的定义域为 $3-2x \neq 0$, 即 $x \neq \frac{3}{2}$.

故答案: $x \neq \frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查了自变量的取值范围、分式有意义的条件, 准确把握分式有意义的条件是解答此题的关键.

10. 如果正比例函数的图像经过第二、四象限, 那么函数值 y 随 x 的增大而_____.

【答案】 减小

【解析】

【分析】根据正比例函数的性质即可填空.

【详解】根据函数图像经过第二、四象限可知其比例系数 $k < 0$.

$\therefore$ 函数值 y 随 x 的增大而减小.

故答案为: 减小.

【点睛】本题考查正比例函数的性质. 掌握正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$, 当 $k < 0$ 时, 其图像经过第二、四象限, 且函数值 y 随 x 的增大而减小是解答本题的关键.

11. 方程组 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 的解为_____.

【答案】 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

【解析】

【分析】先求出 $x+y=3$, 再利用加减消元法进行求解 x, y 即可.

【详解】解: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \text{ ①} \\ x - y = 1 \text{ ②} \end{cases}$

由①得: $(x-y)(x+y)=3$ ③

将②代入③得: $x+y=3$ ④

②+④得: $2x=4$, 则 $x=2$

将 $x=2$ 代入④得, $y=1$

所以 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

故答案为 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

【点睛】此题考查了解二元一次方程组, 利用了消元的思想, 消元的方法有: 代入消元法与加减消元法.

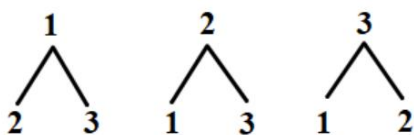
12. 从 1, 2, 3 这三个数中任选两个组成两位数, 在组成的所有数中任意抽取一个数, 这个数恰好能被 3 整除的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】利用树状图法求解即可.

【详解】根据题意, 列树状图如下:



$\therefore$ 组成的两位共有: 12, 13, 21, 23, 31, 32, 6 个数,

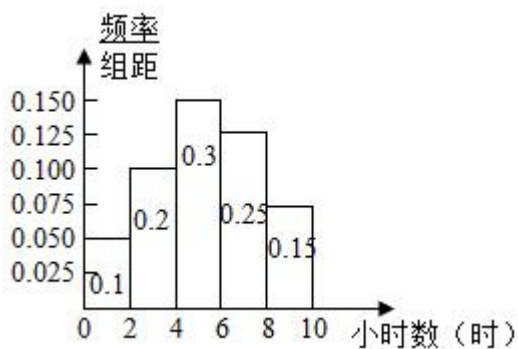
其中能够被 3 整除的有: 12, 21, 2 个数,

$\therefore$ 恰好能被 3 整除的概率为 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

故答案为: $\frac{1}{3}$.

【点睛】本题考查列树状图或表格的方法求概率, 准确根据题意列出树状图或表格是解题关键.

13. 为了了解学生用于阅读课外书籍的时间的情况, 某校在 300 名九年级学生中随机对 40 名学生每周阅读课外书籍所用的时间进行统计. 根据调查结果画出频率分布直方图, 如图所示 (每个小组可包括最小值, 不包括最大值), 由此可以估计该校九年级学生阅读课外书籍用的时间在 6 小时及以上的人数约为_____.



【答案】 120

【解析】

【分析】 根据直方图分析出课外阅读时间在 6 小时及以上的人数的频率，然后利用频率乘总人数即可求解.

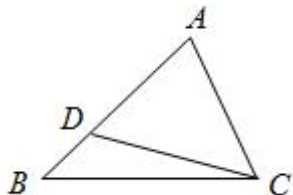
【详解】 由图中可知，课外阅读时间在 6 小时及以上的人数的频率为 $0.25+0.15=0.4$,

$\therefore$ 所有学生中，课外阅读时间在 6 小时及以上的人数 $300 \times 0.4 = 120$ 人，

故答案为：120.

【点睛】 本题考查频率分布直方图，理解频率分布直方图的意义是解题关键.

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上， $\angle ACD = \angle B$ ， $AD = 2$ ， $AC = \sqrt{6}$ ，设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{CD} =$ _____ . (用向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的式子表示).



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$

【解析】

【分析】 根据 $\angle A = \angle A$ ， $\angle ACD = \angle B$ ，可证 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，则有 $AC^2 = AD \cdot AB$ ，可得 $AB = 3$ ， $BD = 1$ ，可求得 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\vec{a}$ ，然后根据 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$ 求解即可.

