

2021 年上海市金山区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上。]

1.（4 分）下列根式中，是最简二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt[3]{3}$ D. $\sqrt[4]{2}$

【分析】直接利用最简二次根式的定义分析得出答案.

【解答】解：A、 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ，不是最简二次根式，不合题意；

B、 $\sqrt{5}$ 是最简二次根式，符合题意；

C、 $\sqrt[3]{3}$ 是三次根式，不合题意；

D、 $\sqrt[4]{2}$ 是四次根式，不合题意；

故选：B.

【点评】此题主要考查了最简二次根式，正确掌握相关定义是解题关键.

2.（4 分）已知 $x > y$ ，那么下列正确的是（ ）

- A. $x+y > 0$ B. $ax > ay$ C. $x-2 > y+2$ D. $2-x < 2-y$

【分析】各式利用不等式的性质化简，判断即可.

【解答】解： $\because x > y$,

$\therefore x-y > 0$, $ax > ay$ ($a > 0$), $x+2 > y+2$, $2-x < 2-y$.

故选：D.

【点评】此题考查了不等式的性质，熟练掌握不等式的基本性质是解本题的关键.

3.（4 分）已知正比例函数的图象经过点 $(1, -2)$ ，那么这个正比例函数的解析式是（ ）

- A. $y = -2x$ B. $y = -\frac{1}{2}x$ C. $y = 2x$ D. $y = \frac{1}{2}x$

【分析】设这个正比例函数解析式为 $y = kx$ ，利用待定系数法把 $(1, -2)$ 代入 $y = kx$ 中求出 k 即可得到解析式.

【解答】解：设这个正比例函数解析式为 $y = kx$,

$\because$ 正比例函数的图象经过点 $(1, -2)$,

$\therefore -2 = 1 \cdot k$,

解得： $k = -2$,

∴这个正比例函数的解析式为： $y = -2x$.

故选：A.

【点评】此题主要考查了待定系数法求正比例函数解析式，解题的关键是熟练掌握待定系数法求函数解析式.

4. (4分) 某人统计九年级一个班 35 人的身高时，算出平均数与中位数都是 158 厘米，但后来发现其中一位同学的身高记录错误，将 160 厘米写成了 166 厘米，经重新计算后，正确的中位数是 a 厘米，那么中位数 a 应 ()

A. 大于 158 B. 小于 158 C. 等于 158 D. 无法判断

【分析】根据中位数的定义得出最中间的数还是 158 厘米，从而选出正确答案.

【解答】解：∵原来的中位数 158 厘米，将 160 厘米写成 166 厘米，最中间的数还是 158 厘米，

∴ $a = 158$,

故选：C.

【点评】此题考查了中位数，将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（最中间两个数的平均数），叫做这组数据的中位数.

5. (4分) 已知三条线段长分别为 $2cm$ 、 $4cm$ 、 acm ，若这三条线段首尾顺次联结能围成一个三角形，那么 a 的取值可以是 ()

A. $1cm$ B. $2cm$ C. $4cm$ D. $7cm$

【分析】根据三角形的三边关系确定 a 的取值范围即可求解.

【解答】解：依题意有 $4 - 2 < a < 4 + 2$,

解得： $2 < a < 6$.

只有选项 C 在范围内.

故选：C.

【点评】本题考查了三角形的三边关系的知识，在运用三角形三边关系判定三条线段能否构成三角形时并不一定要列出三个不等式，只要两条较短的线段长度之和大于第三条线段的长度即可判定这三条线段能构成一个三角形.

6. (4分) 已知 $\odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$ 的半径分别为 2、3、4，且 $AB = 5$ ， $AC = 6$ ， $BC = 6$ ，那么这三个圆的位置关系 ()

A. $\odot A$ 与 $\odot B$ 、 $\odot C$ 外切， $\odot B$ 与 $\odot C$ 相交

B. $\odot A$ 与 $\odot B$ 、 $\odot C$ 相交， $\odot B$ 与 $\odot C$ 外切

C. $\odot B$ 与 $\odot A$ 、 $\odot C$ 外切, $\odot A$ 与 $\odot C$ 相交

D. $\odot B$ 与 $\odot A$ 、 $\odot C$ 相交, $\odot A$ 与 $\odot C$ 外切

【分析】根据两圆的位置关系有: 相离 ($d > R+r$)、相切 ($d = R+r$ 或 $d = R-r$)、相交 ($R-r < d < R+r$). 进行逐一判断即可.

【解答】解: $\because \odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$ 的半径分别为 2、3、4,

$$AB = 5 = 2+3, AC = 6 = 2+4, BC = 6 < 3+4,$$

根据圆与圆之间的位置关系可知: $\odot A$ 与 $\odot B$ 、 $\odot C$ 外切, $\odot B$ 与 $\odot C$ 相交.

故选: A.

【点评】本题主要考查两圆的位置关系. 两圆的位置关系有: 相离 ($d > R+r$)、相切 (外切: $d = R+r$ 或内切: $d = R-r$)、相交 ($R-r < d < R+r$). 解决本题的关键是掌握相交两圆的性质.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)【请直接将结果填入答题纸的相应位置】

7. (4 分) 因式分解: $x^2 - 4 = \underline{(x+2)(x-2)}$.

