

2021 年上海市青浦区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1. 下列二次根式中，与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{4}$ B. $\sqrt{8}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{20}$

【答案】B

【解析】

【分析】将各个二次根式化简，再看被开方数即可得出答案.

【详解】解：因为 $\sqrt{4} = 2$ ， $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ， $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ， $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ，

所以 $\sqrt{8}$ 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式，

故选：B.

【点睛】本题考查了同类二次根式、二次根式的化简，熟记同类二次根式的定义是解题关键.

2. 如果 $a > b$ ， m 为非零实数，那么下列结论一定成立的是（ ）

- A. $a + m < b + m$ B. $m - a < m - b$ C. $am > bm$ D. $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据不等式的基本性质解答即可.

【详解】解：A、如果 $a > b$ ， m 为非零实数，则 $a + m > b + m$ ，故 A 不符合题意；

B、如果 $a > b$ ， m 为非零实数，则 $m - a < m - b$ ，故 B 符合题意；

C、如果 $a > b$ ， m 为非零实数，则 $am > bm$ 不一定成立，只有 $m > 0$ 时才成立，故 C 不符合题意；

D、如果 $a > b$ ， m 为非零实数，则 $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$ 不一定成立，只有 $m > 0$ 时才成立，故 D 不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查不等式的基本性质，熟练掌握不等式的基本性质是解答的关键，注意不等号的变化.

3. 下列对反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象的描述，正确的是（ ）

- A. 与坐标轴有交点 B. 有两支，分别在第二、四象限
C. 经过点 (1, 3) D. 函数值 y 随 x 的值增大而减小

【答案】C

【解析】

【分析】根据反比例函数的性质判断即可.

【详解】解: A 、反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象与坐标轴无交点, 故 A 错误;

B 、 $\because k = 3 > 0$,

$\therefore$ 双曲线的两个分支, 分别在第一、三象限, 故 B 错误;

C 、 $\because 1 \times 3 = 3 = k$,

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象经过点 $(1, 3)$, 故 C 正确;

D 、 $\because k > 0$,

$\therefore$ 函数值 y 在每个象限内随 x 的值增大而减小, 故 D 错误,

故选: C .

【点睛】本体法考查反比例函数的图像及性质, 熟知反比例函数的图像性质是关键

4. 某校为了解学生在“慈善募捐”活动中的捐款情况, 进行了抽样调查, 结果如表所示.

捐款金额 (元)	5	10	20	50	100	200
人数	8	10	12	13	5	2

那么该样本中学生捐款金额的中位数和众数分别是 ()

A. 20 元, 50 元

B. 35 元, 50 元

C. 50 元, 50 元

D. 20 元, 20 元

【答案】A

【解析】

【分析】

根据中位数和众数的定义求解即可.

【详解】解: $\because$ 本组数据从小到大排列共 50 个, 且最中间的两个数据是 20 和 20,

$\therefore$ 这组数据的中位数为: $\frac{20+20}{2} = 20$;

$\because$ 捐款 50 元的人数最多,

$\therefore$ 这组数据的众数是 50.

故选: A

【点睛】本题考查中位数和众数的知识点, 充分利用中位数和众数的定义是解题的关键.

5. 如果一个正多边形的每一个外角都是 45° , 那么这个正多边形的内角和为 ()

A. 360°

B. 720°

C. 1080°

D. 1440°

【答案】C

【解析】

【分析】多边形的外角和是 360° 度，即可得到外角的个数，即多边形的边数．根据多边形的内角和定理即可求解．

【详解】解：多边形的边数是： $360 \div 45 = 8$ ．

则内角和是： $(8 - 2) \times 180^{\circ} = 1080^{\circ}$ ．

故选：C．

【点睛】本题考查正多边形的外角和、内角和，熟知公式是关键，利用外角和解决正多边形边数问题是常用思路

6. 下列命题中，真命题是（ ）

A. 一组对边平行，且另一组对边相等的四边形是平行四边形

B. 一组对边平行，且对角线相等的四边形是等腰梯形

C. 一组对边平行，且一组邻边互相垂直的四边形是矩形

D. 一组对边平行，且对角线平分一组对角的四边形是菱形

【答案】D

【解析】

【分析】通过已知条件推导出对应图形以及根据平行四边形、等腰梯形、矩形和菱形的判定定理判断即可．

【详解】解：A、一组对边平行，且另一组对边相等的四边形是平行四边形或等腰梯形，故本选项说法是假命题；

B、一组对边平行，且对角线相等的四边形是等腰梯形，本选项说法是假命题；

C、一组对边平行，且一组邻边互相垂直的四边形是矩形或直角梯形，故本选项说法是假命题；

D、一组对边平行，且对角线平分一组对角的四边形是菱形，故本选项说法是真命题；

故选：D．

【点睛】本题考查了真命题的定义、平行四边形的判定、等腰梯形的判定、矩形的判定和菱形的判定等知识，要求学生能根据已知条件推导出其对应的图形，考查了学生对相关概念的理解与应用，该题对学生的推理分析能力有较高要求．

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7. 计算: $(-3a^3)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $9a^6$

【解析】

【分析】 根据积的乘方等于每一个因式分别乘方, 再把所得的幂相乘, 可得答案.

【详解】 解: 原式 $= (-3)^2 a^{3 \times 2}$
 $= 9a^6$

故答案为: $9a^6$.

【点睛】 本题考查积的乘方、幂的乘方的法则, 熟练并正确使用法则是关键

8. 在实数范围内分解因式: $y^2 - 4x^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(y + 2x)(y - 2x)$

【解析】

【分析】 利用平方差公式可以进行因式分解得出结论.

