

2021 年上海市虹口区中考数学二模试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分) 下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.

1. 下列各数中，2 的相反数是 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据相反数的性质判断即可；

【详解】解：2 的相反数是：-2.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了相反数的求解，准确计算是解题的关键.

2. 当 $x \neq 0$ 时，下列运算正确的是 ()

- A. $x^4 + x^2 = x^6$ B. $x^4 - x^2 = x^2$ C. $x^4 \cdot x^2 = x^8$ D. $x^4 \div x^2 = x^2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项和幂的运算性质判断即可；

【详解】解： x^4 与 x^2 不是同类项，不能加减，故选项 A、B 计算错误；

$x^4 \cdot x^2 = x^6 \neq x^8$ ，故选项 C 计算错误；

$x^4 \div x^2 = x^2$ ，故选项 D 计算正确.

故选：D.

【点睛】本题主要考查了合并同类项和幂的运算性质，准确分析判断是解题的关键.

3. 把抛物线 $y = 2x^2$ 向左平移 1 个单位，则所得抛物线的解析式是 ()

- A. $y = 2(x - 1)^2$ B. $y = 2(x + 1)^2$ C. $y = 2x^2 - 1$ D. $y = 2x^2 + 1$

【答案】B

【解析】

【分析】先求出原抛物线的顶点坐标，然后求出平移后的顶点坐标，设出顶点式，将顶点坐标代入即可.

【详解】解：原抛物线的顶点为 (0, 0)，向左平移 1 个单位，那么新抛物线的顶点为 (-1, 0)，可设新抛物线的解析式为 $y = 2(x - h)^2 + k$ ，代入得 $y = 2(x + 1)^2$.

故选：B.

【点睛】此题考查的是抛物线的平移，掌握把抛物线的平移转化为顶点的平移和抛物线的顶点式是解决此题的关键.

4. 某校足球队 16 名队员的年龄情况如表，这些队员年龄的中位数和众数分别是 ()

年龄 (岁)	14	15	16	17
人数	3	5	3	3

A. 15, 15

B. 15.5, 15

C. 15.5, 16

D. 16, 16

【答案】B

【解析】

【分析】根据中位数和众数的定义求解即可.

【详解】解：∵ 15 岁出现 5 次，次数最多，

∴ 这组数据的众数为 15 岁，

把这组数据按大小顺序排列，最中间两个数是 15, 16 岁

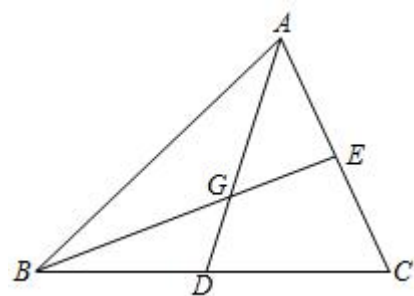
∴ 这组数据的中位数为 $\frac{15+16}{2} = 15.5$ (岁)，

故选：B.

【点睛】本题主要考查中位数和众数，将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数. 一组数据中出现次数最多的数据叫做众数.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别是边 BC 、 AC 的中点， AD 和 BE 交于点 G ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AE} = \vec{b}$ ，那

么向量 $\overrightarrow{BG}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为 ()



A. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

B. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

C. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

D. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用三角形法则求出 $\overrightarrow{BE}$ ，再根据三角形中心的性质解决问题即可.

【详解】解： $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AE} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{a} + \vec{b},$$

$\because AD, BE$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore BG = \frac{2}{3} BE,$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b},$$

故选 A.

【点睛】本题主要考查了平面向量计算的三角形法则及三角形重心的知识，解题的关键是熟练掌握这些基本知识.

6. 在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，下列选项中，不能判定四边形 $ABCD$ 为矩形的是（ ）

A. $AD = BC$ 且 $AC = BD$

B. $AD = BC$ 且 $\angle A = \angle B$

C. $AB = CD$ 且 $\angle A = \angle C$

D. $AB = CD$ 且 $\angle A = \angle B$

【答案】C

【解析】

【分析】根据矩形的判定条件逐项进行分析判断即可；

【详解】解：A、 $\because AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\because AC = BD$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形，故选项 A 不符合题意；

B、 $\because AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，

$\because \angle A = \angle B$ ，

$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形，故选项 B 符合题意；

C、 $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ,$$

$$\because \angle A = \angle C,$$

$$\therefore \angle B = \angle D,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB = CD$, 故选项 C 不符合题意;

$$D、\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\because \angle A = \angle B,$$

$$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ,$$

$\therefore AB \perp AD$, $AB \perp BC$, AB 的长为 AD 、 BC 间的距离,

$$\text{又} \because AB = CD,$$

$$\therefore CD \perp AD,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore$ 选项 D 不符合题意;

故选: C .

【点睛】 本题主要考查了矩形的判定, 准确分析判断是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) [请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. 计算: $(3a)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $9a^2$

【解析】

【详解】 $(3a)^2 = 3^2 \times a^2 = 9a^2$,

故答案为 $9a^2$

8. 分解因式: $x^2 - 4x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x(x - 4)$

【解析】

【详解】 解: $x^2 - 4x = x(x - 4)$.

故答案为: $x(x - 4)$.