【分析】直接利用平方差公式分解因式得出答案.

【解答】解: $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$.

故答案为: $(x+2)(x-2)$.

【点评】此题主要考查了公式法分解因式, 正确应用平方差公式是解题关键.

8. (4 分) 已知 $f(x) = \frac{x^2-2}{x}$, 那么 $f(2) = \underline{1}$.

【分析】把 $x=2$ 代入 $f(x) = \frac{x^2-2}{x}$, 求得答案即可.

【解答】解: 当 $x=2$ 时, $f(2) = \frac{2^2-2}{2} = 1$,

故答案为: 1.

【点评】考查了函数值的知识, 解题的关键是代入后正确的计算, 难度不大.

9. (4 分) 如果反比例函数 $y = \frac{m-1}{x}$ (m 是常数, $m \neq 1$) 的图象, 在每个象限内 y 随着 x 的增大而减小, 那么 m 的取值范围是 $\underline{m > 1}$.

【分析】根据反比例函数的性质可得 $m-1 > 0$, 再解不等式即可.

【解答】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{m-1}{x}$ 的图象在每个象限内, y 随着 x 的增大而减小,

$$\therefore m-1 > 0,$$

解得, $m > 1$.

故答案是: $m > 1$.

【点评】 本题考查了反比例函数的性质. 对于反比例函数 $y = \frac{k}{x}$, 当 $k > 0$ 时, 在每一个象限内, 函数值 y 随自变量 x 的增大而减小; 当 $k < 0$ 时, 在每一个象限内, 函数值 y 随自变量 x 增大而增大.

10. (4分) 方程 $\sqrt{x+2} = -x$ 的解是 $x = -1$.

【分析】 把方程两边平方后求解, 注意检验.

【解答】 解: 把方程两边平方得 $x+2 = x^2$,

整理得 $(x-2)(x+1) = 0$,

解得: $x = 2$ 或 -1 ,

经检验, $x = -1$ 是原方程的解.

故本题答案为: $x = -1$.

【点评】 本题考查无理方程的求法, 注意无理方程需验根.

11. (4分) 如果从方程 $x+1=0$, $x^2-2x-1=0$, $x+\frac{1}{x}=1$, $\sqrt{x+1}=0$, $x^4-1=0$, $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=3$ 中任意选取一个方程, 那么取到的方程是整式方程的概率是 $\frac{1}{2}$.

【分析】 根据概率公式及整式方程的概念求解即可.

【解答】 解: $\because$ 在所列的 6 个方程中, 整式方程有 $x+1=0$, $x^2-2x-1=0$, $x^4-1=0$ 这 3 个,

$\therefore$ 取到的方程是整式方程的概率是 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点评】 本题主要考查概率公式, 随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$.

12. (4分) 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围 $k < 1$.

【分析】 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根, 即判别式 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. 即可得到关于 k 的不等式, 从而求得 k 的范围.

【解答】 解: $\because a = 1$, $b = -2$, $c = k$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times k = 4 - 4k > 0$,

解得: $k < 1$.

【点评】总结：一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：

(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；

(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；

(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根．

13. (4分) 为了了解某校初三学生在体育测试中报名球类的情况，随机调查了40名学生的报名情况，得到如下数据．

项目	排球	篮球	足球
人数	10	15	15

根据此信息，估计该校480名初三学生报名足球的学生人数约为 180 人．

【分析】用总人数乘以样本中初三学生报名足球的学生人数所占比例即可．

【解答】解：估计该校480名初三学生报名足球的学生人数约为 $480 \times \frac{15}{40} = 180$ (人)，

故答案为：180．

【点评】本题主要考查用样本估计总体，从一个总体得到一个包含大量数据的样本，我们很难从一个个数字中直接看出样本所包含的信息．这时，我们用频率分布直方图来表示相应样本的频率分布，从而去估计总体的分布情况．

14. (4分) 已知在正六边形 $ABCDEF$ 中， $AB = 6$ ，那么正六边形 $ABCDEF$ 的面积等于 $54\sqrt{3}$ ．

【分析】连接 OE 、 OD ，由正六边形的特点求出判断出 $\triangle ODE$ 的形状，作 $OH \perp ED$ 于 H ，由特殊角的三角函数值求出 OH 的长，利用三角形的面积公式即可求出 $\triangle ODE$ 的面积，进而可得出正六边形 $ABCDEF$ 的面积．

【解答】解：连接 OE 、 OD ，如图所示：

$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，

$\therefore \angle DEF = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle OED = 60^\circ$ ，

$\because OE = OD = 6$ ，

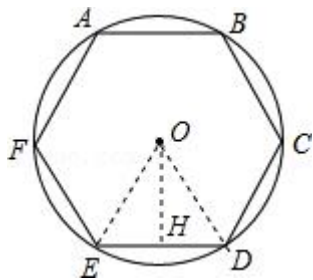
$\therefore \triangle ODE$ 是等边三角形，

作 $OH \perp ED$ 于 H ，则 $OH = OE \cdot \sin \angle OED = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ ，

$\therefore S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2} DE \cdot OH = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ ，

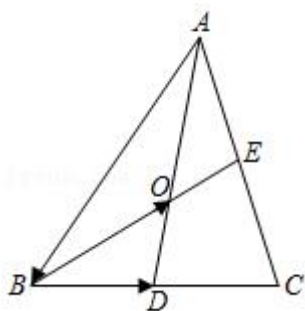
$$\therefore S_{\text{正六边形}ABCDEF} = 6S_{\triangle ODE} = 54\sqrt{3}.$$

故答案为: $54\sqrt{3}$.