【详解】 解: $y^2 - 4x^2 = (y + 2x)(y - 2x)$.

故答案为: $(y + 2x)(y - 2x)$.

【点睛】 本题考查因式分解、平方差公式, 会利用平方差公式可以进行因式分解是解答的关键.

9. 方程 $\sqrt{2x+1} = 3$ 的解是_____.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】 把两边平方, 化为整式方程求解, 然后检验即可.

【详解】 $\because \sqrt{2x+1} = 3$,

$$\therefore 2x+1=9,$$

$$\therefore 2x=8,$$

$$\therefore x=4,$$

经检验 $x=4$ 是原方程的解.

故答案为: $x=4$.

【点睛】 本题考查了无理方程的解法, 解含未知数的二次根式只有一个的无理方程时, 一般步骤是: ①移项, 使方程左边只保留含有根号的二次根式, 其余各项均移到方程的右边; ②两边同时平方, 得到一个整式方程; ③解整式方程; ④验根.

10. 如果关于 x 的方程 $x^2+3x-k=0$ 有两个不相等的实数根, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k > -\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】由“有两个不相等的实数根”可知本题考查的是一元二次方程的判别式，利用判别式 $\Delta > 0$ 时，一元二次方程有两个不相等的实数根解答即可

【详解】根据题意得 $\Delta = 3^2 - 4(-k) > 0$,

解得 $k > -\frac{9}{4}$.

故答案为 $k > -\frac{9}{4}$.

【点睛】本题的关键是熟知判别式 Δ 与一元二次方程根的关系

11. 从 $\frac{1}{3}$, 3.101001, π , $\sqrt{5}$ 这四个数中任选一个数，选出的这个数是无理数的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】用无理数的个数除以数的总个数即可求解.

【详解】解：在所列4个实数中，无理数有 π , $\sqrt{5}$ 共2个，

$\therefore$ 这四个数中任选一个数，选出的这个数是无理数的概率是 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

故答案为： $\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查无理数的概念、简单的概率计算，会利用概率公式 $P = \frac{m}{n}$ 计算概率是解答的关键.

12. 如果将抛物线 $y = -x^2$ 向下平移，使其经过点 $(0, -2)$ ，那么所得新抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = -x^2 - 2$

【解析】

【分析】设平移后的抛物线解析式为 $y = -x^2 - b$ ，把点 $(0, -2)$ 代入进行求值，即可得到 b 的值，即得出平移后的抛物线解析式.

【详解】解：设平移后的抛物线解析式为 $y = -x^2 - b$,

把点 $(0, -2)$ 代入，得 $0 - b = -2$,

解得 $b = 2$,

则平移后的函数解析式为 $y = -x^2 - 2$.

故答案为： $y = -x^2 - 2$.

【点睛】 本题主要考查了函数图象的平移. 熟练掌握平移的规律: 左加右减, 上加下减. 并会用规律求函数解析式是解答本题的关键.

13. 为了解某区 2400 名初中教师中接种新冠疫苗的教师人数, 随机调查了其中 200 名教师, 结果有 150 人接种了疫苗, 那么估计该区接种新冠疫苗的初中教师人数约有_____人.

【答案】 1800

【解析】

【分析】 用总人数乘以样本中接种疫苗的人数所占比例即可.

【详解】 解: 估计该区接种新冠疫苗的初中教师人数约有 $2400 \times \frac{150}{200} = 1800$ (人),

故答案为: 1800.

【点睛】 本题考查用样本估计总体. 理解用样本估计总体的含义和掌握其公式是解答本题的关键.

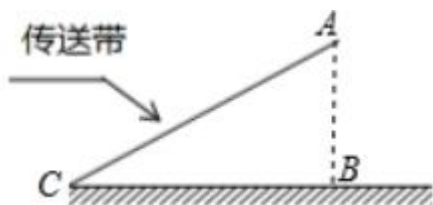
14. 某传送带与地面所成斜坡的坡度 $i = 1 : 2.4$, 如果它把物体从地面送到离地面 6 米高的地方, 那么物体所经过的路程为_____米.

【答案】 15.6

【解析】

【分析】 根据坡度的概念求出 BC , 根据勾股定理计算, 得到答案.

【详解】 解: 如图, 过 A 作 $AB \perp CB$ 于 B ,



由题意得, $AB = 6$ 米,

$\therefore$ 斜坡的坡度 $i = 1 : 2.4$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2.4},$$

$$\text{即 } \frac{6}{BC} = \frac{1}{2.4},$$

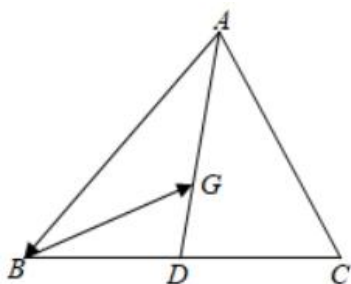
解得: $BC = 14.4$ (米),

由勾股定理得, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 14.4^2} = 15.6$ (米),

故答案为: 15.6.

【点睛】 本题考查了解直角三角形，坡比的计算，勾股定理，根据坡度熟练把问题转化为解直角三角形模型问题求解是解题的关键.

15. 如图，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BG} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{DC}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为 _____.



【答案】 $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】 利用三角形法则求出 $\overrightarrow{AG}$ ，再利用重心的性质求出 $\overrightarrow{GD}$ ，利用三角形法则求出 $\overrightarrow{BD}$ ，再由 $DC = BD$ 可得结论.