9. 方程 $\sqrt{x+3} = 3$ 的解是_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】把方程两边平方去根号后求解.

【详解】解：由原方程的两边平方，得

$$x+3=9,$$

移项，得

$$x=6;$$

故答案是：6.

【点睛】本题考查了无理方程的解法. 在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法，本题用了平方法.

10. 不等式组 $\begin{cases} x-1 < 0 \\ 2x+3 > x \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $-3 < x < 1$

【解析】

【详解】分析：求出每个不等式的解集，根据找不等式组解集的规律找出即可.

$$\text{详解：} \begin{cases} x-1 < 0 \text{①} \\ 2x+3 > x \text{②} \end{cases},$$

$\therefore$ 解不等式①得： $x < 1$,

解不等式②得： $x > -3$,

$\therefore$ 不等式组的解集为： $-3 < x < 1$,

故答案为 $-3 < x < 1$.

点睛：本题考查的是一元一次不等式组的解，解此类题目常常要结合数轴来判断. 要注意 x 是否渠道，若去得到则 x 再该点是实心的，反之 x 在该点是空心的.

11. 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围_____.

【答案】 $k < 1$

【解析】

【分析】根据一元二次方程根的判别式计算即可；

【详解】解： $\because a = 1, b = -2, c = k$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times k = 4 - 4k > 0,$$

解得： $k < 1$.

故答案为： $k < 1$.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根的判别式，准确计算是解题的关键.

12. 已知点 $A(1, y_1)$ 、点 $B(2, y_2)$ 在抛物线 $y = ax^2 - 2$ 上，且 $y_1 < y_2$ ，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > 0$

【解析】

【分析】 利用 A 、 B 坐标且 $y_1 < y_2$ 和二次函数的性质即可判断.

【详解】 解：由已知抛物线为 $y = ax^2 - 2$,

$\therefore$ 对称轴为 $x = 0$,

$\because x_1 < x_2$,

要使 $y_1 < y_2$ ，则在 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大，

$\therefore a > 0$,

故 a 的取值范围是： $a > 0$.

【点睛】 本题主要考查二次函数的增减性. 熟练掌握二次函数的力偶和性质是解题关键.

13. 一个不透明的盒子中装有 n 个小球，其中红球有 4 个，小球除颜色不同外其它都相同. 如果要设计一个游戏，从盒中任意摸出一个球，使得摸出红球的概率是 0.2，那么 $n =$ _____.

【答案】 20

【解析】

【分析】 直接利用红球个数除以总数得出摸出红球的概率，即可得出答案.

【详解】 解： $\because$ 一个不透明的盒子中装有 n 个小球，其中红球有 4 个，从盒中任意摸出一个球，使得摸出红球的概率是 0.2，

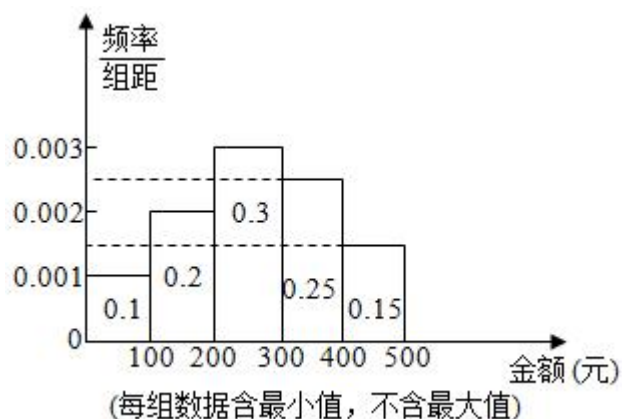
$$\therefore \frac{4}{n} = 0.2,$$

解得： $n = 20$.

故答案为： 20.

【点睛】 本题主要考查了概率公式，正确掌握概率求法是解题关键.

14. 为了解学生们零用钱的使用情况，某校从全校 800 名学生中随机抽取了 40 名学生进行调查，并将这部分学生平均每月使用零用钱的金额绘制成了频率分布直方图（如图）. 请估计该校学生中平均每月使用零用钱的金额小于 200 元的约有_____名.



【答案】 240

【解析】

【分析】根据题意和频数分布直方图中的数据，可以计算出该校学生中平均每月使用零用钱的金额小于 200 元的约有多少名.

【详解】解：由直方图可得，

该校学生中平均每月使用零用钱的金额小于 200 元的约有：800× (0.1+0.2) = 240 (名)，

故答案为：240.

【点睛】本题考查频数分布直方图，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

15. 如果正六边形的半径是 1，那么它的边心距是_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】根据正六边形的性质得到 $\angle BOG = \frac{1}{2} \angle BOC = 30^\circ$ ，再根据余弦的定义计算即可；

【详解】解：∵ $ABCDEF$ 为正六边形，

∴ $\angle BOC = 360^\circ \div 6 = 60^\circ$ ， $OG \perp BC$.

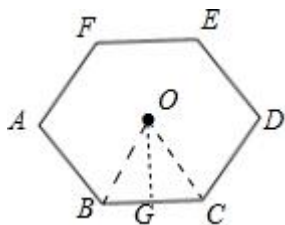
∴ $\angle BOG = \frac{1}{2} \angle BOC = 30^\circ$.