【点评】本题考查了正多边形和圆、正六边形的性质、等边三角形的判定与性质；根据题意作出辅助线，构造出等边三角形是解答此题的关键.

15. (4分) 如图, BE 、 AD 分别是 $\triangle ABC$ 的两条中线, 设 $\overrightarrow{BO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AB}$ 用向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示为 $2\vec{b} - 3\vec{a}$.



【分析】利用三角形重心的性质求出 $\overrightarrow{AO}$, 再根据三角形法则求解即可.

【解答】解: $\because AD$, BE 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$$\therefore OA = 2OD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD},$$

$$\therefore \overrightarrow{OD} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = 2\vec{b} - 2\vec{a},$$

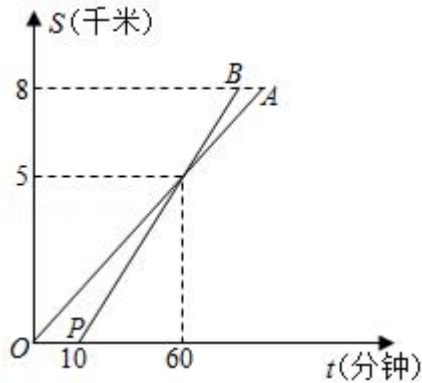
$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = 2\vec{b} - 2\vec{a} - \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{a},$$

故答案为: $2\vec{b} - 3\vec{a}$.

【点评】本题考查三角形的重心, 三角形法则等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

16. (4分) 小张、小王两个人从甲地出发, 去 8 千米外的乙地, 图中线段 OA 、 PB 分别反映了小张、小王步行所走的路程 S (千米) 与时间 t (分钟) 的函数关系, 根据图象提供的信息, 小王比小张早到乙地的时间是 6 分钟.



【分析】由函数图像求出 OA 、 PB 解析式, 再把 $y = 8$ 代入解析式就可以求出小张、小王所用时间.

【解答】解: 由图像可知:

设 OA 的解析式为: $y = kx$,

$\because OA$ 经过点 $(60, 5)$,

$$\therefore 5 = 60k, \text{ 得 } k = \frac{1}{12},$$

$$\therefore OA \text{ 函数解析式为: } y = \frac{1}{12}x \text{ ①},$$

$$\text{把 } y = 8 \text{ 代入 ① 得: } 8 = \frac{1}{12}x,$$

$$\text{解得: } x = 96,$$

$\therefore$ 小张 3 到达乙地所用时间为 96 (分钟);

设 PB 的解析式为: $y = mx + n$,

$$\therefore \begin{cases} 10m + n = 0 \\ 60m + n = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = \frac{1}{10} \\ n = -1 \end{cases},$$

$$\therefore PB \text{ 的解析式为: } y = \frac{1}{10}x - 1 \text{ ②},$$

$$\text{把 } y = 8 \text{ 代入 ② 得: } 8 = \frac{1}{10}x - 1,$$

$$\text{解得: } x = 90,$$

则小王到达乙地时间为小张出发后 90 (分钟),

∴小王比小张早到 $96 - 90 = 6$ (分钟).

故答案为: 6.

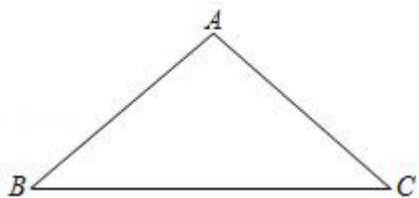
方法二: 有图象可知, 小王比小张先到时间为:

$$\frac{\frac{8}{5}}{60} - \frac{\frac{8}{5}}{60-10} - 10 = 6 \text{ (分钟)}.$$

故答案为: 6.

【点评】 本题考查的一次函数的应用, 关键是由图象求函数解析式.

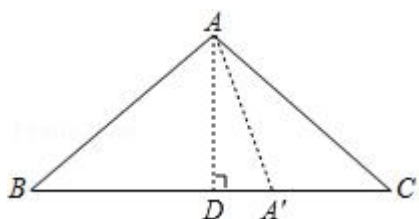
17. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 4$, $BC = 6$, 把 $\triangle ABC$ 绕着点 B 顺时针旋转, 当点 A 与边 BC 上的点 A' 重合时, 那么 $\angle AA'B$ 的余弦值等于 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.



【分析】 作 $AD \perp BC$ 于 D . 根据等腰三角形三线合一的性质得出 $BD = DC = \frac{1}{2}BC = 3$,

利用勾股定理求出 AD , 再根据旋转的性质可知 $A'B = AB = 4$, 根据勾股定理可得 AA' . 进而可得 $\angle AA'B$ 的余弦值.