【详解】 解： $\because \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b},$$

$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore GD = \frac{1}{2} AG,$$

$$\therefore \overrightarrow{GD} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b},$$

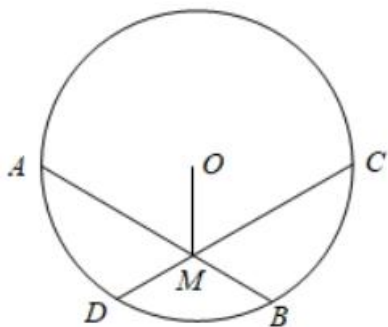
$\because DC = BD$,

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$.

【点睛】 本题考查平面向量的线性运算、三角形法则、三角形的重心，熟练掌握相关基本知识是解答的关键.

16. 如图，在半径为 2 的 $\odot O$ 中，弦 AB 与弦 CD 相交于点 M ，如果 $AB = CD = 2\sqrt{3}$ ， $\angle AMC = 120^\circ$ ，那么 OM 的长为_____.



【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】根据圆心角、弦、弧、弦心距之间的关系以及勾股定理可求出 OE 、 OF ，再利用全等三角形可求出 $\angle OME = 60^\circ$ ，进而利用直角三角形的边角关系求解即可.

【详解】解：如图，过点 O 作 $OE \perp AB$ ， $OF \perp CD$ ，垂足为 E 、 F ，连接 OA ，

则 $AE = BE = \frac{1}{2} AB = \sqrt{3}$ ， $CF = DF = \frac{1}{2} CD = \sqrt{3}$ ，

在 $Rt\triangle AOE$ 中，

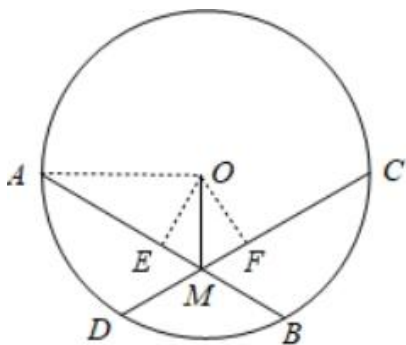
$$\because OA = 2, AE = \sqrt{3},$$

$$\therefore OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = 1,$$

$$\because AB = CD,$$

$$\therefore OE = OF = 1,$$

又 $\because OM = OM$,



$$\therefore Rt\triangle OEM \cong Rt\triangle OFM \quad (HL),$$

$$\therefore \angle OME = \angle OMF = \frac{1}{2} \angle AMC = 60^\circ,$$

$$\therefore OM = \frac{OE}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】 本题考查了垂径定理, 勾股定理, 三角形的全等, 特殊角的函数值, 垂径定理是解题的关键, 特殊角的函数值是解题的基础.

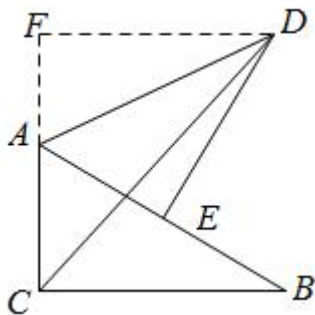
17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, 将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 旋转, 点 C 恰好落在 AB 的中点上, 设点 B 旋转后的对应点为点 D , 则 CD 的长为_____.

【答案】 $3\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 根据题意画出图, 由 $\angle C = 90^\circ$ 和 C 恰好落在 AB 的中点, 故有 $CE = AE = EB$, 根据旋转的性质可得 AD 的长, 再利用勾股定理即可求解.

【详解】 解: 如图: 过点 D 作 $DF \perp AC$ 于 F , 交 CA 的延长线于 F .



由旋转可得 $AC = AE$,

$\therefore AC = 3$, E 是 AB 的中点,

$\therefore AE = BE = AC = 3$, 即 $AB = AD = 6$.

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAB = \angle DAE = 60^\circ$,

$\therefore \angle FAD = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

在 $Rt\triangle FAD$ 中, $AF = \frac{1}{2}AD = 3$, $DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$,

$\therefore FC = 3 + 3 = 6$,

在 $Rt\triangle FCD$ 中, $DC = \sqrt{FC^2 + DF^2} = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{7}$.

故答案为: $3\sqrt{7}$.

【点睛】 本题考查旋转的性质, 三角形内角和定理以及勾股定理. 根据题意画出图形并作出辅助线是解答本题的关键.

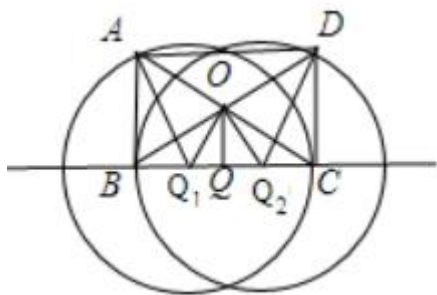
18. 在矩形 $ABCD$ 中, AC 、 BD 相交于点 O , $AB = 4\text{cm}$, $AD = 8\text{cm}$. Q 为直线 BC 上一动点, 如果以 5cm 为半径的 $\odot Q$ 与矩形 $ABCD$ 的各边有 4 个公共点, 那么线段 OQ 长的取值范围是_____.

【答案】 $2 \leq OQ < \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据题意, 画出对应的图形, 当 Q 在 Q_1Q_2 上移动时 $\odot Q$ 与 AB 有一个交点, 与 AD 有 2 个交点, 与 CD 有 1 个交点, 根据勾股定理得到 AQ_1 的长, 当 $OQ \perp BC$ 时, OQ 取最小值, 当 Q 在 Q_1 或 Q_2 时, OQ 取最大值, 由此可得答案.