【详解】 解： $\because \angle A = \angle A$ ， $\angle ACD = \angle B$ ，

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，

$\therefore AC^2 = AD \cdot AB$ ，

$\therefore (\sqrt{6})^2 = 2AB$

$$\therefore AB=3,$$

$$\therefore BD=1,$$

$$\therefore BD=\frac{1}{3}AB,$$

$$\therefore \overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\vec{a},$$

$$\because \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}.$$

【点睛】 本题考查相似三角形的判定和性质，平面向量等知识，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

15. 如果 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交， $\odot O_1$ 的半径是5， $O_1O_2=3$ ，那么 $\odot O_2$ 的半径 r 的取值范围是_____.

【答案】 $2 < r < 8$

【解析】

【分析】 根据数量关系与两圆位置关系的对应情况求得，两圆相交，则 $R-r < d < R+r$.

【详解】 解： $\because$ 两圆相交，

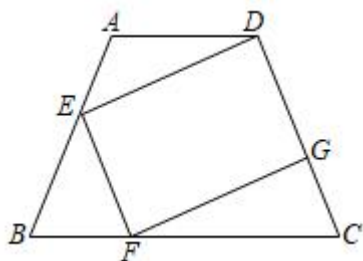
$$\therefore \text{圆心距的取值范围是 } |5-r| < 3 < 5+r,$$

$$\text{即 } 2 < r < 8.$$

故答案为： $2 < r < 8$.

【点睛】 本题考查了由数量关系来判断两圆位置关系的方法. 外离，则 $P > R+r$ ；外切，则 $P = R+r$ ；相交，则 $R-r < P < R+r$ ；内切，则 $P = R-r$ ；内含，则 $P < R-r$. (P 表示圆心距， R, r 分别表示两圆的半径).

16. 如图，已知在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB=CD$ ，矩形 $DEFG$ 的顶点 E, F, G 分别在边 AB, BC, CD 上，如果 $DE=5$ ， $\tan C = \frac{5}{2}$ ，那么 AE 的长为_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 证明 $AE=CG$ ，解直角三角形求出 CG ，可得结论.

【详解】解：∵四边形 $DEFG$ 是矩形，

$$\therefore EF \parallel CD, EF = DG, \angle FGD = \angle FGC = 90^\circ, DE = FG = 5,$$

$$\therefore \angle EFB = \angle C,$$

$$\therefore AD \parallel BC, AB = CD,$$

∴ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \angle B = \angle EFB,$$

$$\therefore BE = EF = DG,$$

$$\therefore AE = CG,$$

$$\text{在 Rt}\triangle FGC \text{ 中, } \tan C = \frac{FG}{CG} = \frac{5}{2},$$

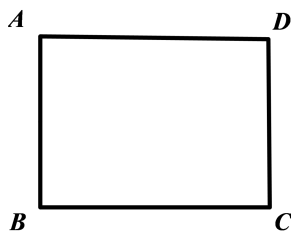
$$\therefore CG = 2,$$

$$\therefore AE = CG = 2,$$

故答案为：2.

【点睛】 本题考查等腰梯形的性质，矩形的性质，解直角三角形等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

17. 已知矩形纸片 $ABCD$ 的边 $AB = 10$ ， $BC = 12$ （如图），将它折叠后，点 D 落在边 AB 的中点处，那么折痕的长为_____.



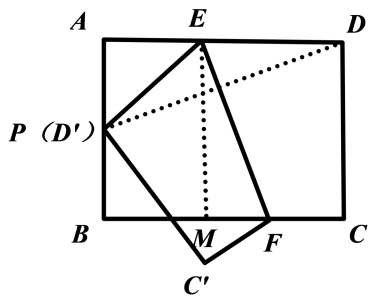
【答案】 $\frac{65}{6}$

【解析】

【分析】 通过作出折叠后的图形，作 $EM \perp BC$ ，先证 $\triangle ADP \sim \triangle MEF$ ，得到 $\frac{AD}{EM} = \frac{DP}{EF}$ ，再求出

$$AD = BC = 12, AP = \frac{1}{2}AB = 6, DP = 13, \text{ 代入求解即可.}$$

【详解】解：作出折叠后的图形，作 $EM \perp BC$ ，垂足为点 M ，连接 PD .