【解答】 解: 如图, 作 $AD \perp BC$ 于 D .



$$\because AB = AC = 4, BC = 6,$$

$$\therefore BD = DC = \frac{1}{2}BC = 3,$$

$$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2 = 4^2 - 3^2 = 7,$$

由旋转的性质可知: $A'B = AB = 4$,

$$\therefore A'D = A'B - BD = 4 - 3 = 1,$$

根据勾股定理, 得

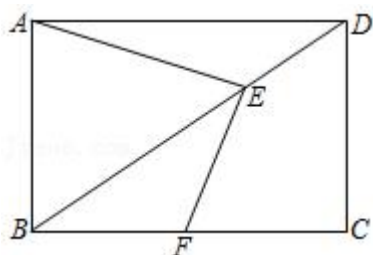
$$AA' = \sqrt{AD^2 + A'D^2} = \sqrt{7+1} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \angle AA' B \text{ 的余弦值等于 } \frac{A'D}{AA'} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

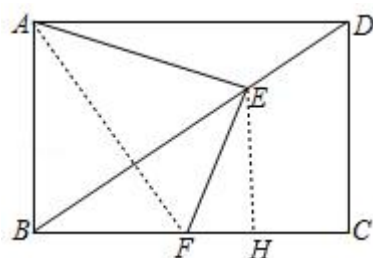
【点评】 本题考查了旋转的性质、等腰三角形的性质、解直角三角形，解题的关键掌握旋转的性质.

18. (4分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=4$, 点 E 在对角线 BD 上, 联结 AE , 作 $EF \perp AE$ 交边 BC 于 F , 若 $BF = \frac{39}{16}$, 那么 $BE = \underline{\underline{\frac{15}{4}}}$.



【分析】 连接 AF , 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于 H , 由勾股定理可求 BD , AF 的长, 通过证明点 A , 点 B , 点 F , 点 E 四点共圆, 可得 $\angle DBC = \angle EAF$, 由锐角三角函数可求 EF 的长, 由勾股定理可求解.

【解答】 解: 如图, 连接 AF , 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于 H ,



$$\because AB = CD = 3, \quad AD = BC = 4,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{9 + 16} = 5,$$

$$\because AB = 3, \quad BF = \frac{39}{16},$$

$$\therefore AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{9 + \left(\frac{39}{16}\right)^2} = \frac{15\sqrt{17}}{16},$$

$$\because \angle ABC = \angle AEF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 A , 点 B , 点 F , 点 E 四点共圆,

$$\therefore \angle DBC = \angle EAF,$$

$$\therefore \sin \angle DBC = \sin \angle EAF = \frac{DC}{BD} = \frac{EF}{AF},$$

$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{EF}{\frac{15\sqrt{17}}{16}},$$

$$\therefore EF = \frac{9}{16}\sqrt{17},$$

$$\because \tan \angle DBC = \frac{DC}{BC} = \frac{EH}{BH},$$

$$\therefore \frac{EH}{BH} = \frac{3}{4},$$

设 $EH = 3x$, $BH = 4x$,

$$\because EF^2 = FH^2 + EH^2,$$

$$\therefore \frac{81 \times 17}{256} = 9x^2 + \left(4x - \frac{39}{16}\right)^2,$$

$$\therefore x = \frac{3}{4} \text{ 或 } x = \frac{3}{100} \text{ (不合题意舍去)},$$

$$\therefore EH = \frac{9}{4}, BH = 3,$$

$$\therefore BE = \sqrt{BH^2 + EH^2} = \sqrt{9 + \frac{81}{16}} = \frac{15}{4},$$

故答案为 $\frac{15}{4}$.

【点评】 本题考查了矩形的性质，锐角三角函数，勾股定理，四点共圆等知识，添加恰当辅助线构造直角三角形是本题的关键.

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算: $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \frac{2}{\sqrt{3}+1} - (\sqrt{2})^{-2} - |1-\sqrt{3}|$.

【分析】 根据二次根式的运算法则即可求出答案.

【解答】 解: 原式 $= 3 - 2 + \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - \frac{1}{2} - (\sqrt{3}-1)$

$$= 3 - 2 + \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{2} - \sqrt{3} + 1$$

$$= \frac{1}{2}.$$

【点评】 本题考查二次根式，解题的关键是熟练运用二次根式的运算法则，本题属于基础题型.

20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x^2+xy-y^2=5 \end{cases}.$$

【分析】 变形组中的①代入②，求出一个未知数的值，再代入求出另一个未知数的值.

【解答】解：
$$\begin{cases} 2x-y=1 \text{①} \\ 2x^2+xy-y^2=5 \text{②} \end{cases}$$

由①，得 $y = 2x - 1$ ③.

把③代入②，得 $2x^2 + x(2x - 1) - (2x - 1)^2 = 5$,

整理，得 $3x - 1 = 6$,

所以 $x = 2$.

把 $x = 2$ 代入③，得 $y = 2 \times 2 - 1 = 3$.

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$.

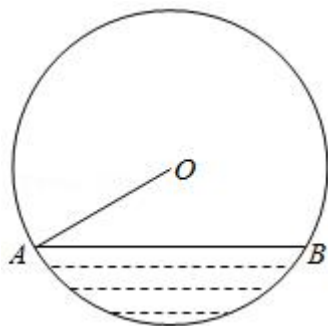
【点评】 本题考查了解高次方程，掌握一次方程的解法是解决本题的关键.

21. (10 分) 如图，是一个地下排水管的横截面图，已知 $\odot O$ 的半径 OA 等于 50cm ，水的深

度等于 25cm (水的深度指 $\widehat{AB}$ 的中点到弦 AB 的距离).