【详解】 解: 临界情况, 如图所示, $\odot Q_1$ 与 CD 切于点 C , $\odot Q_2$ 与 AB 切于点 B ,



当 Q 在 Q_1Q_2 上移动时 $\odot Q$ 与 AB 有一个交点, 与 AD 有 2 个交点, 与 CD 有 1 个交点,

$$\therefore CQ_1 = 5, BQ_1 = BC - CQ_1 = 3, AB = 4,$$

$$\therefore AQ_1 = \sqrt{AB^2 + BQ_1^2} = 5, \text{ 即 } A \text{ 在 } \odot Q_1 \text{ 上,}$$

同理, D 在 Q_2 上,

临界条件下, 圆与矩形存在三个交点,

$$\text{当 } OQ \perp BC \text{ 时, } OQ \text{ 取最小值, } OQ = 2\frac{1}{2},$$

当 Q 在 Q_1 或 Q_2 时, OQ 取最大值,

$$OQ_1 = OQ_2 = \sqrt{\left(\frac{8}{2} - 3\right)^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore 2 \leq OQ < \sqrt{5}.$$

故答案为: $2 \leq OQ < \sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了点与圆的位置关系, 勾股定理, 矩形的性质, 线段的最值, 熟练掌握最值的临界情形是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分) [将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上]

19. 计算: $27^{\frac{2}{3}} + |\sqrt{3} - 2| + \frac{1}{2 - \sqrt{5}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

【答案】 $-\sqrt{3} - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】直接利用负整数指数幂的性质以及分数指数幂的性质和绝对值的性质、二次根式的性质化简得出答案.

【详解】解: 原式 $= \sqrt[3]{27^2} + 2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{5} - 9$

$= 9 + 2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{5} - 9$

$= -\sqrt{3} - \sqrt{5}.$

【点睛】本题考查了绝对值, 二次根式的分母有理化, 负整数指数幂, 分数指数幂, 熟练掌握各自的运算法则是解题的关键.

20. 解方程组: $\begin{cases} 3x + y = 19 \text{ ①} \\ x^2 - 5xy - 6y^2 = 0 \text{ ②} \end{cases}$.

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 6 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{19}{2} \\ y_2 = -\frac{19}{2} \end{cases}$

【解析】

【分析】分解②得两个二元一次方程, 与①组成新的方程组, 求解即可.

【详解】由②, 得 $(x - 6y)(x + y) = 0$,

所以 $x - 6y = 0$ ③, $x + y = 0$ ④.

由①③、①④组成新的方程组, 得

$\begin{cases} 3x + y = 19 \\ x - 6y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3x + y = 19 \\ x + y = 0 \end{cases}$.

解这两个方程组, 得 $\begin{cases} x_1 = 6 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{19}{2} \\ y_2 = -\frac{19}{2} \end{cases}$.

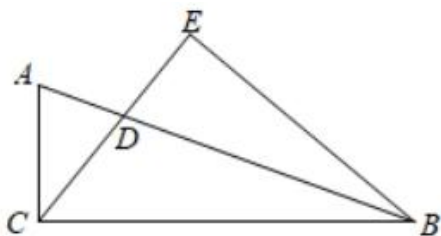
所以原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 6 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{19}{2} \\ y_2 = -\frac{19}{2} \end{cases}$.

【点睛】 本题考查了由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的二元二次方程组的解法. 此类方程组的常规解法是把二元一次方程变形, 用一个未知数的代数式表示另一个未知数, 然后代入二元二次方程中, 消去一个未知数, 变为一元二次方程并解之.

21. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$, $\sin \angle ABC = \frac{1}{3}$, D 是边 AB 上一点, 且 $CD = CA$, $BE \perp CD$, 垂足为点 E .

(1) 求 AD 的长;

(2) 求 $\angle EBC$ 的正切值.



【答案】 (1) 2; (2) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

【解析】

【分析】 (1) 过 C 点作 $CH \perp AD$ 于 H , 如图, 利用等腰三角形的性质得到 $AH = DH$, 再证明 $\angle ACH = \angle ABC$, 求出 $\sin \angle ACH = \sin \angle ABC$, 然后利用正弦的定义求出 AH , 从而得到 AD 的长;

(2) 在 $Rt\triangle ABC$ 中先求出 $AB = 9$, 则 $BD = 7$, 再证明 $\angle HCD = \angle EBD$, 求出 $\sin \angle EBD = \frac{DE}{BD}$, 利用正弦的定义求出 DE , 接着利用勾股定理计算出 BE , 然后根据正切的定义求解.

