

2021 年上海市松江区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列二次根式中，最简二次根式是（ ）

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ D. $\sqrt{0.2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义进行判断即可

【详解】解：A、 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，不是最简二次根式；

B、 $\sqrt{6}$ 不能化简，符合题意；

C、 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，能化简，不符合题意；

D、 $\sqrt{0.2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，能化简，不符合题意；

故选：B.

【点睛】此题主要考查了最简二次根式，正确掌握相关定义是解题关键，在判断最简二次根式的过程中要注意：（1）在二次根式的被开方数中，只要含有分数或小数，就不是最简二次根式；（2）在二次根式的被开方数中的每一个因式（或因数），如果幂的指数大于或等于 2，也不是最简二次根式.

2. 将抛物线 $y = (x - 2)^2 + 1$ 向上平移 3 个单位，得到新抛物线的顶点坐标是（ ）

- A. (2, 4) B. (-1, 1) C. (5, 1) D. (2, -2)

【答案】A

【解析】

【分析】根据平移规律，上加下减，左加右减，可得顶点式解析式.

【详解】解：将抛物线 $y = (x - 2)^2 + 1$ 向上平移 3 个单位，

得 $y = (x - 2)^2 + 1 + 3$ ，即 $y = (x - 2)^2 + 4$ ，

顶点坐标为(2,4)，

故选：A.

【点睛】主要考查了函数图象的平移，要求熟练掌握平移的规律：左加右减，上加下减.

3. 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 4x + 1 = 0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是 ()

- A. $k > 4$ B. $k \leq 4$ C. $k < 4$ 且 $k \neq 0$ D. $k \leq 4$ 且 $k \neq 0$

【答案】D

【解析】

【分析】

若一元二次方程有两个实数根，则根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ，建立关于 k 的不等式，求出 k 的取值范围. 还要注意二次项系数不为 0.

【详解】解：∵方程有两个实数根，

∴根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4k \geq 0$,

即 $k \leq 4$, 且 $k \neq 0$.

故选：D.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式的应用. 切记不要忽略一元二次方程二次项系数不为零这一隐含条件.

4. 下列各统计量中，表示一组数据波动程度的量是 ().

- A. 平均数 B. 众数 C. 方差 D. 频率

【答案】C

【解析】

【详解】试题分析：平均数表示一组数据的平均程度，众数表示一组数据中出现次数最多的数，反映数据的聚散程度，而方差和标准差反映是一组数据的波动程度.

考点：基本统计量的意义.

5. 已知三角形两边的长分别是 4 和 9，则此三角形第三边的长可以是 ()

- A. 4 B. 5 C. 10 D. 15

【答案】C

【解析】

【分析】根据三角形的三边关系定理求出第三边的范围即可选出答案.

【详解】解: 设第三边长为 x , 则由三角形三边关系定理得 $9-4 < x < 4+9$,

因此, 三角形的第三边应满足 $5 < x < 13$,

只有 10 符合不等式,

故选: C.

【点睛】本题考查了三角形的三边关系定理, 熟记定理是解题关键.

6. 已知 $\odot O$ 的半径 OA 长为 3, 点 B 在线段 OA 上, 且 $OB=2$, 如果 $\odot B$ 与 $\odot O$ 有公共点, 那么 $\odot B$ 的半径 r 的取值范围是 ()

A. $r \geq 1$

B. $r \leq 5$

C. $1 < r < 5$

D. $1 \leq r \leq 5$

【答案】D

【解析】

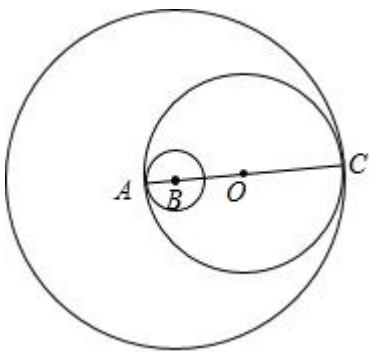
【分析】求得 $\odot B$ 在 $\odot O$ 内部且有唯一公共点时 $\odot B$ 的半径和 $\odot O$ 在 $\odot B$ 内部且有唯一公共点时 $\odot B$ 的半径, 根据图形即可求得.