∵ 矩形纸片 $ABCD$ ，将它折叠后，点 D 落在边 AB 的中点处，与点 P 重合

$$\therefore \angle EPD = \angle EDP, \angle DEF + \angle EDP = 90^\circ$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $EM \perp BC$

$$\therefore EM \perp AD$$

$$\therefore \angle DEF + \angle FEM = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EDP = \angle FEM$$

$$\therefore \angle A = \angle EMF = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle ADP \sim \triangle MEF$$

$$\therefore \frac{AD}{EM} = \frac{DP}{EF}$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB = 10$ ， $BC = 12$ ，点 D 落在边 AB 的中点 P 处，

$$\therefore EM = AB = 10, AD = BC = 12, AP = \frac{1}{2}AB = 6,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ADP \text{ 中, } DP = \sqrt{AD^2 + AP^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = 15,$$

$$\therefore \frac{12}{10} = \frac{15}{EF} \text{ 则 } EF = \frac{25}{2}.$$

$$\text{故答案: } \frac{25}{2}.$$

【点睛】 本题考查了勾股定理、矩形的性质、相似三角形的判定和性质以及折叠的性质，能找到相似三角形得到边与边的关系是解答此题的关键.

18. 在一个三角形中，如果一个内角是另一内角的 n 倍 (n 为整数)，那么我们称这个三角形为 n 倍三角形. 如果一个三角形既是 2 倍角三角形，又是 3 倍角三角形，那么这个三角形最小的内角度数为_____.

$$\text{【答案】 } 30^\circ \text{ 或 } 20^\circ \text{ 或 } 18^\circ \text{ 或 } \left(\frac{360}{11}\right)^\circ$$

【解析】

【分析】 根据 n 倍三角形的定义结合三角形内角和定理，进行分类讨论计算即可.

【详解】 设最小的内角为 x° . 分类讨论:

①当 2 倍角为 $2x^\circ$ ，3 倍角为 $3x^\circ$ 时，可得： $x^\circ + 2x^\circ + 3x^\circ = 180^\circ$ ，
解得 $x = 30$ 。

②当 2 倍角为 $2x^\circ$ ，3 倍角为 $6x^\circ$ 时，可得： $x^\circ + 2x^\circ + 6x^\circ = 180^\circ$ ，
解得 $x = 20$ 。

③当 3 倍角为 $3x^\circ$ ，2 倍角为 $6x^\circ$ 时，可得： $x^\circ + 3x^\circ + 6x^\circ = 180^\circ$ ，
解得 $x = 18$ 。

④当 $3x^\circ$ 即是 2 倍角又是三倍角时，即另一个内角为 $\frac{3}{2}x^\circ$ ，可得： $x^\circ + \frac{3}{2}x^\circ + 3x^\circ = 180^\circ$ ，
解得 $x = \frac{360}{11}$ 。

综上所述，最小的内角为 30° 或 20° 或 18° 或 $(\frac{360}{11})^\circ$ 。

【点睛】 本题考查三角形内角和定理。理解题干中 n 倍三角形的定义以及利用分类讨论的思想是解答本题的关键。

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 先化简，再求值： $\frac{x+2}{x^2-x} - \frac{x-1}{x^2+x} - \frac{4}{x^2-1}$ 。其中 $x = \sqrt{2} + 1$ 。

【答案】 $\frac{1}{x^2-x}$ ， $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 分式的减法运算，先通分进行化简计算，然后代入求值。

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解：} & \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{x-1}{x^2+x} - \frac{4}{x^2-1} \\ &= \frac{x+2}{x(x-1)} - \frac{x-1}{x(x+1)} - \frac{4}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{(x+2)(x+1) - (x-1)^2 - 4x}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 2 - x^2 + 2x - 1 - 4x}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{x+1}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{x^2-x} \end{aligned}$$

当 $x = \sqrt{2} + 1$ 时，

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2 - (\sqrt{2}+1)} \\
 &= \frac{1}{2+2\sqrt{2}+1-\sqrt{2}-1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}+2} \\
 &= \frac{\sqrt{2}-2}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)} \\
 &= \frac{2-\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查分式的化简及二次根式的混合运算，掌握运算顺序和计算法则准确计算是解题关键.

20. 已知点 $A(2, m+3)$ 在双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 上.

(1) 求此双曲线的表达式与点 A 的坐标;

(2) 如果点 $B(a, 5-a)$ 在此双曲线上，图像经过点 A、B 的一次函数的函数值 y 随 x 的增大而增大，求此一次函数的解析式.