【详解】 解: (1) 过 C 点作 $CH \perp AD$ 于 H , 如图,

$$\because CD = CA,$$

$$\therefore AH = DH,$$

$$\because \angle ABC + \angle BCH = 90^\circ, \quad \angle ACH + \angle BCH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACH = \angle ABC,$$

$$\therefore \sin \angle ACH = \sin \angle ABC = \frac{1}{3},$$

$$\text{在 } Rt\triangle ACH \text{ 中, } \sin \angle ACH = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AD = 2AH = 2;$$

$$(2) \text{ 在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } \sin \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AB = 3AC = 9,$$

$$\therefore BD = AB - AD = 9 - 2 = 7,$$

$$\because \angle E = 90^\circ,$$

$$\text{而 } \angle EDB = \angle HDC,$$

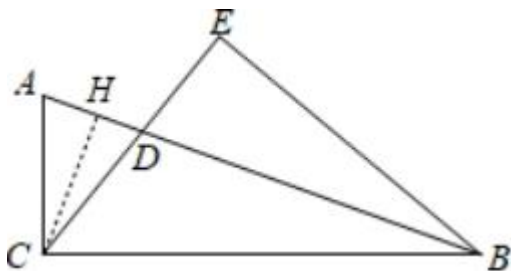
$$\therefore \angle HCD = \angle EBD,$$

$$\therefore \sin \angle EBD = \frac{DE}{BD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DE = \frac{1}{3}BD = \frac{7}{3},$$

$$\therefore BE = \sqrt{7^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{14\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{在 } Rt\triangle EBC \text{ 中, } \tan \angle EBC = \frac{EC}{EB} = \frac{CD + DE}{EB} = \frac{3 + \frac{7}{3}}{\frac{14\sqrt{2}}{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

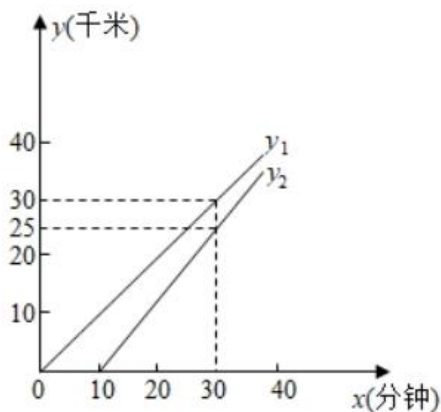


【点睛】本题考查了解直角三角形，勾股定理，等腰三角形的性质，熟练掌握解直角三角形的基本步骤是解题的关键.

22. 某校九年级学生从学校乘车前往郊野公园春游，1号车于上午8点出发，2号车晚10分钟出发，设1号车的行驶时间为 x 分钟，行驶的路程为 y_1 千米，2号车的行驶路程为 y_2 千米， y_1 、 y_2 关于 x 的部分函数图象如图所示.

(1) 求 y_2 关于 x 的函数解析式;

(2) 如果2号车与1号车同时到达郊野公园的停车场，求汽车从学校到郊野公园停车场行驶的路程



【答案】(1) $y_2 = 1.25x - 12.5$; (2) 50 千米

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解即可；

(2) 求出 1 号车的速度，再结合 (1) 的结论列方程解答即可.

【详解】解：(1) 设 y_2 关于 x 的函数解析式为 $y_2 = kx + b$,

根据题意，得：
$$\begin{cases} 10k + b = 0 \\ 30k + b = 25 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} k = 1.25 \\ b = -12.5 \end{cases}$$

$\therefore y_2 = 1.25x - 12.5$;

(2) 1 号车的速度为： $30 \div 30 = 1$ 千米/分钟，

设 1 号车出发 x 分钟后到达郊野公园，则：

$x = 1.25x - 12.5$,

解得 $x = 50$,

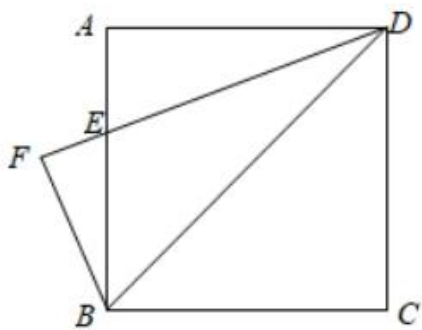
故汽车从学校到郊野公园停车场行驶的路程为： $50 \times 1 = 50$ (千米).

【点睛】 本题考查一次函数与正比例函数的实际应用. 根据图象利用待定系数法求出解析式是解答本题的关键.

23. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，联结 BD ， E 是边 AB 上一点， $BF \perp DE$ ，垂足为点 F ，且 $EF \cdot BD = BE \cdot BF$.

(1) 求证： $\angle ADE = \angle BDE$;

(2) 延长 DF 与 CB 的延长线交于点 G ，求证： $BG = BC + AE$.



【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 先根据三角函数定义得出 $\sin \angle EBF = \frac{EF}{BE}$ ， $\sin \angle BDE = \frac{BF}{BD}$ ，再由 $EF \cdot BD = BE \cdot BF$ ，可得 $\frac{EF}{BE} = \frac{BF}{BD}$ ，即可得 $\angle EBF = \angle BDE$ ，再根据正方形性质即可证明结论；

(2) 延长 BF 交 DA 的延长线于 H ，先证明 $\triangle DFH \cong \triangle DFB$ ，再结合正方形性质证明 $\triangle GBF \cong \triangle DHF$ ，可得 $BG = DH = AD + AH = BC + AH$ ，再证明 $\triangle DAE \cong \triangle BAH$ ，可得 $AH = AE$ ，结论得证.