【详解】解: 如图, 当 $\odot B$ 在 $\odot O$ 内部且有唯一公共点时, $\odot B$ 的半径为: $3-2=1$,

当 $\odot O$ 在 $\odot B$ 内部且有唯一公共点时, $\odot B$ 的半径为 $3+2=5$,

$\therefore$ 如果 $\odot B$ 与 $\odot O$ 有公共点, 那么 $\odot B$ 的半径 r 的取值范围是 $1 \leq r \leq 5$,

故答案为: D.



【点睛】本题考查了点与圆的位置关系, 注意掌握数形结合和分类讨论思想的应用.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 计算: $8^{\frac{1}{3}} = \underline{\quad}$.

【答案】2

【解析】

【分析】求 $\sqrt[3]{8}$ 是多少，即求 8 的立方根是多少，根据立方根的定义即可求解.

【详解】 $\because 2^3 = 8$

$$\therefore \sqrt[3]{8} = 2$$

故答案为：2.

【点睛】本题主要考查了立方根的概念的运用.如果一个数 x 的立方等于 a ，即 x 的三次方等于 a ($x^3 = a$)，那么这个数 x 就叫做 a 的立方根，也叫做三次方根.

8. 分解因式： $a^2 - 4b^2 =$ _____.

【答案】 $(a+2b)(a-2b)$

【解析】

【详解】首先把 $4b^2$ 写成 $(2b)^2$ ，再直接利用平方差公式进行分解即可.

$$\text{解： } a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2 = (a+2b)(a-2b),$$

故答案为 $(a+2b)(a-2b)$.

9. 方程 $\sqrt{2x-3}=1$ 的解是_____.

【答案】 $x=2$

【解析】

【详解】 $\sqrt{2x-3}=1$ ，两边平方得， $2x-3=1$ ，

解得， $x=2$ ；

经检验， $x=2$ 是方程的根；

故答案为 $x=2$.

考点：解无理方程.

10. 数 0.00035 用科学记数法表示为_____.

【答案】 3.5×10^{-4}

【解析】

【分析】根据科学计数法可直接得出答案.

【详解】解：数 0.00035 用科学记数法表示为 3.5×10^{-4} .

故答案为： 3.5×10^{-4} .

【点睛】 本题主要考查科学计数法，熟练掌握方法是解题的关键.

11. 用换元法解方程 $\frac{x-1}{x} + \frac{2x}{x-1} = 3$ 时，设 $\frac{x-1}{x} = y$ ，那么原方程化成关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 3y + 2 = 0$

【解析】

【分析】 根据题意，用含 y 的式子表示出方程并整理方程即可.

【详解】 解： 设 $\frac{x-1}{x} = y$ ， 则 $\frac{2x}{x-1} = \frac{2}{y}$.

所以原方程可变形为： $y + \frac{2}{y} = 3$.

方程的两边都乘以 y ， 得 $y^2 + 2 = 3y$.

即 $y^2 - 3y + 2 = 0$.

故答案为： $y^2 - 3y + 2 = 0$.

【点睛】 本题考查了换元法，掌握换元法解方程一般步骤及方法是解题的关键.

12. 已知反比例函数 $y = \frac{k-2}{x}$ 的图象在每个象限内 y 的值随 x 的值增大而减小，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k > 2$

【解析】

【分析】 根据反比例函数图像在每个象限内 y 的值随 x 的值增大而减小，可知 $k-2$ 范围，进行求解即可.

【详解】 解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k-2}{x}$ 的图象在每个象限内 y 的值随 x 的值增大而减小，

$\therefore k-2 > 0$,

解得 $k > 2$.

故答案为 $k > 2$

【点睛】 本题考察反比例图像与性质，属于基础题型.