【答案】 (1) $y = -\frac{6}{x}$, $A(2, -3)$; (2) $y = \frac{1}{2}x - 4$.

【解析】

【分析】 (1) 把点 A $(2, m+3)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$ 求得 m ，即可求出结果;

(2) 把点 B $(a, 5-a)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$ 求得 a 得到 B 点的坐标，根据 A 点坐标和函数的增减性排除掉不符合题意的点，再由待定系数法求出一次函数解析式.

【详解】 解: (1) $\because$ 点 A $(2, m+3)$ 在双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 上,

$$\therefore m+3 = \frac{m}{2},$$

解得: $m = -6$,

$$\therefore m+3 = -3,$$

$$\therefore \text{此双曲线的表达式为 } y = \frac{-6}{x},$$

点 A 的坐标为 $(2, -3)$;

(2) $\because$ 点 B $(a, 5-a)$ 在此双曲线 $y = \frac{-6}{x}$ 上,

$$\therefore 5-a = \frac{-6}{a},$$

解得: $a=-1$ 或 $a=6$,

经检验: $a=-1, a=6$ 都是原方程的根, 且符合题意,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-1, 6)$ 或 $(6, -1)$,

$\therefore$ 一次函数的函数值 y 随 x 的增大而增大, 由 (1) 知 $A(2, -3)$,

$\therefore$ 点 B 的坐标只能为 $(6, -1)$,

设一次函数的解析式为 $y=kx+b$,

$$\therefore \begin{cases} -3 = 2k + b \\ -1 = 6k + b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = -4 \end{cases},$$

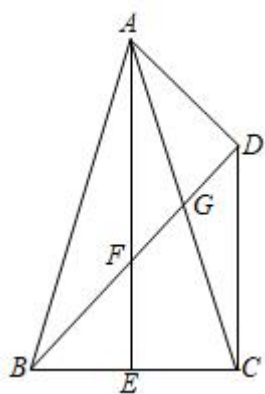
$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 4$.

【点睛】 本题主要考查了待定系数法求反比例函数解析式和一次函数解析式以及一次函数的性质, 熟练掌握待定系数法求解析式是解题的关键.

21. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $AE \perp BC$, 垂足为 E . $DC \perp BC$, $DC=BC=2$, $\angle ADB=90^\circ$, BD 与 AE 、 AC 分别相交于点 F 、 G .

求: (1) AF 的长;

(2) AG 的长.



【答案】 (1) 2; (2) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据等腰三角形的性质可得点 E 是 BC 的中点, 证明 $AE \parallel DC$, 可得 EF 是 $\triangle BCD$ 的中位线,

再根据条件证明 $\triangle ADF$ 是等腰直角三角形，进而根据勾股定理可得结果；

(2) 由 (1) 可得 $AF = CD = 2$, $EF = 1$, $BE = 1$, 所以 $AE = 3$, 根据勾股定理可得 $AB = \sqrt{10}$, 所以 $AC = AB = \sqrt{10}$, 再证明 $\triangle AFG \cong \triangle CDG$, 可得 $AG = CG$, 进而可得结论.

【详解】解: (1) $\because AB = AC$, $AE \perp BC$,

$\therefore$ 点 E 是 BC 的中点,

$$\therefore BE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

$\because DC \perp BC$,

$\therefore AE \parallel DC$,

$\because DC \perp BC$, $DC = BC = 2$,

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + DC^2} = 2\sqrt{2}, \quad \angle CBD = 45^\circ,$$

$\because$ 点 E 是 BC 的中点,

$\therefore EF$ 是 $\triangle BCD$ 的中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2} DC = 1, \quad DF = \frac{1}{2} BD = \sqrt{2},$$

$\because \angle CBD = 45^\circ$,

$\therefore \angle AFD = \angle EFB = 45^\circ$,

$\because \angle ADB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ADF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AD = DF = \sqrt{2},$$

$$\therefore AF = \sqrt{DF^2 + AE^2} = 2;$$

(2) 由 (1) 可知: $AF = CD = 2$, $EF = 1$, $BE = 1$,

$$\therefore AE = AF + EF = 2 + 1 = 3,$$

$$\therefore AB = \sqrt{BE^2 + AE^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore AC = AB = \sqrt{10},$$

$\because AE \parallel CD$,

$\therefore \angle FAG = \angle DCG$,

在 $\triangle AFG$ 和 $\triangle CDG$ 中,

$$, \begin{cases} \angle FAG = \angle DCG \\ \angle AGF = \angle CGD \\ AF = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFG \cong \triangle CDG$ (AAS),

$\therefore AG = CG$,

$$\therefore AG = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质，等腰直角三角形的判定与性质，三角形的中位线定理，解决本题的关键是综合运用以上知识.