求：(1) 水面的宽度 AB .

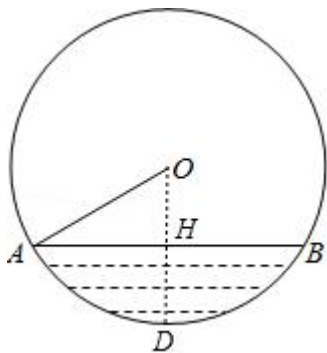
(2) 横截面浸没在水中的 $\widehat{AB}$ 的长 (结果保留 π).



【分析】(1) 过 O 作 $OH \perp AB$ 于 H ，并延长交 $\odot O$ 于 D ，根据垂径定理得出 $AH = BH$ ， $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ ，求出 OH ，根据勾股定理求出 AH ，再求出答案即可；

(2) 求出 $\angle AOH$ 的度数，根据等腰三角形求出 $\angle AOH = \angle BOH$ ，求出 $\angle AOB$ ，再根据弧长公式求出答案即可.

【解答】解：(1) 过 O 作 $OH \perp AB$ 于 H ，并延长交 $\odot O$ 于 D ，



$\because OH \perp AB$, OH 过 O ,

$\therefore \angle OHA = 90^\circ$, $AH = \frac{1}{2}AB$, $\widehat{AD} = \widehat{BD}$,

$\because$ 水的深度等于 $25cm$,

$\therefore HD = 25 (cm)$,

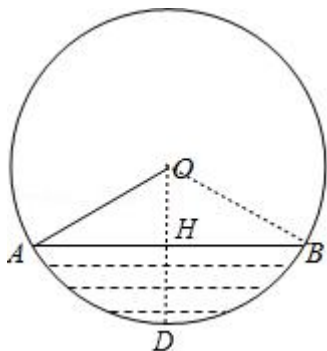
$\because OA = OD = 50cm$,

$\therefore OH = OD - HD = 25 (cm)$,

$\therefore AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{50^2 - 25^2} = 25\sqrt{3} (cm)$,

$\therefore AB = 50\sqrt{3}cm$;

(2) 连接 OB ,



$\because OA = 50cm$, $OH = 25cm$,

$\therefore OH = \frac{1}{2}OA$,

$\because \angle OHA = 90^\circ$,

$\therefore \angle OAH = 30^\circ$,

$\therefore \angle AOH = 60^\circ$,

$\because OA = OB$, $OH \perp AB$,

$\therefore \angle BOH = \angle AOH = 60^\circ$,

即 $\angle AOB = 120^\circ$,

$$\therefore \widehat{AB} \text{ 的长是 } \frac{120\pi \times 50}{180} = \frac{100\pi}{3} \text{ (cm)}.$$

【点评】 本题考查了弧长的计算, 等腰三角形的性质, 直角三角形的性质, 垂径定理等知识点, 能综合运用知识点进行推理和计算是解此题的关键.

22. (10分) A 、 B 两地相距 18 千米, 甲工程队要在 A 、 B 两地间铺设一条输送天然气的管道, 乙工程队要在 A 、 B 两地间铺设一条输油管道, 已知甲工程队每天比乙工程队少铺设 1 千米.

(1) 若两队同时开工, 甲工程队每天铺设 3 千米, 求乙工程队比甲工程队提前几天完成?

(2) 若甲工程队提前 3 天开工, 结果两队同时完成任务, 求甲、乙两队每天各铺设管道多少千米?

【分析】 (1) 利用工作时间 = 工作总量 $\div$ 工作效率, 可分别求出甲、乙两工程队完成任务所需时间, 比较后即可得出结论;

(2) 设甲工程队每天铺设管道 x 千米, 则乙工程队每天铺设管道 $(x+1)$ 千米, 利用工作时间 = 工作总量 $\div$ 工作效率, 结合甲工程队所需时间比乙工程队所需时间多 3 天, 即可得出关于 x 的分式方程, 解之经检验后即可得出结论.

【解答】 解: (1) 甲工程队完成任务所需时间为 $18 \div 3 = 6$ (天),

乙工程队完成任务所需时间为 $18 \div (3+1) = 4.5$ (天).

$$6 - 4.5 = 1.5 \text{ (天)}.$$

答: 乙工程队比甲工程队提前 1.5 天完成.

(2) 设甲工程队每天铺设管道 x 千米, 则乙工程队每天铺设管道 $(x+1)$ 千米,

$$\text{依题意得: } \frac{18}{x} - \frac{18}{x+1} = 3,$$

$$\text{整理得: } x^2 + x - 6 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = -3, x_2 = 2,$$

经检验, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ 是原方程的解, $x_1 = -3$ 不符合题意舍去, $x_2 = 2$ 符合题意,

$$\therefore x+1 = 3 \text{ (千米)}.$$

答: 甲工程队每天铺设管道 2 千米, 乙工程队每天铺设管道 3 千米.