13. 布袋中装有 4 个红球和 5 个白球，它们除颜色不同外其他都相同. 如果从布袋中随机摸出一个球，那么摸到的球恰好为红球的概率是_____.

【答案】 $\frac{4}{9}$

【解析】

【分析】 根据概率计算公式进行计算即可.

【详解】解：∵一个布袋里装有 4 个红球和 5 个白球，

∴摸出一个球摸到红球的概率为： $\frac{4}{4+5} = \frac{4}{9}$ 。

故答案为： $\frac{4}{9}$ 。

【点睛】本题考查了概率，掌握概率的计算公式是解题的关键。

14. 一次数学测试后，某班 40 名学生按成绩分成 5 组，第 1、2、3、4 组的频数分别为 13、10、6、7，则第 5 组的频率为_____。

【答案】0.1。

【解析】

【分析】根据第 1-4 组的频数，求出第 5 组的频数，即可确定出其频率。

【详解】解：第 5 组的频数为： $40 - 13 - 10 - 6 - 7 = 4$ ，

第 5 组的频率为： $\frac{4}{40} = 0.1$ ，

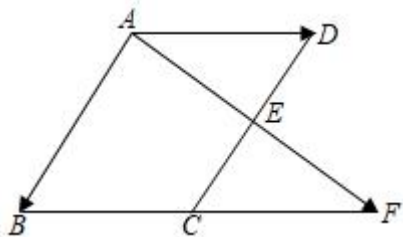
故答案为：0.1。

【点睛】本题考查频数与频率，解题的关键是熟练运用频数与频率的关系，用到的知识点：各小组频数之

和等于数据综合， $\text{频率} = \frac{\text{频数}}{\text{数据总数}}$ 。

15. 如图，已知 $\square ABCD$ ， E 是边 CD 的中点，联结 AE 并延长，与 BC 的延长线交于点 F 。设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，

用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AF}$ 为_____。



【答案】 $\vec{a} + 2\vec{b}$

【解析】

【分析】利用三角形中位线的性质得到 $BC = FC$ ，在 $\triangle ABF$ 中，利用三角形法则求得 $\overrightarrow{AF}$ 。

【详解】解：在 $\square ABCD$ 中， $CD \parallel AB$ 。

∵ E 是边 CD 的中点，

∴ CE 是 $\triangle ABF$ 的中位线，

∴ $BC = CF$ 。

在四边形 $ABCD$ 中, $AD=BC$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, 则 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}=2\vec{b}$.

$$\therefore \overrightarrow{AB}=\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\vec{a}+2\vec{b}.$$

故答案是: $\vec{a}+2\vec{b}$.

【点睛】 本题主要考查了平面向量, 平行四边形的性质, 解题的关键是运用三角形法则求得答案.

16. 已知正三角形 ABC 外接圆的半径为 2, 那么正三角形 ABC 的面积为_____.

【答案】 $3\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】 根据题意作出图形, 构造直角三角形求得三角形的边长即可求得本题的答案.

【详解】 解: 如图所示:

连接 OA 、 OB 、 OC , 过 O 作 $OD \perp BC$ 于 D ,

$\because$ 正三角形 ABC 外接圆的半径为 2,

$$\therefore OA=OB=OC=2, \quad \angle ABC=60^\circ,$$

$$\therefore \angle OBD=30^\circ,$$

$\because OD \perp BC$,

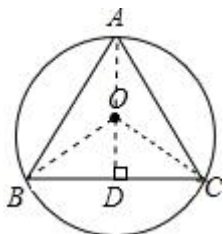
$$\therefore \angle ODB=90^\circ, \quad OD=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2} \times 2=1,$$

$$\therefore BD=\sqrt{3}OD=\sqrt{3},$$

$$\therefore BC=2BD=2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC \times AD=\frac{1}{2}BC \times (AO+OD)=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times (2+1)=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3=3\sqrt{3},$$

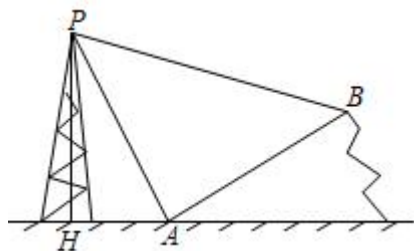
故答案为: $3\sqrt{3}$.