22. 小丽的叔叔先用 900 元从甲批发部购进一种商品，后发现同样的商品乙批发部比甲批发部每件便宜 3 元，又用 1200 元钱从乙批发部购进了同样的商品，且比从甲批发部购进数量多了 40 件. 问：乙批发部的这种商品每件几元？

【答案】12 元

【解析】

【分析】设乙批发部的这种商品每件 x 元，则甲批发部这种商品每件 $(x+3)$ 元，根据“比从甲批发部购进数量多了 40 件”建立分式方程求解并检验即可.

【详解】设乙批发部的这种商品每件 x 元，则甲批发部这种商品每件 $(x+3)$ 元，

根据题意得： $\frac{900}{x+3} = \frac{1200}{x} - 40$

左右同乘 $x(x+3)$ 得： $900x = 1200(x+3) - 40x(x+3)$

整理得： $2x^2 - 9x - 180 = 0$

则： $(2x+15)(x-12) = 0$

$2x+15=0$ 或 $x-12=0$,

$\therefore x_1 = 12$, $x_2 = -\frac{15}{2}$ (不符合题意，舍去)

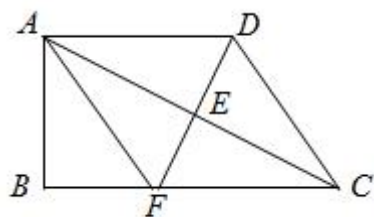
检验：当 $x = 12$ 时， $x(x+3) \neq 0$,

$\therefore x = 12$ 是原分式方程的解，

$\therefore$ 乙批发部的这种商品每件 12 元.

【点睛】本题考查分式方程的实际应用，审清题意，找准等量关系建立方程，并注意最后要检验是解题关键.

23. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， E 是 AC 的中点， DE 的延长线交边 BC 于点 F 。



(1) 求证：四边形 $AFCD$ 是平行四边形；

(2) 如果 $2AE^2 = AD \cdot BC$ ，求证四边形 $AFCD$ 是菱形。

【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由平行四边形的性质可知 $\angle DAE = \angle FCE$ ， $\angle ADE = \angle CFE$ 。再由 E 是 AC 中点，即 $AE = CE$ 。即可以利用“ AAS ”证明 $\triangle AED \cong \triangle CEF$ ，得出 $AD = CF$ ，即证明四边形 $AFCD$ 是平行四边形。

(2) 由 $2AE^2 = AD \cdot BC$ 和 E 是 AC 中点，即可推出 $\frac{AE}{CB} = \frac{AD}{AC}$ 。又因为 $\angle DAE = \angle FCE$ ，即证明 $\triangle ADE \sim \triangle CAB$ ，即可推出 $DF \perp AC$ 。即四边形 $AFCD$ 是菱形。

【详解】(1) $\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle FCE$ ， $\angle ADE = \angle CFE$ 。

又 $\because E$ 是 AC 中点，

$\therefore AE = CE$ ，

$\therefore$ 在 $\triangle AED$ 和 $\triangle CEF$ 中 $\begin{cases} \angle ADE = \angle CFE \\ \angle DAE = \angle FCE, \\ AE = CE \end{cases}$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle CEF (AAS)$ ，

$\therefore AD = CF$ ，

$\therefore$ 四边形 $AFCD$ 是平行四边形。

(2) $\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle FCE$ 。

$\because 2AE^2 = AD \cdot BC$ ，

$\therefore AE \cdot AC = AD \cdot BC$ ，

$\therefore \frac{AE}{CB} = \frac{AD}{AC}$ ，

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ABC = 90^\circ, \text{ 即 } DF \perp AC.$$

$\therefore$ 四边形 $AFCD$ 是菱形.