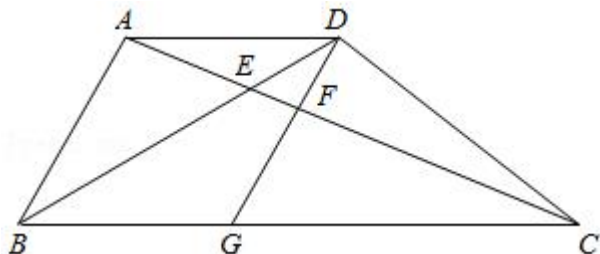
【点评】 本题考查了分式方程的应用, 解题的关键是: (1) 根据各数量之间的关系, 列式计算; (2) 找准等量关系, 正确列出分式方程.

23. (12分) 如图, 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 对角线 BD 平分 $\angle ABC$, 点 G 在底边

BC 上，联结 DG 交对角线 AC 于 F ， $\angle DGB = \angle DAB$ 。

(1) 求证：四边形 $ABGD$ 是菱形；

(2) 联结 EG ，求证： $BG \cdot EG = BC \cdot EF$ 。



【分析】(1) 先证四边形 $ABGD$ 是平行四边形，再由菱形的判定可得结论；

(2) 由“SAS”可证 $\triangle ABE \cong \triangle GBE$ ，可得 $EG = AE$ ，由相似三角形的性质可得 $\frac{AD}{BC} = \frac{EF}{AE}$ ，

即可得结论。

【解答】证明：(1) $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle DAB + \angle ABG = 180^\circ, \quad \angle DGB + \angle ADG = 180^\circ,$$

$$\because \angle DGB = \angle DAB,$$

$$\therefore \angle ABG = \angle ADG,$$

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 是平行四边形，

$$\because BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle GDB,$$

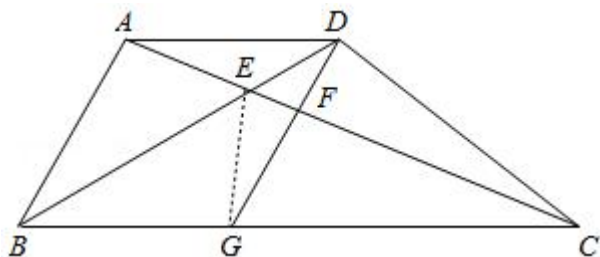
$$\because AD \parallel BG,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBG = \angle BDG,$$

$$\therefore BG = DG,$$

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 是菱形；

(2) 如图，连接 EG ，



$\because$ 四边形 $ABGD$ 是菱形，

$$\therefore AB = BG = AD, \quad \angle ABE = \angle GBE,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle GBE$ 中,

$$\begin{cases} AB=BG \\ \angle ABE=\angle GBE, \\ BE=BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle GBE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EG = AE,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CBE,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DE}{BE},$$

$$\therefore DF \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{EF}{AE},$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{EF}{AE},$$

$$\therefore AD = BG, \quad AE = EG,$$

$$\therefore \frac{BG}{BC} = \frac{EF}{EG},$$

$$\therefore BG \cdot EG = BC \cdot EF.$$

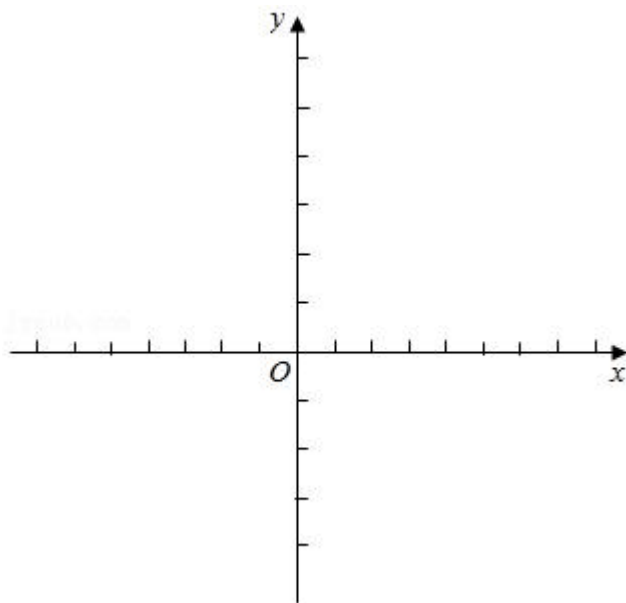
【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，菱形的判定和性质，全等三角形的判定和性质等知识，灵活运用这些性质解决问题是本题的关键。

24. (12分) 已知直线 $y = kx + b$ 经过点 $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$ 两点, 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + b$ 与已知直线交于 C 、 D 两点 (点 C 在点 D 的右侧), 顶点为 P .

(1) 求直线 $y = kx + b$ 的表达式;

(2) 若抛物线的顶点不在第一象限, 求 a 的取值范围;

(3) 若直线 DP 与直线 AB 所成的夹角等于 15° , 且点 P 在直线 AB 的上方, 求抛物线 $y = ax^2 - 4ax + b$ 的表达式.



【分析】(1) 直线 $y = kx + b$ 经过点 $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$ 两点, 将点坐标代入即得答案;

(2) 用 a 表示顶点坐标, 根据顶点不在第一象限, 列出不等式即可解得 a 范围;

(3) 延长 PD 交 x 轴于 M , 对称轴与 x 轴交于 N , 首先求出 D 坐标, 再根据直线 DP 与直线 AB 所成的夹角等于 15° , 求出 OM 长度, 又利用 $\frac{OM}{MN} = \frac{OD}{PN}$ 求出 PN 列方程即可得答案.