【点睛】 本题考查的是正三角形的性质、边心距、半径、面积的计算; 熟练掌握正三角形的性质, 根据题意画出图形, 利用数形结合求解是解答此题的关键.

17. 如图, 某人在山坡坡脚 A 处测得电视塔塔尖点 P 的仰角为 60° , 沿山坡向上走 200 米到达 B 处, 在 B 处

测得点 P 的仰角为 15° . 已知山坡 AB 的坡度 $i = 1: \sqrt{3}$, 且 H 、 A 、 B 、 P 在同一平面内, 那么电视塔的高度 PH 为_____米. (结果保留根号形式)

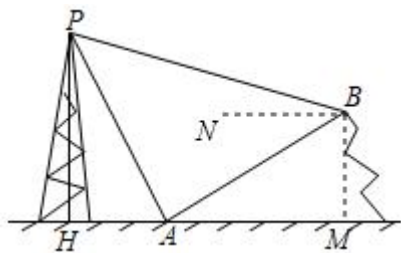


【答案】 $100\sqrt{3}$

【解析】

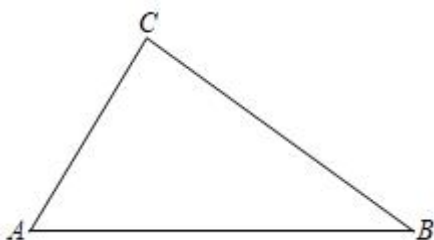
【分析】 过 B 作 $BM \perp HA$ 于 M , 过 B 作 $BN \parallel AM$, 由山坡 AB 的坡度 $i = 1: \sqrt{3}$ 解得 $\angle BAM = 30^\circ$, 继而证明 $\triangle PAB$ 是等腰直角三角形, 解得 $PA = AB = 200$ 米, 在 $\text{Rt}\triangle PAH$ 中, 利用正弦定义解得 $\frac{PH}{PA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 据此解题即可.

【详解】 解: 过 B 作 $BM \perp HA$ 于 M , 过 B 作 $BN \parallel AM$
 则 $\angle AMB = 90^\circ$, $\angle ABN = \angle BAM$,
 由题意得: $AB = 200$ 米, $\angle PBN = 15^\circ$,
 $\therefore$ 山坡 AB 的坡度 $i = 1: \sqrt{3}$,
 $\therefore \tan \angle BAM = 1: \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
 $\therefore \angle BAM = 30^\circ$,
 $\therefore \angle ABN = 30^\circ$,
 $\therefore \angle PAB = 180^\circ - \angle PAH - \angle BAM = 90^\circ$, $\angle ABP = \angle ABN + \angle PBN = 45^\circ$,
 $\therefore \triangle PAB$ 是等腰直角三角形,
 $\therefore PA = AB = 200$ 米,
 在 $\text{Rt}\triangle PAH$ 中, $\sin \angle PAH = \frac{PH}{PA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\therefore PH = \frac{\sqrt{3}}{2} PA = 100\sqrt{3}$,
 故答案为: $100\sqrt{3}$.



【点睛】 本题考查解直角三角形的实际应用，涉及正弦、正切、坡度等知识，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键.

18. 如图，已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$. 将 $\triangle ABC$ 翻折，使点 C 落在 AB 边上的点 D 处，折痕 EF 交边 AC 于点 E ，交边 BC 于点 F ，如果 $DE \parallel BC$ ，则线段 EF 的长为_____.

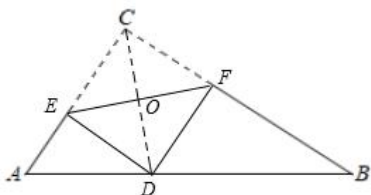


【答案】 $\frac{24\sqrt{2}}{7}$.