【详解】(1) $\because BF \perp DE$,

$$\therefore \angle BFD = 90^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BEF \text{ 中, } \sin \angle EBF = \frac{EF}{BE},$$

$$\text{在 } Rt\triangle DBF \text{ 中, } \sin \angle BDE = \frac{BF}{BD},$$

$$\therefore EF \cdot BD = BE \cdot BF,$$

$$\therefore \frac{EF}{BE} = \frac{BF}{BD},$$

$$\therefore \sin \angle EBF = \sin \angle BDE,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle BDE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$$\therefore \angle DAE = 90^\circ = \angle BFD,$$

$$\therefore \angle EBF + \angle BEF = \angle ADE + \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle AED,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BDE;$$

(2) 如图，延长 BF 交 DA 的延长线于 H ,

$$\therefore \angle ADE = \angle BDE, \angle DFH = \angle DFB = 90^\circ, DF = DF,$$

$$\therefore \triangle DFH \cong \triangle DFB \text{ (ASA)},$$

$$\therefore HF = BF,$$

∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

∴ $AD \parallel BC$, $AD = AB = BC$,

∴ $\angle G = \angle ADE$, $\angle GBF = \angle H$,

在 $\triangle GBF$ 和 $\triangle DHF$ 中,

$$\begin{cases} \angle G = \angle ADE \\ \angle GBF = \angle H, \\ HF = BF \end{cases}$$

∴ $\triangle GBF \cong \triangle DHF$ (AAS),

∴ $BG = DH = AD + AH = BC + AH$,

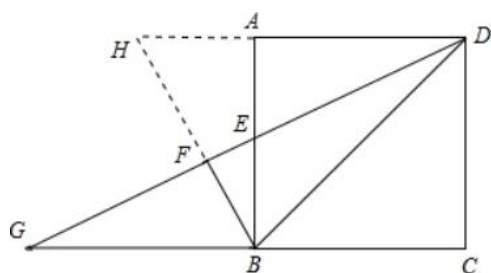
在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle BAH$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAB = \angle HAB = 90^\circ \\ AD = AB \\ \angle ADE = \angle ABF \end{cases},$$

∴ $\triangle DAE \cong \triangle BAH$ (ASA),

∴ $AH = AE$,

∴ $BG = BC + AE$.



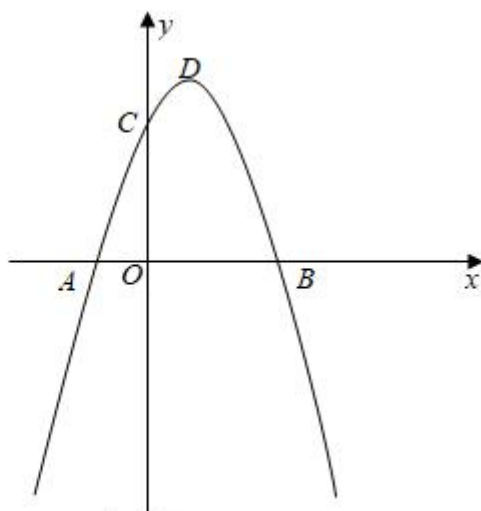
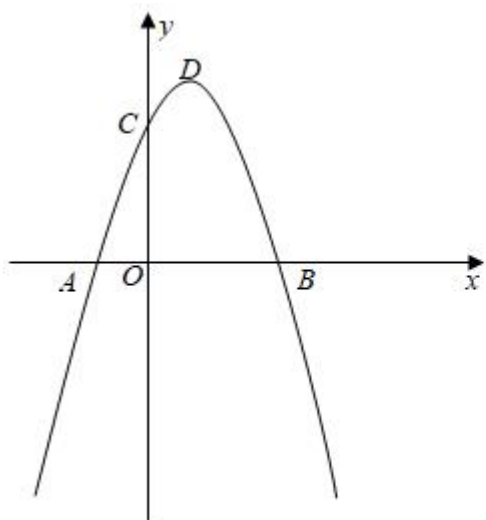
【点睛】 本题考查了全等三角形的判定和性质、正方形的性质、三角函数的定义，关键是添加辅助线构造全等三角形.

24. 已知：如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 C ，对称轴是直线 $x = 1$ ，顶点是点 D .

(1) 求该抛物线的解析式和顶点 D 的坐标；

(2) 点 P 为该抛物线第三象限上的一点，当四边形 $PBDC$ 为梯形时，求点 P 的坐标；

(3) 在 (2) 的条件下，点 E 为 x 轴正半轴上的一点，当 $\tan(\angle PBO + \angle PEO) = \frac{5}{2}$ 时，求 OE 的长.



备用图

【答案】 (1) $y = -(x-1)^2 + 4$, (1, 4); (2) (-2, -5); (3) $\frac{29}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 把 $A(-1, 0)$ 代入抛物线的解析式, 再由对称轴 $x = -\frac{b}{2a} = 1$, 列方程组求出 a 、 b 的值;

(2) 四边形 $PBDC$ 为梯形时, 则 $PB \parallel CD$; 先求 CD 所在直线的解析式, 再根据两个一次函数一般式中的 k 值相等求直线 PB 的解析式且与抛物线的解析式组成方程, 解方程组求出点 P 的坐标;

(3) 过点 P 作 x 轴的垂线, 构造以 P 为顶点且一个锐角的正切值为 $\frac{5}{2}$ 的直角三角形, 再利用相似三角形的性质求 OE 的长.

【详解】 解: (1) 根据题意, 得
$$\begin{cases} a - b + 3 = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$;

$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$,

$\therefore$ 该抛物线的顶点 D 的坐标为 (1, 4).

(2) 如图 1,

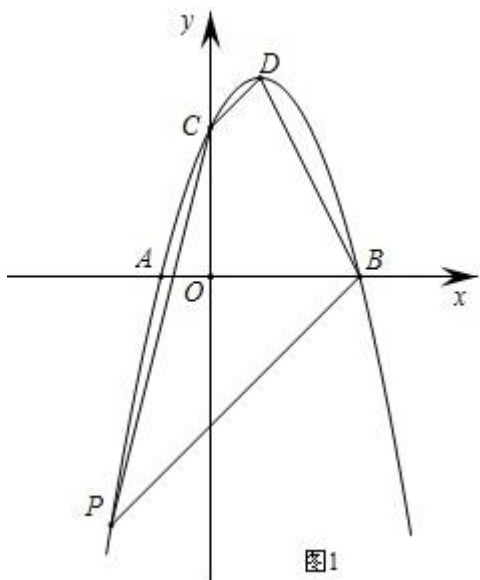


图1

由 $y = -x^2 + 2x + 3$, 得 $C(0, 3)$, $B(3, 0)$.