在 $Rt\triangle BOG$ 中， $\cos \angle BOG = \frac{OG}{OB}$.

∵ $OB = 1$,

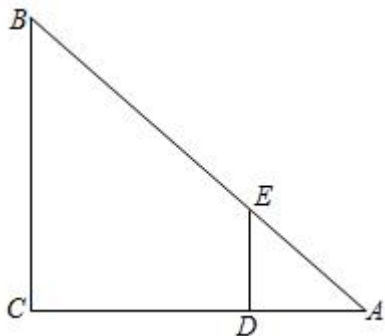
∴ $OG = OB \cdot \cos \angle BOG = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



【点睛】 本题主要考查了正多边形的性质和余弦的性质，准确分析计算是解题的关键.

16. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 9$ ， $BC = 6$ ， $DE \parallel BC$ ，且 $CD = 2AD$ ，以点 C 为圆心， r 为半径作 $\odot C$. 如果 $\odot C$ 与线段 BE 有两个交点，那么 $\odot C$ 的半径 r 的取值范围是_____.

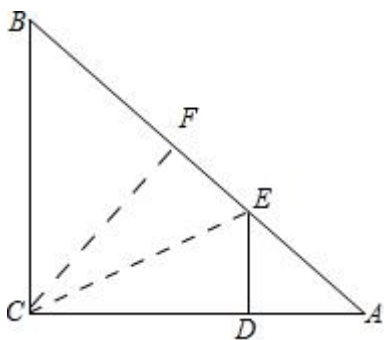


【答案】 $2\sqrt{5} < r \leq 2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 连接 CE ，过 C 作 $CF \perp AB$ 于 F . 利用 $DE \parallel BC$ ，计算得出 AD ， AE 的长，通过说明 $\triangle BFC \sim \triangle ADE$ ，得出 CF 的长，利用勾股定理计算 CE 的长，因为 $\odot C$ 与线段 BE 有两个交点，可以确定 r 的取值范围.

【详解】 解：连接 CE ，过 C 作 $CF \perp AB$ 于 F .



$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}.$$

$$\because CD = 2AD,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}.$$

$$\because AB = 9, BC = 6,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{3}BC = 2, \quad AE = \frac{1}{3}AB = 3.$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5}, \quad CD = 2AD,$$

$$\therefore CD = 2\sqrt{5}.$$

$$\therefore CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}.$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCF + \angle ACF = 90^\circ.$$

$$\therefore CF \perp AB,$$

$$\therefore \angle CAF + \angle ACF = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BCF = \angle FAC.$$

$$\therefore \angle BFC = \angle EDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BFC \sim \triangle ADE.$$

$$\therefore \frac{BC}{CF} = \frac{AE}{AD}.$$

$$\therefore \frac{6}{CF} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

$$\therefore CF = 2\sqrt{5}.$$

$$\therefore \text{当 } r = 2\sqrt{5} \text{ 时, } \odot C \text{ 与线段 } BE \text{ 相切.}$$

$$\therefore \odot C \text{ 与线段 } BE \text{ 有两个交点,}$$

$$\therefore 2\sqrt{5} < r \leq 2\sqrt{6}.$$

$$\text{故答案为: } 2\sqrt{5} < r \leq 2\sqrt{6}.$$

【点睛】 本题主要考查了直线与圆的位置关系，勾股定理，平行线的性质，相似三角形的判定与性质．通过计算 CF ， CE 的长来确定 r 的取值范围是解题的关键．

17. 当一个凸四边形的一条对角线把原四边形分割成两个等腰三角形时，我们称这个四边形为“等腰四边形”，其中这条对角线称为这个四边形的“等腰线”．如果凸四边形 $ABCD$ 是“等腰四边形”，对角线 BD 是该四边形的“等腰线”，其中 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC = CD \neq AD$ ，那么 $\angle BAD$ 的度数为_____．

【答案】 75°

【解析】

【分析】 根据“等腰四边形”定义画出图形，对角线 BD 是该四边形的“等腰线”，所以 $\triangle CBD$ 和 $\triangle ABD$ 为

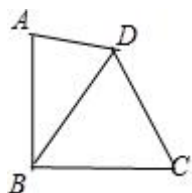
等腰三角形，由于 $AB = BC = CD \neq AD$ ，所以 $\triangle ABD$ 中分两种情形进行讨论即可；

【详解】解： $\because$ 凸四边形 $ABCD$ 是“等腰四边形”，对角线 BD 是该四边形的“等腰线”，

$\therefore \triangle CBD$ 和 $\triangle ABD$ 为等腰三角形.

由于 $AB \neq AD$ ，在 $\triangle ABD$ 中分两种情形：① $AB = BD$ ，② $AD = BD$.

当① $AB = BD$ 时，如下图：



$\because AB = BC = CD$, $AB = BD$.

$\therefore BC = CD = BD$.

$\therefore \triangle BDC$ 为等边三角形.

$\therefore \angle DBC = 60^\circ$.

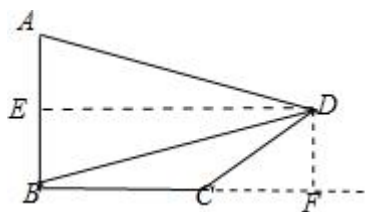
$\because \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABD = 30^\circ$.