【解答】解: (1) $\because$ 直线 $y = kx + b$ 经过点 $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} 0 = -2k + b \\ 3 = k + b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 $y = kx + b$ 的表达式为 $y = x + 2$;

(2) $\because b = 2$,

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + b$ 解析式为 $y = ax^2 - 4ax + 2 = a(x - 2)^2 + 2 - 4a$,

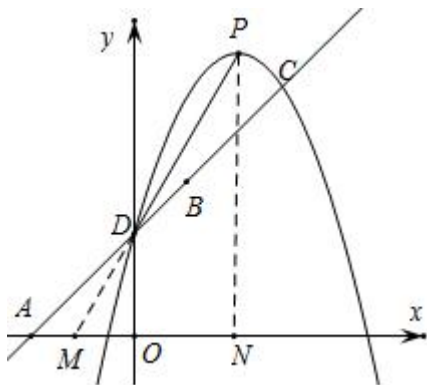
$\therefore$ 顶点是 $(2, 2 - 4a)$,

$\because$ 顶点不在第一象限, 且在对称轴 $x = 2$ 上,

$\therefore$ 顶点在第四象限或在 x 轴上,

$\therefore 2 - 4a \leq 0$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$;

(3) 延长 PD 交 x 轴于 M , 对称轴与 x 轴交于 N , 如图:



$\because P$ 在直线 AB 的上方，抛物线 $y = ax^2 - 4ax + b$ 与已知直线交于 C 、 D 两点（点 C 在点 D 的右侧），

$\therefore$ 开口向下，

$\because$ 直线 $y = x + 2$ 与抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 2$ 都经过 $(0, 2)$ ，点 C 在点 D 的右侧，

$\therefore D(0, 2)$ ，

$\therefore OA = OD = 2$ ， $\angle AOD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle OAD = \angle ODA = 45^\circ$ ，

$\because$ 直线 DP 与直线 AB 所成的夹角等于 15° ，

$\therefore \angle MDO = 30^\circ$ ，

Rt $\triangle MDO$ 中， $\tan \angle MDO = \frac{OM}{OD}$ ，

$\therefore \tan 30^\circ = \frac{OM}{2}$ ，解得 $OM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

$\because$ 对称轴与 x 轴交于 N ，

$\therefore OD \parallel PN$ ， $MN = ON + OM = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore \frac{OM}{MN} = \frac{OD}{PN}$ ，即 $\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{PN}$ ，

$\therefore PN = 2 + 2\sqrt{3}$ ，

而 $P(2, 2 - 4a)$ ，

$\therefore 2 - 4a = 2 + 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + b$ 的表达式为： $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2\sqrt{3}x + 2$ 。

【点评】 本题考查二次函数、一次函数等综合知识，难度较大，解题的关键是利用直线

DP 与直线 AB 所成的夹角等于 15° ，求出 OM 长度。

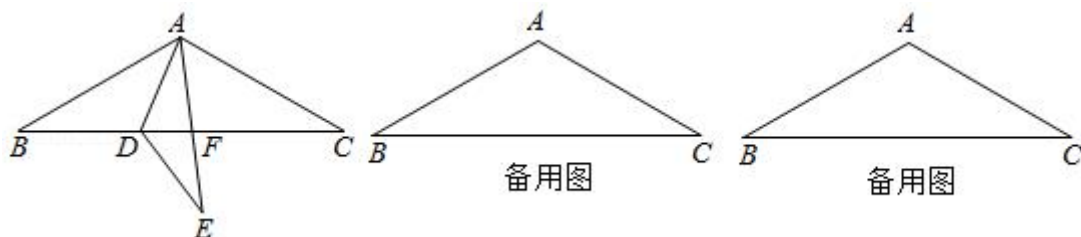
25. (14 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2\sqrt{3}$, $\angle BAC = 120^\circ$, $\triangle ADE$ 的顶点 D 在边 BC 上, AE 交 BC 于点 F (点 F 在点 D 的右侧), $\angle DAE = 30^\circ$ 。

(1) 求证: $\triangle ABF \sim \triangle DCA$;

(2) 若 $AD = ED$ 。

①联结 EC , 当点 F 是 BC 的黄金分割点 ($FC > BF$) 时, 求 $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle FEC}}$ 。

②联结 BE , 当 $DF = 1$ 时, 求 BE 的长。



【分析】(1) 求出 $\angle B$ 、 $\angle C$, 证明 $\angle BAF = \angle ADC$ 即可;

(2) ①证明 $\triangle ABC \sim \triangle DAE$, 得到对应边成比例可证 $\triangle ECF \sim \triangle ABF$, 从而

$$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ECF}} = \left(\frac{BF}{CF}\right)^2 \text{即可得出答案;}$$

②作 $AH \perp BC$ 于 H , 求出 BC , 利用 $\triangle ABF \sim \triangle DCA$ 列方程求出 $BD = 2$ 或 3 , 分情况画出图形分别求出 BE 。