设直线 CD 的解析式为 $y = kx + 3$, 则 $k + 3 = 4$, 解得 $k = 1$,

$$\therefore y = x + 3;$$

当四边形 $PBDC$ 是梯形时, 则 $PB \parallel CD$,

设直线 PB 的解析式为 $y = x + m$, 则 $3 + m = 0$, 解得 $m = -3$,

$$\therefore y = x - 3.$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -5 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 0 \end{cases},$$

$$\therefore P(-2, -5).$$

(3) 如图 2,

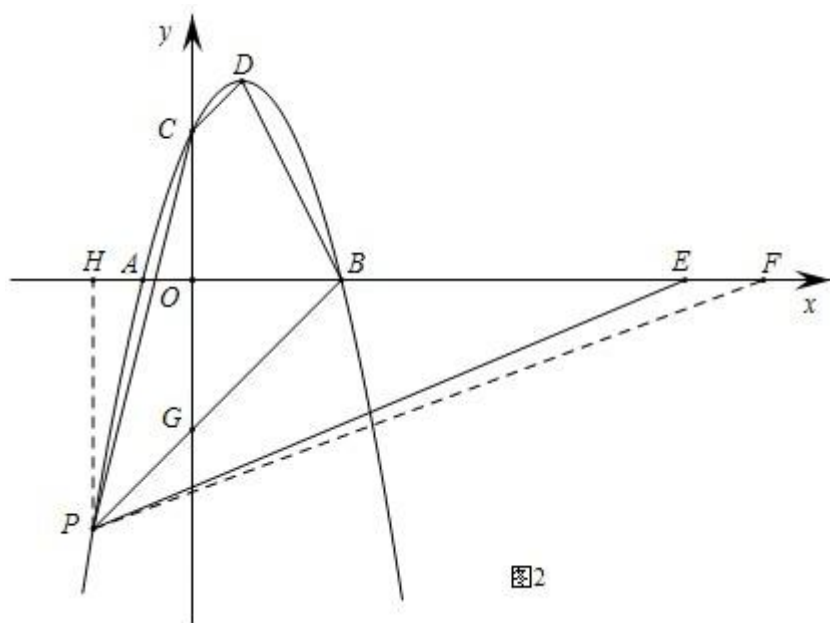


图2

作 $PH \perp x$ 轴于点 H , 在 x 轴正半轴上取一点 F , 使 $\frac{HF}{PH} = \tan \angle HPF = \frac{5}{2}$, 连接 PF .

由 (2) 得, 直线 PB 的解析式为 $y = x - 3$, 则 $G(0, -3)$,

$$\therefore OB = OG = 3.$$

$$\therefore PH \parallel OG,$$

$$\therefore \angle BPH = \angle BGO = \angle PBO = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HPF = 45^\circ + \angle FPB;$$

$$\therefore \tan(\angle PBO + \angle PEO) = \frac{5}{2},$$

$$\therefore 45^\circ + \angle PEO = 45^\circ + \angle FPB,$$

$$\therefore \angle PEO = \angle FPB,$$

又 $\therefore \angle PBE = \angle FBP$ (公共角),

$$\therefore \triangle PBE \sim \triangle FBP,$$

$$\therefore \frac{PB}{FB} = \frac{BE}{PB}, \quad BE \cdot BF = PB^2,$$

$$\therefore HF = \frac{5}{2} PH = \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{2},$$

$$\therefore BF = \frac{25}{2} - 2 - 3 = \frac{15}{2},$$

$$\text{又} \therefore PH = BH = 5,$$

$$\therefore PB^2 = 5^2 + 5^2 = 50,$$

$$\therefore \frac{15}{2} BE = 50,$$

$$\text{解得 } BE = \frac{20}{3},$$

$$\therefore OE = 3 + \frac{20}{3} = \frac{29}{3}.$$

【点睛】 本题考查二次函数解析式、一次函数、锐角三角函数、相似三角形的判定. 利用同角锐角三角函数转换角的关系是解题的关键.

25. 已知: 在半径为 2 的扇形 AOB 中, $\angle AOB = m^\circ$ ($0 < m \leq 180$), 点 C 是 $\widehat{AB}$ 上的一个动点, 直线 AC 与直线 OB 相交于点 D .

(1) 如图 1, 当 $0 < m < 90$, $\triangle BCD$ 是等腰三角形时, 求 $\angle D$ 的大小 (用含 m 的代数式表示);

(2) 如图 2, 当 $m = 90$ 点 C 是 $\widehat{AB}$ 的中点时, 联结 AB , 求 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值;

(3) 将 $\widehat{AC}$ 沿 AC 所在的直线折叠, 当折叠后的圆弧与 OB 所在的直线相切于点 E , 且 $OE = 1$ 时, 求线段 AD 的长.