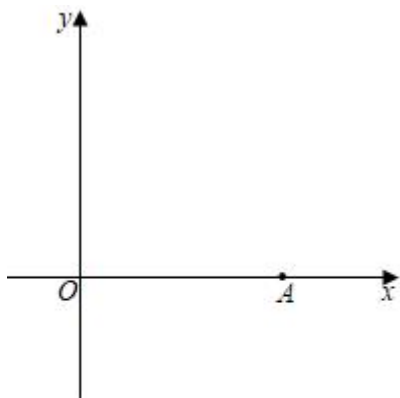
【点睛】本题考查梯形的性质，平行四边形的判定，菱形的判定，全等三角形的判定和性质以及相似三角形的判定和性质. 掌握特殊四边形的判定方法是解答本题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为 $(5, 0)$ (如图)，经过点 A 的抛物线 $y = x^2 + bx + 5$ 与 y 轴相交于点 B ，顶点为点 C .

(1) 求此抛物线表达式与顶点 C 的坐标;

(2) 求 $\angle ABC$ 的正弦值;

(3) 将此抛物线向上平移，所得新抛物线的顶点为 D ，且 $\triangle DCA$ 与 $\triangle ABC$ 相似，求平移后的新抛物线的表达式.



【答案】(1) $y = x^2 - 6x + 5$ ，顶点 C 的坐标为 $(3, -4)$ ；(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ；(3) $y = x^2 - 6x + \frac{25}{3}$ 或 $y = x^2 - 6x + 11$.

【解析】

【分析】(1) 将 $A(5, 0)$ 代入 $y = x^2 + bx + 5$ 可得表达式，配方即得顶点坐标；

(2) 设 BC 与 x 轴交于 F ，过 F 作 $FE \perp AB$ 于 E ，求出 EF 、 BF 即可得出答案；

(3) 设 D 坐标，用三边对应成比例列方程，求出 D 的坐标即可得出答案.

【详解】解：(1) 将 $A(5, 0)$ 代入 $y = x^2 + bx + 5$ 得：

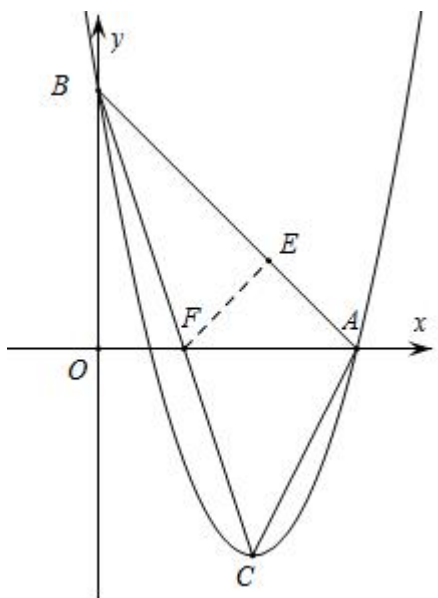
$$0 = 25 + 5b + 5, \text{ 解得 } b = -6,$$

$$\therefore \text{抛物线表达式为: } y = x^2 - 6x + 5,$$

$$\therefore y = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4,$$

$$\therefore \text{顶点 } C \text{ 的坐标为 } (3, -4);$$

(2) 设 BC 与 x 轴交于 F ，过 F 作 $FE \perp AB$ 于 E ，如图所示：



抛物线 $y = x^2 - 6x + 5$ 与 y 轴交于 $B(0, 5)$,

设 BC 解析式为 $y = mx + n$,

将 $B(0, 5)$, $C(3, -4)$ 代入得:

$$\begin{cases} 5 = n \\ -4 = 3m + n \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = -3 \\ n = 5 \end{cases},$$

$\therefore BC$ 解析式为 $y = -3x + 5$,

令 $y = 0$, 得 $x = \frac{5}{3}$,

$\therefore F(\frac{5}{3}, 0)$,

$\therefore AF = OA - OF = \frac{10}{3}$,

$\therefore B(0, 5)$, $A(5, 0)$,

$\therefore OA = OB = 5$, $AB = 5\sqrt{2}$, $\angle BAO = 45^\circ$,

$\therefore AE = AF \cdot \cos 45^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{3} = EF$,

$\therefore BE = AB - AE = \frac{10\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore BF = \sqrt{BE^2 + EF^2} = \frac{5\sqrt{10}}{3}$,

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{EF}{BF} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{3}}{\frac{5\sqrt{10}}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{5};$$