$\because AB = BD$,

$\therefore \angle BAD = \angle BDA = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

当② $AD = BD$ 时，如下图，



过点 D 作 $DE \perp AB$ ，过点 D 作 $DF \perp CB$ ，交 CB 延长线于点 F ，

$\because AD = BD$, $DE \perp AB$,

$\therefore BE = \frac{1}{2} AB$.

$\because DE \perp AB$, $DF \perp CB$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 为矩形.

$\therefore DF = BE = \frac{1}{2} AB$.

$\because AB = CD$,

$\therefore DF = \frac{1}{2} CD$.

在 $\text{Rt}\triangle DCF$ 中, $\sin \angle DCF = \frac{DF}{CD} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \angle DCF = 30^\circ.$$

$$\because BC = CD,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle BDC = \frac{\angle DCF}{2} = 15^\circ.$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 75^\circ.$$

$$\because AD = BD,$$

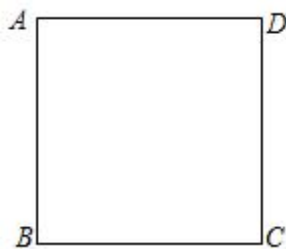
$$\therefore \angle BAD = \angle ABD = 75^\circ.$$

综上, $\angle BAD = 75^\circ$.

故答案为: 75° .

【点睛】 本题主要考查了四边形综合, 结合等边三角形、矩形的性质求解是解题的关键.

18. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 点 M 在边 DC 上, 将 $\triangle BCM$ 沿直线 BM 翻折, 使得点 C 落在同一平面内的点 C' 处, 联结 DC' 并延长交正方形 $ABCD$ 一边于点 N . 当 $BN = DM$ 时, CM 的长为_____.



【答案】 2 或 $8 - 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 分两种情形: 如图 1 中, 当 $BN = DM$ 时, 连接 CC' 交 BM 于 J . 如图 2 中, 当 $BN = DM$ 时, 过点 C' 作 $C'T \perp CD$ 于 T . 分别求解即可.

【详解】 解: 如图 1 中, 当 $BN = DM$ 时, 连接 CC' 交 BM 于 J .

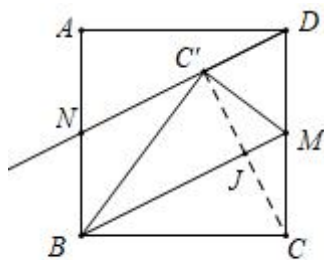


图1

$$\because BN = DM, BN \parallel DM,$$

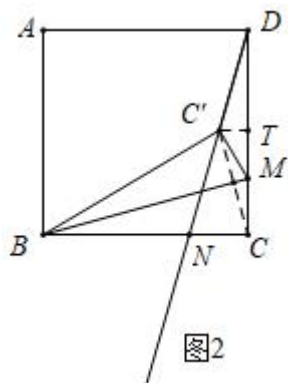
$\therefore$ 四边形 $BNDM$ 是平行四边形,

$\therefore BM \parallel DN$,

$\therefore CJ = JC'$,

$\therefore CM = DM = \frac{1}{2} CD = 2$.

如图 2 中, 当 $BN = DM$ 时, 过点 C' 作 $C'T \perp CD$ 于 T .



$\therefore CB = CD, BN = DM$,

$\therefore CN = CM = MC'$,

在 $\triangle BCM$ 和 $\triangle DCN$ 中,

$$\begin{cases} CB = CD \\ \angle BCM = \angle DCN, \\ CM = CN \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCM \cong \triangle DCN$ (SAS),

$\therefore \angle CDN = \angle CBM$,

$\therefore \angle CBM + \angle BCC' = 90^\circ, \angle BCC' + \angle C'CD = 90^\circ$,

$\therefore \angle CBM = \angle C'CD$,

$\therefore \angle C'CD = \angle DCN$,

$\therefore C'D = C'C$,

$\therefore C'T \perp CD$,

$\therefore DT = TC = 2$,

$\therefore C'T \parallel CN$,

$\therefore DC' = C'N$,

$\therefore C'T = \frac{1}{2} CN$,

设 $C'T = x$, 则 $CN = CM = MC' = 2x, TM = \sqrt{3}x$,

$$\therefore 2x + \sqrt{3}x = 2,$$

$$\therefore x = 4 - 2\sqrt{3},$$

$$\therefore CM = 8 - 4\sqrt{3},$$

【点睛】 本题考查翻折变换，正方形的性质，平行四边形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，三角形中位线定理等知识，解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题.

三、解答题 (本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 计算: $|1 - \sqrt{2}| - (\sqrt{3})^0 + \frac{4}{\sqrt{3} - 1} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}.$

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质计算即可;

【详解】 解: 原式 $= \sqrt{2} - 1 - 1 + \frac{4(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} - \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$
 $= \sqrt{2} - 1 - 1 + 2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{2},$
 $= 2\sqrt{3}.$

【点睛】 本题主要考查了二次根式的运算，结合零指数幂和负指数幂计算是解题的关键.