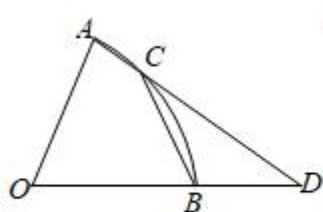


图1

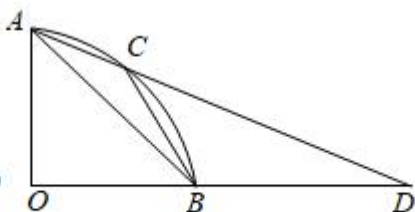
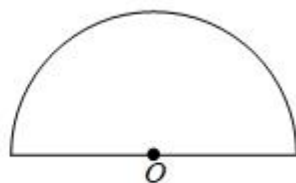


图2



备用图

【答案】(1) $\frac{m^\circ}{2}$; (2) $6 + 4\sqrt{2}$; (3) $\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{11}}{2}$

【解析】

【分析】(1) C 在 AB 弧线上, 所以 $\angle OBC$ 为锐角, $\angle CBD$ 为钝角, 则 $\triangle BCD$ 是等腰三角形, 仅有 $BC = BD$ 这一种情况, 扇形 AOB 中, $OA = OC = OB$, $BC = BD$, 由边相等得对应角相等, 三角形内角和为 180° , 可得 $\angle D = \frac{m^\circ}{2}$;

(2) 过 D 作 $DM \perp AB$ 的延长线于 M , 连接 OC , C 为 AB 中点, 可知 $AC = BC$, $\angle AOC = \angle COB = 45^\circ$, $AO = CO = BO$, 边相等得对应角相等, 即可求得 $\angle ACB = 135^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$, $\angle CBO$ 为 $\triangle BCD$ 的外角, 可得 $\angle ABD = \angle D$, $\angle CAB = \angle CBA$, 由角相等可推出 $AB = BD$, 在 $Rt\triangle AOB$ 中, 由勾股定理知 $BM = 2$, 在等腰直角 $\triangle AOB$ 中 $AN = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$, 由 $CN \perp AB$, $DM \perp AB'$, 得出 $\triangle ANC \sim \triangle AMD$, 面积比等于相似比的平方可得结果;

(3) E 为弧 AEC 与 OB 切点, 知 A, E, C 在半径为 2 的另一个圆上, 在 $Rt\triangle O'E O$ 中, 由勾股定理知 $OO' = \sqrt{5}$, 得四边形 $AOCO'$ 是菱形, 由菱形对角线性质, 可以推出 $\triangle O' OE \sim \triangle DOP$, 得 $OP = \sqrt{5}$, 在 $Rt\triangle APO'$ 中, 由勾股定理得 $AP = \frac{\sqrt{11}}{2}$, 即可求出 AD 的长.

【详解】解: (1) C 在 AB 弧线上,

$\therefore \angle OBC$ 为锐角,

$\therefore \angle CBD$ 为钝角,

则 $\triangle BCD$ 是等腰三角形时, 仅有 $BC = BD$ 这一种情况,

$\therefore \angle D = \angle BCD$,

连接 OC 则 $OA = OC = OB$,

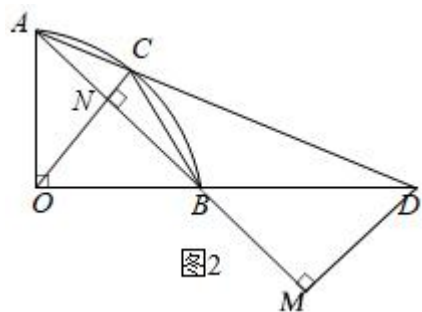
$\therefore \angle OAC = \angle OCA$, $\angle OCD = \angle OBC$,

$\therefore \angle OBC = \angle D + \angle BCD = 2\angle D$,

$$\therefore \Delta ANC \sim \Delta AMD.$$

$$\therefore \frac{CN}{DM} = \frac{AN}{AM},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AM^2}{AN^2} = 6 + 4\sqrt{2};$$



(3) 图 2 如下:

$\because E$ 为弧线 AEC 与 OB 切点,

$\therefore A、E、C$ 在半径为 2 的另一个圆上,

$\because O'E = 2, OE = 1,$

$\therefore OO' = \sqrt{5}$ (勾股定理),

又 $\because OA = OC = 2, O'A = O'C = 2,$

$\therefore$ 四边形 $AOCO'$ 是菱形,

$\therefore AC \perp OO'$ 且 $AC、OO'$ 互相平分,

且 $\angle O'OE$ 共角,

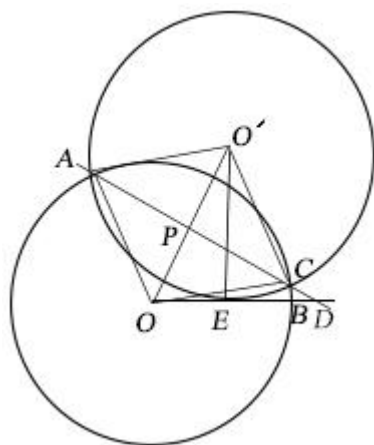
$\therefore \triangle O'OE \sim \triangle DOP,$

$$\therefore \frac{DP}{O'E} = \frac{OP}{OE} \text{ 且 } OP = \frac{1}{2} OO' = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore OP = \sqrt{5},$$

$$\therefore AP = \sqrt{4 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2} \text{ (Rt}\triangle APO' \text{ 的勾股定理)}$$

$$\therefore AD = AP + PD = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{11}}{2}.$$



【点睛】 本题考查圆的综合应用，熟练掌握等腰三角形的性质、相似三角形的判定与性质、菱形的判定和性质、勾股定理等是解题关键.