(3) 抛物线向上平移, 所得新抛物线的顶点为 D , 设 $D(3, m)$,

则平移后的新抛物线的表达式为 $y = (x-3)^2 + m$,

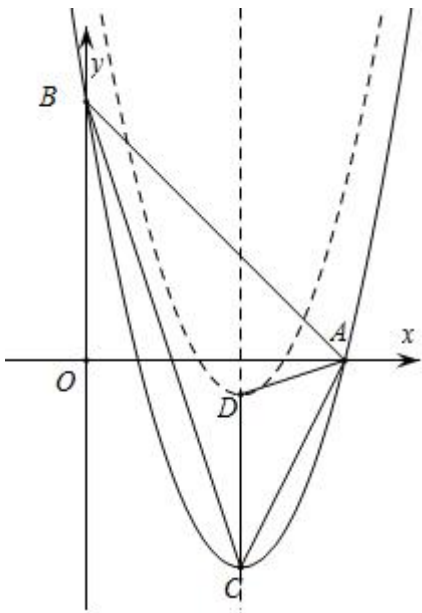
且 $CD = m - (-4) = m+4$,

$$AD = \sqrt{m^2 + 4}, \quad AC = \sqrt{(5-3)^2 + (0+4)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$AB = 5\sqrt{2}, \quad BC = 3\sqrt{10},$$

若 $\triangle DCA$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 只需三边对应成比例, 但 AC 对应边不能是 AC , 故分三种情况:

①若 $\triangle ABC \sim \triangle DCA$, 如图所示:



$$\frac{AB}{DC} = \frac{BC}{CA} = \frac{AC}{AD}, \quad \text{即} \quad \frac{5\sqrt{2}}{m+4} = \frac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{m^2 + 4}},$$

$$\text{解得: } m = -\frac{2}{3},$$

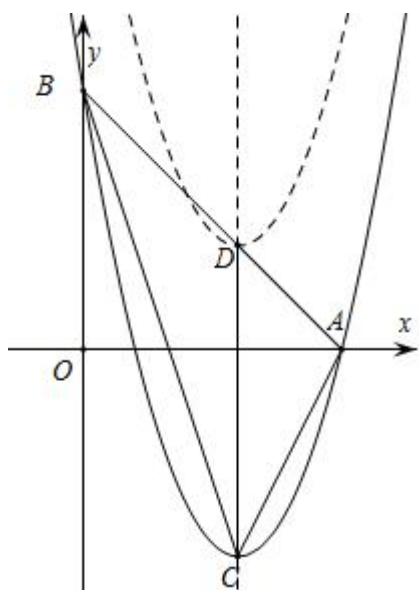
$$\therefore D(3, m),$$

$$\therefore \text{平移后的新抛物线的表达式为: } y = (x-3)^2 - \frac{2}{3} = x^2 - 6x + \frac{25}{3},$$

②若 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$,

则 $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$, 即 $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+4}} = \frac{2\sqrt{5}}{m+4} = \frac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}$, 无解,

③若 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, 如图所示:



$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{CD}$, 即 $\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{m^2+4}} = \frac{3\sqrt{10}}{m+4}$,

解得 $m = 2$,

$\therefore D(3, 2)$,

$\therefore$ 平移后的新抛物线的表达式 $y = (x-3)^2 + 2 = x^2 - 6x + 11$;

综上所述, $\triangle DCA$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 平移后的新抛物线的表达式为 $y = x^2 - 6x + \frac{25}{3}$ 或 $y = x^2 - 6x + 11$.

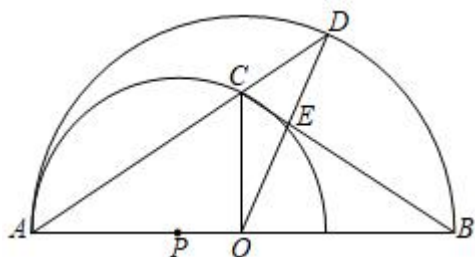
【点睛】本题考查二次函数、三角函数及相似三角形的综合知识, 解题的关键是求出平移后抛物线的顶点坐标.

25. 如图, 已知半圆 O 的直径 $AB = 4$, 点 P 在线段 OA 上, 半圆 P 与半圆 O 相切于点 A , 点 C 在半圆 P 上, $CO \perp AB$, AC 的延长线与半圆 O 相交于点 D , OD 与 BC 相交于点 E .

(1) 求证: $AD \cdot AP = OD \cdot AC$;

(2) 设半圆 P 的半径为 x , 线段 CD 的长为 y , 求 y 与 x 之间的函数解析式, 并写出定义域;

(3) 当点 E 在半圆 P 上时, 求半圆 P 的半径.