20. 解方程: $\frac{6}{x^2 - 9} + 1 = \frac{1}{x - 3}.$

【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【详解】 解: 去分母得: $6 + x^2 - 9 = x + 3,$

整理得: $x^2 - x - 6 = 0,$ 即 $(x - 3)(x + 2) = 0,$

解得: $x = 3$ 或 $x = -2,$

检验: 把 $x = 3$ 代入得: $(x + 3)(x - 3) = 0,$

把 $x = -2$ 代入得: $(x + 3)(x - 3) = -5 \neq 0,$

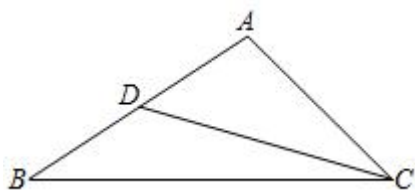
则 $x = 3$ 是增根，分式方程的解为 $x = -2.$

【点睛】 此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 45^\circ$, $\cot B = \frac{3}{2}$, $BC = 10$.

(1) 求 AB 的长;

(2) 如果 CD 为边 AB 上的中线, 求 $\angle DCB$ 的正切值.



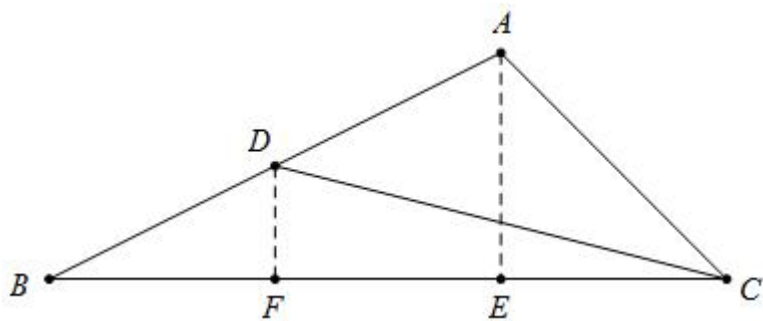
【答案】(1) $2\sqrt{13}$; (2) $\frac{2}{7}$

【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AE \perp BC$, 构造两个直角三角形, 分别用特殊角和三角函数求解.

(2) 过 D 作 $DF \perp BC$, 分别在两个直角三角形中求解.

【详解】解: (1) 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 作 $DF \perp BC$ 于 F ,



$\because \angle BCA = 45^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, $AE = EC$,

$\because \cot B = \frac{3}{2}$,

在 $\text{Rt}\triangle BEA$ 中, $\frac{BE}{AE} = \frac{3}{2}$,

设 $BE = 3x$, $AE = 2x$,

$\therefore BC = BE + EC = BE + AE = 10$,

$\therefore x = 2$,

$\therefore BE = 6$, $EA = EC = 4$,

由勾股定理得: $AB^2 + BE^2 = AE^2$.

即 $AB^2 = 36 + 16 = 52$.

$\therefore AB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

(2) 由 (1) 知 $AB = 2\sqrt{13}$,

又 $\because D$ 为 AB 的中点,

$$\therefore BD = AD = \sqrt{13},$$

$$\because DF \perp BC, AE \perp BC,$$

$$\therefore DF \parallel AE,$$

$$\because BD = AD,$$

$$\therefore BF = FE = \frac{1}{2} BE = 3.$$

$$\therefore DF = \frac{1}{2} AE = 2,$$

$$\therefore FC = FE + EC = 3 + 4 = 7$$

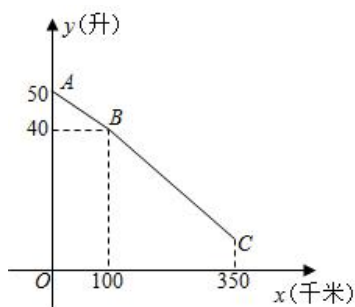
$$\therefore \tan \angle DCB = \frac{DF}{CF} = \frac{2}{7}.$$

【点睛】 本题考查了特殊角度、余切和正切的定义，以及三角形中位线的知识，是常见题型.

22. 一辆汽车从甲地出发前往相距 350 千米的乙地，在行驶了 100 千米后，因降雨，汽车每行驶 1 千米的耗油量比降雨前多 0.02 升. 如图中的折线 ABC 反映了该汽车行驶过程中，油箱中剩余的油量 y (升) 与行驶的路程 x (千米) 之间的函数关系.

(1) 当 $0 \leq x \leq 100$ 时，求 y 关于 x 的函数解析式 (不需要写出定义域);

(2) 当汽车到达乙地时，求油箱中的剩余油量.



【答案】 (1) $y = -\frac{1}{10}x + 50$; (2) 10 升

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 分别求出前 100 千米与后 250 千米的耗油量，再根据减法的意义列式计算即可.

【详解】 解: (1) 设当 $0 \leq x \leq 100$ 时， y 关于 x 的函数解析式为 $y = kx + b$ ，根据题意，

$$\text{把 } (100, 40)、(0, 50) \text{ 代入得 } \begin{cases} b = 50 \\ 100k + b = 40 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{10}, \\ b = 50 \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{10}x + 50;$$

(2) 由题意可知, 前 100 千米耗油量为 10 升,

后 250 千米的耗油量为: $250 \times (0.1 + 0.02) = 30$ (升),

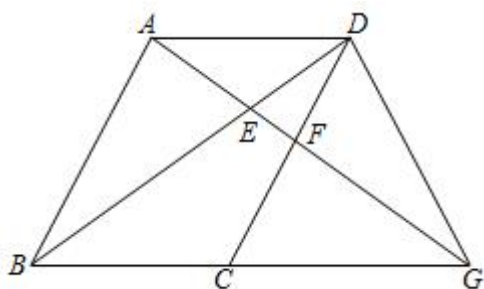
油箱中的剩余油量为: $50 - 10 - 30 = 10$ (升).