【解答】解: (1) 证明: $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because \angle BAC + \angle B + \angle C = 180^\circ, \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ,$$

$$\because \angle DAE = 30^\circ,$$

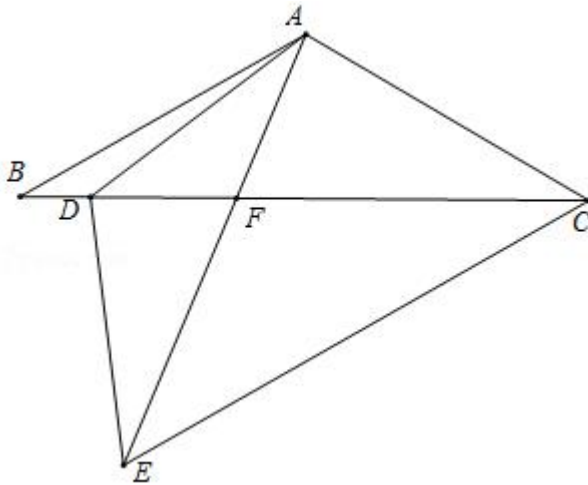
$$\therefore \angle B = \angle C = \angle DAE,$$

$$\because \angle ADC = \angle B + \angle BAD, \angle BAF = \angle DAE + \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle ADC,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle DCA;$$

(2) ①



$$\because \triangle ABF \sim \triangle DCA,$$

$$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{BF}{AC}, \text{ 即 } \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{BF},$$

$$\because AD = ED,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DEA,$$

$$\therefore \angle DEA = \angle C,$$

$$\because \angle DAE = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DAE,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{BC}, \text{ 即 } \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{BC},$$

$$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{AE}{BC}, \text{ 即 } \frac{AE}{AF} = \frac{BC}{BF},$$

$$\therefore \frac{EF}{AF} = \frac{CF}{BF},$$

$$\because \angle EFC = \angle AFB,$$

$$\therefore \triangle ECF \sim \triangle ABF,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ECF}} = \left(\frac{BF}{CF}\right)^2,$$

$\because$ 点 F 是 BC 的黄金分割点 ($FC > BF$),

$$\therefore \frac{BF}{CF} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ECF}} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2};$$

②作 $AH \perp BC$ 于 H ,

$$\because AB = AC = 2\sqrt{3}, \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore BC = 2BH, \quad AH = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}, \quad BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 3 \text{ 得 } BC = 6,$$

$$\because \triangle ABF \sim \triangle DCA,$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BF}{AC}, \text{ 即 } CD \cdot BF = AB \cdot AC,$$

$$\text{设 } BD = x, \text{ 则 } CD = 6 - x,$$

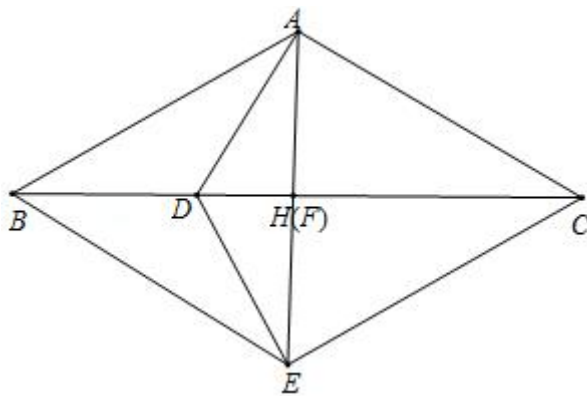
$$\because DF = 1,$$

$$\therefore BF = x + 1,$$

$$\therefore (6 - x) \cdot (x + 1) = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}, \text{ 解得 } x = 2 \text{ 或 } x = 3,$$

$$\therefore BD = 2 \text{ 或 } 3,$$

当 $BD = 2$ 时, $BF = 3$, 即 F 为 BC 中点, 如图:



$$\because AB = AC,$$

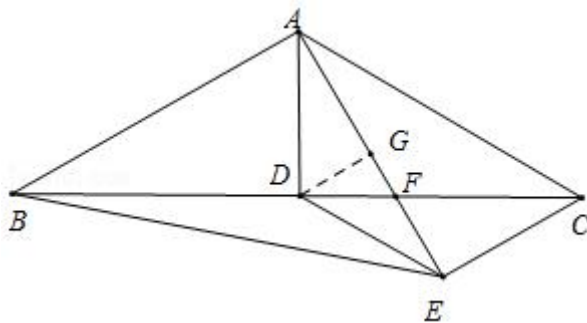
$$\therefore AF \perp BC,$$

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore AF = EF, \text{ 即 } BC \text{ 垂直平分 } AE,$$

$$\therefore BE = BA = 2\sqrt{3},$$

当 $BD = 3$ 时, D 为 BC 中点, 如图:



$$\because AB = AC, \quad \angle BAC = 120^\circ, \quad \angle DAE = 30^\circ,$$

$$\therefore AD \perp BC, \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 60^\circ, \angle BAE = \angle BAD + \angle DAE = 90^\circ,$$

作 $DG \perp AE$ 于 G ,

$$\therefore AG = AD \cdot \cos 30^\circ = \frac{3}{2},$$

$$\because AD = DE,$$

$$\therefore AE = 2AG = 3,$$

$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{21},$$

综上所述, $DF = 1$ 时, BE 为 $2\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{21}$.

【点评】 本题考查等腰三角形性质、相似三角形判定与性质等知识, 解题的关键是利用相似三角形性质求出 BD 的长度.