【答案】(1) 见解析; (2) $y = \frac{4\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}}{x}$, x 范围是 $0 < x \leq 2$; (3) $\frac{7 - \sqrt{17}}{2}$

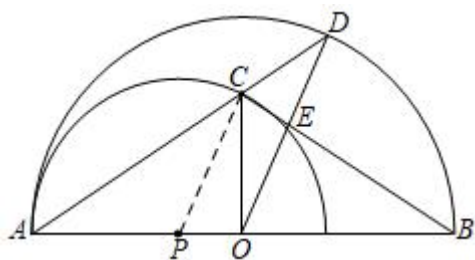
【解析】

【分析】(1) 连接 CP , 证明 $\triangle ACP \sim \triangle ADO$ 相似即可得到答案;

(2) 用 x 的代数式表示 AC , 再利用平行线分线段成比例即可得到答案;

(3) 半圆 P 与 AB 交于 G , 连接 EG , 过 E 作 $EH \perp AB$ 于 H , 利用 x 的代数式表示 EG 和 BG 再列方程可得答案.

【详解】解: (1) 连接 CP , 如图:



$$\because AP = CP, AO = DO,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACP = \angle ADO,$$

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle ADO,$$

$$\therefore \frac{CP}{OD} = \frac{AC}{AD},$$

$$\therefore AD \cdot CP = OD \cdot AC,$$

$$\therefore AD \cdot AP = OD \cdot AC;$$

$$(2) \because \text{半圆 } O \text{ 的直径 } AB = 4,$$

$$\therefore AO = 2,$$

$$\because \text{半圆 } P \text{ 的半径为 } x,$$

$$\therefore OP = 2 - x,$$

$$\because CO \perp AB,$$

$$\therefore \angle COP = 90^\circ,$$

$$\therefore CO^2 = CP^2 - OP^2 = x^2 - (2 - x)^2 = 4x - 4,$$

$$\text{Rt}\triangle AOC \text{ 中, } AC = \sqrt{CO^2 + AO^2} = 2\sqrt{x},$$

$$\because \angle A = \angle ACP = \angle ADO,$$

$$\therefore CP \parallel DO,$$

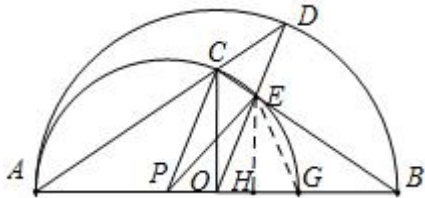
$$\therefore \frac{AC}{CD} = \frac{AP}{OP},$$

又线段 CD 的长为 y ,

$$\therefore \frac{2\sqrt{x}}{y} = \frac{x}{2-x},$$

变形得: $y = \frac{4\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}}{x}$, x 范围是 $0 < x \leq 2$;

(3) 设半圆 P 与 AB 交于 G , 连接 EG , 过 E 作 $EH \perp AB$ 于 H , 如图:



设半圆 P 的半径为 x , 由 (2) 知 $AC = 2\sqrt{x}$,

$$\therefore CO \perp AB,$$

$$\therefore BC = AC = 2\sqrt{x},$$

$$\therefore CP \parallel DO,$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{OB}{PB},$$

而 $OB = 2$, $PB = 4 - x$,

$$\therefore \frac{BE}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{4-x},$$

$$\therefore BE = \frac{4\sqrt{x}}{4-x},$$

$\therefore$ 点 E 在半圆 P 上,

$$\therefore \angle EGB = \angle ACB,$$

且 $\angle B = \angle B$,

$$\therefore \triangle CAB \sim \triangle GEB,$$

$$\therefore \frac{EG}{AC} = \frac{BE}{AB} = \frac{BG}{BC},$$

$$\therefore \frac{EG}{2\sqrt{x}} = \frac{\frac{4\sqrt{x}}{4-x}}{4},$$

$$\therefore EG = \frac{2x}{4-x},$$

$$\therefore AC = BC,$$

$$\therefore EG = BG,$$

$$\text{而 } BG = AB - AG = 4 - 2x,$$

$$\therefore \frac{2x}{4-x} = 4 - 2x,$$

$$\text{解得 } x = \frac{7-\sqrt{17}}{2} \text{ 或 } x = \frac{7+\sqrt{17}}{2} \text{ (大于 2, 舍去),}$$

$$\therefore \text{半圆 } P \text{ 的半径为 } x = \frac{7-\sqrt{17}}{2}.$$

【点睛】 本题考查圆、相似三角形及勾股定理等综合知识，难度较大，解题的关键是利用相似三角形性质表达相关线段的长度再列方程.