【点睛】 本题考查一次函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

23. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 G 是边 BC 延长线上一点, 联结 AG 分别交 BD 和 CD 于点 E 和 F , 联结 DG .

(1) 求证: $AE^2 = EF \cdot EG$;

(2) 如果 $\angle ABD = \angle AGD$, 求证: 四边形 $ABGD$ 是等腰梯形.



【答案】 (1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 证明 $\triangle ABE \sim \triangle FDE$, $\triangle ADE \sim \triangle GBE$, 利用相似三角形的性质得出比例式可得结论.

(2) 由已知得出 $\triangle DEF \sim \triangle GED$, 可以推出 $DE^2 = EF \cdot EG$, 利用 (1) 的结论可得 $DE = AE$, 进而说明 $\triangle AEB \cong \triangle DEG$, 结论可得.

【详解】 证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC.$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle FDE, \triangle ADE \sim \triangle GBE.$$

$$\therefore \frac{AE}{FE} = \frac{BE}{DE}, \frac{BE}{DE} = \frac{GE}{AE}.$$

$$\therefore \frac{AE}{FE} = \frac{GE}{AE}.$$

$$\therefore AE^2 = EF \cdot EG.$$

(2) $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle ABD = \angle CDB.$$

$$\because \angle ABD = \angle AGD,$$

$$\therefore \angle CDB = \angle AGD.$$

$$\because \angle DEF = \angle GED,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle GED.$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{EG}{DE}.$$

$$\therefore DE^2 = EF \cdot EG.$$

由 (1) 知: $AE^2 = EF \cdot EG$.

$$\therefore DE = AE.$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DEG$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle DEG \\ \angle ABE = \angle AGD \\ AE = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DEG \quad (AAS).$$

$$\therefore AB = DG.$$

$$\because AD \parallel BG,$$

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 是等腰梯形.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质, 平行四边形的性质, 等腰梯形的判定等知识点, 通过比例式的转化得出结论是解题的关键.

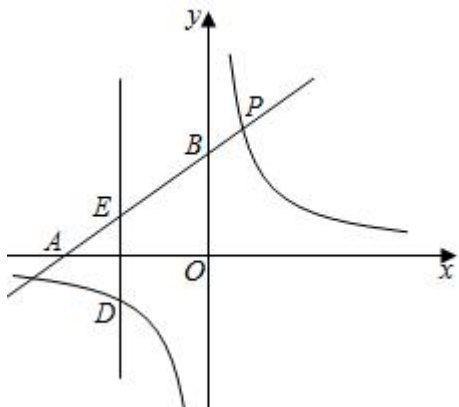
24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: y = \frac{3}{4}x + b$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B , 与双曲线 $H: y =$

$\frac{k}{x}$ 交于点 $P(2, \frac{9}{2})$, 直线 $x = m$ 分别与直线 l 和双曲线 H 交于点 E 、 D .

(1) 求 k 和 b 的值;

(2) 当点 E 在线段 AB 上时, 如果 $ED = BO$, 求 m 的值;

(3) 点 C 是 y 轴上一点, 如果四边形 $BCDE$ 是菱形, 求点 C 的坐标.



【答案】(1) $k=9$, $b=3$; (2) $m=-2\sqrt{3}$; (3) $(0, -\frac{3}{4})$ 或 $(0, \frac{39}{8})$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法将点 $P(2, \frac{9}{2})$ 分别代入直线 l 和双曲线 H 的解析式中, 即可求出 k 和 b 的

值;

(2) 由题意可得 $E(m, \frac{3}{4}m+3)$, $D(m, \frac{9}{m})$, 可得 $ED = \frac{3}{4}m+3 - \frac{9}{m}$, 利用 $ED=BO$, 建立方程求解即可;

(3) 过点 E 作 $EF \perp y$ 轴于点 F , 运用勾股定理求出 $BE = \frac{5}{4}|m|$, 由于四边形 $BCDE$ 是菱形, 可得 $BE=DE=BC$, 建立方程求解即可.

【详解】解: (1) 把点 $P(2, \frac{9}{2})$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 得: $\frac{9}{2} = \frac{k}{2}$,

解得: $k=9$;

把点 $P(2, \frac{9}{2})$ 代入 $y = \frac{3}{4}x+b$, 得: $\frac{3}{2}+b = \frac{9}{2}$,

解得: $b=3$;

(2) 在直线 $y = \frac{3}{4}x+3$ 中, 令 $x=0$, 得: $y=3$,

$\therefore B(0, 3)$,

$\therefore OB=3$,

令 $y=0$, 得: $\frac{3}{4}x+3=0$,

解得: $x=-4$,

$\therefore A(-4, 0)$,

$\therefore$ 直线 $x=m$ 分别与直线 $y = \frac{3}{4}x+3$ 和双曲线 $y = \frac{9}{x}$ 交于点 E 、 D .

$$\therefore E \left(m, \frac{3}{4}m+3 \right), D \left(m, \frac{9}{m} \right),$$

$\because$ 点 E 在线段 AB 上,

$$\therefore -4 \leq m \leq 0,$$

$$\therefore ED = \frac{3}{4}m+3 - \frac{9}{m},$$

$$\because ED = BO,$$

$$\therefore \frac{3}{4}m+3 - \frac{9}{m} = 3,$$

$$\text{解得: } m_1 = -2\sqrt{3}, m_2 = 2\sqrt{3},$$

经检验, $m_1 = -2\sqrt{3}, m_2 = 2\sqrt{3}$ 都是原方程的解, 但 $-4 \leq m \leq 0$,

$$\therefore m = -2\sqrt{3};$$

(3) 如图, 过点 E 作 $EF \perp y$ 轴于点 F ,

$$\because B(0, 3), E \left(m, \frac{3}{4}m+3 \right), D \left(m, \frac{9}{m} \right),$$

$$\therefore F \left(0, \frac{3}{4}m+3 \right),$$

$$\therefore BE^2 = BF^2 + EF^2 = \left[3 - \left(\frac{3}{4}m+3 \right) \right]^2 + m^2 = \frac{25}{16}m^2,$$

$$\therefore BE = \frac{5}{4}|m|,$$

$$\text{又有 } DE = \left| \frac{3}{4}m+3 - \frac{9}{m} \right|,$$

$\because$ 四边形 $BCDE$ 是菱形,

$$\therefore BE = DE = BC,$$

$$\therefore \frac{5}{4}|m| = \left| \frac{3}{4}m+3 - \frac{9}{m} \right|,$$

$$\text{解得: } m_1 = -3, m_2 = \frac{3}{2},$$

$$\text{当 } m_1 = -3 \text{ 时, } D(-3, -3), E \left(-3, \frac{3}{4} \right),$$

$$\therefore DE = \frac{3}{4} - (-3) = \frac{15}{4},$$

$$\therefore BC = \frac{15}{4},$$

$$\therefore C \left(0, -\frac{3}{4} \right);$$

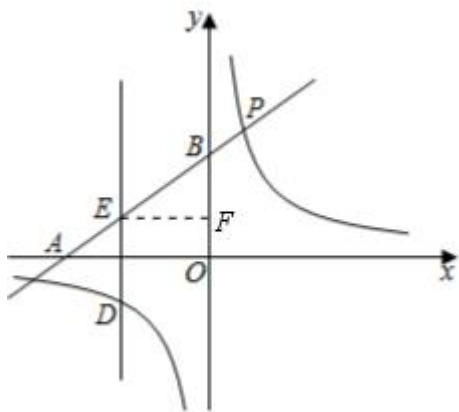
$$\text{当 } m_2 = \frac{3}{2} \text{ 时, } D \left(\frac{3}{2}, 6 \right), E \left(\frac{3}{2}, \frac{33}{8} \right),$$

$$\therefore DE = 6 - \frac{33}{8} = \frac{15}{8},$$

$$\therefore BC = \frac{15}{8},$$

$$\therefore C \left(0, \frac{39}{8} \right);$$

综上所述，点 C 的坐标为 $\left(0, -\frac{3}{4} \right)$ 或 $\left(0, \frac{39}{8} \right)$.



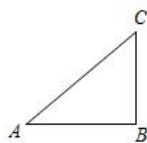
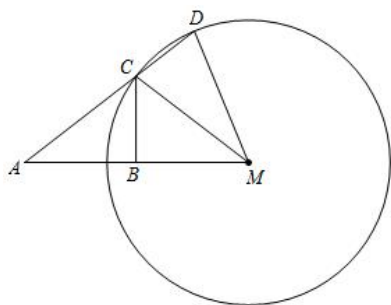
【点睛】本题考查了一次函数和反比例函数的综合题，待定系数法，勾股定理，菱形性质等，熟练掌握反比例函数图像和性质等相关知识，灵活运用数形结合思想和方程思想是解题关键.

25. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\tan A = \frac{3}{4}$ ， $AC = 5$ ，点 M 是射线 AB 上一点，以 MC 为半径的 $\odot M$ 交直线 AC 于点 D .

(1) 如图，当 $MC = AC$ 时，求 CD 的长；

(2) 当点 D 在线段 AC 的延长线上时，设 $BM = x$ ，四边形 $CBMD$ 的面积为 y ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出它的定义域；

(3) 如果直线 MD 与射线 BC 相交于点 E ，且 $\triangle ECD$ 与 $\triangle EMC$ 相似，求线段 BM 的长.



备用图

【答案】(1) $\frac{14}{5}$ ；(2) $y = \frac{3}{50} (8x^2 + 39x - 72)$ ；(3) 6

【解析】

【分析】(1) 在 $\text{Rt}\triangle AMN$ 中， $MN = AM \sin A = (4+4) \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5}$ ，则

$$CD=2CN=2\sqrt{MC^2-MN^2}=2\sqrt{5^2-(\frac{24}{5})^2}=\frac{14}{5};$$

(2) 如图 1, 设 $CD=2m$, 则 $CM^2=BC^2+MB^2=9+x^2$, 在 $\text{Rt}\triangle AMN$ 中, $AN^2+MN^2=AM^2$, 即 $(5+m)^2+9+x^2-m^2=$

$(4+x)^2$, 解得 $m=\frac{1}{5}(4x-9)$, 进而求解;

(3) 当点 M 在点 B 的右侧时, 在 $\text{Rt}\triangle DPM$ 中, $DP=DM\sin\angle EMC=r\sin\alpha=\frac{4}{5}r$, $MP=r\cos\alpha=\frac{3}{5}r$, 则 $CP=r-MP=r-\frac{3}{5}r=\frac{2}{5}r$, $CD=\sqrt{DP^2+CP^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}r=2CN$, 则 $MN=\sqrt{r^2-CN^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}r$, 进而求解.

【详解】解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\tan A=\frac{3}{4}$, $AC=5$, 设 $\angle A=\alpha$,

则 $BC=3$, $AB=4=BM$, $\sin A=\frac{3}{5}=\sin\alpha$, $\cos A=\frac{4}{5}=\cos\alpha$,

如图 1, $MC=MD=5$, 过点 M 作 $MN\perp CD$ 于点 N ,

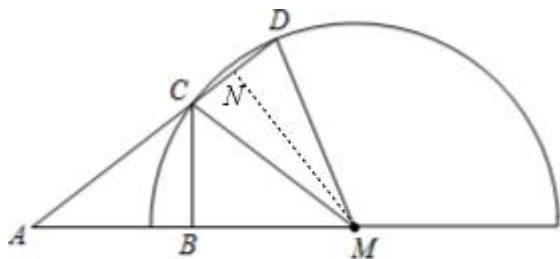


图1

$\therefore MC=MD$, 则 $CN=\frac{1}{2}CD$,

在 $\text{Rt}\triangle AMN$ 中, $MN=AM\sin A=(4+4)\times\frac{3}{5}=\frac{24}{5}$,

则 $CD=2CN=2\sqrt{MC^2-MN^2}=2\sqrt{5^2-(\frac{24}{5})^2}=\frac{14}{5}$;

(2) 如图 1, 设 $CD=2m$, 则 $CM^2=BC^2+MB^2=9+x^2$,

则 $MN^2=CM^2-m^2=x^2+9-m^2$,

在 $\text{Rt}\triangle AMN$ 中, $AN^2+MN^2=AM^2$,

即 $(5+m)^2+9+x^2-m^2=(4+x)^2$, 解得 $m=\frac{1}{5}(4x-9)$,

则 $MN=\sqrt{x^2+9-\frac{1}{25}(4x-9)^2}=\frac{3}{5}(4x-9)=\frac{3}{5}(x+4)$;

则 $S=\frac{1}{2}CD\cdot MN+\frac{1}{2}\times BM\cdot BC=\frac{3}{50}(8x^2+39x-72)$;

$\therefore m=\frac{1}{5}(4x-9)>0$,

$$\therefore x > \frac{9}{4};$$

$$\because BM < MC,$$

$$\therefore \frac{9}{4} < x < 5.$$

(3) 如图 2, 过点 M 作 $MN \perp CD$ 于点 N , 过点 D 作 $PD \perp CM$ 于点 P ,

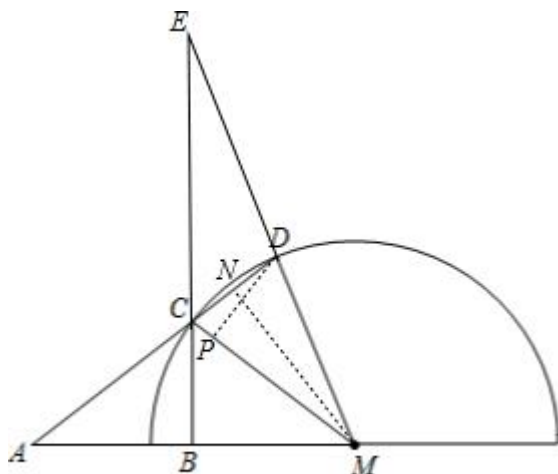


图2

设圆的半径为 r ,

$\because \triangle ECD$ 与 $\triangle EMC$ 相似, 则 $\angle ECD = \angle EMC = \angle ACB = \alpha$,

在 $\text{Rt}\triangle DPM$ 中, $DP = DM \sin \angle EMC = r \sin \alpha = \frac{4}{5}r$, $MP = r \cos \alpha = \frac{3}{5}r$,

则 $CP = r - MP = r - \frac{3}{5}r = \frac{2}{5}r$, $CD = \sqrt{DP^2 + CP^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}r = 2CN$,

$$\therefore MN = \sqrt{r^2 - CN^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}r,$$

$$\therefore \tan A = \frac{MN}{AN} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}r}{5 + \frac{\sqrt{5}}{5}r}, \text{ 解得 } r = 3\sqrt{5},$$

$$\text{则 } BM = \sqrt{r^2 - BC^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2} = 6.$$

综上, MB 为 6.

【点睛】 本题考查的是圆的综合题, 涉及到圆的基本性质、解直角三角形、勾股定理的运用等, 有一定的综合性, 难度适中.