【解析】

【分析】 根据折叠的性质可知， $EC = ED$ ， $FC = FD$ ， $\angle CEF = \angle DEF$ ， EF 是 CD 的垂直平分线，进而得出四边形 $CEDF$ 是正方形，设未知数，利用相似三角形、直角三角形的边角关系求解即可.

【详解】 解： 如图所示：



由折叠可知， $EC = ED$ ， $FC = FD$ ， $\angle CEF = \angle DEF$ ， EF 是 CD 的垂直平分线，

$\therefore DE \parallel BC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AED = \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CEF = \angle DEF = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle CED = \angle ECF = \angle EDF = 90^\circ$

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是正方形，

设 $CF = x$ ，则 $AE = 6 - x$ ， $BF = 8 - x$ ，

由 $\triangle AED \sim \triangle DFB$ 得，

$$\frac{AE}{DF} = \frac{ED}{FB},$$

$$\text{即 } \frac{6-x}{x} = \frac{x}{8-x},$$

$$\text{解得 } x = \frac{24}{7},$$

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中,

$$EF = \sqrt{2}CF = \frac{24\sqrt{2}}{7},$$

$$\text{故答案为: } \frac{24\sqrt{2}}{7}.$$

【点睛】本题考查折叠轴对称，正方形的判定和性质，相似三角形以及直角三角形的边角关系，理解折叠轴对称的性质和直角三角形的边角关系是解题的关键.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 先化简，再求值： $\frac{2x-6}{x+2} \div (x-2-\frac{5}{x+2})$ ，其中 $x = -\frac{1}{2}$.

【答案】 $\frac{2}{x+3}, \frac{4}{5}$

【解析】

【分析】先根据分式混合运算的法则把 $\frac{2x-6}{x+2} \div (x-2-\frac{5}{x+2})$ 进行化简，再把 $x = -\frac{1}{2}$ 代入进行计算即可.

【详解】解： $\frac{2x-6}{x+2} \div (x-2-\frac{5}{x+2})$,

$$= \frac{2x-6}{x+2} \div \frac{x^2-9}{x+2},$$

$$= \frac{2(x-3)}{x+2} \times \frac{x+2}{x^2-9},$$

$$= \frac{2(x-3)}{x+2} \times \frac{x+2}{(x-3)(x+3)},$$

$$= \frac{2}{x+3},$$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时,

$$\text{原式} = \frac{2}{-\frac{1}{2}+3} = \frac{4}{5}.$$

【点睛】考查了分式的化简求值. 解题的关键是对分式的分子分母因式分解及分式混合运算顺序和运算法则.

20. 解方程组: $\begin{cases} x+3y=4 \\ x^2+4xy-5y^2=0 \end{cases}$.

【答案】 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}, \begin{cases} x_2=10 \\ y_2=-2 \end{cases}$.

【解析】

【分析】先将第二个方程利用因式分解法得到两个一元一次方程，然后分别与第一个方程联立成二元一次方程组，分别解方程组即可.

【详解】 $\begin{cases} x+3y=4 \textcircled{1} \\ x^2+4xy-5y^2=0 \textcircled{2} \end{cases}$

由②得: $(x-y)(x+5y)=0$;

所以, $x-y=0$ 或 $x+5y=0$;

整理得: $\begin{cases} x+3y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+3y=4 \\ x+5y=0 \end{cases}$;

解得: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=10 \\ y=-2 \end{cases}$;

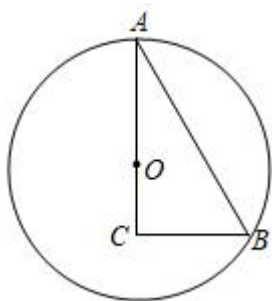
所以, 原方程组的解为 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}, \begin{cases} x_2=10 \\ y_2=-2 \end{cases}$.

【点睛】本题主要考查二元二次方程组的解法, 能够将原方程组转化成两个二元一次方程组是解题的关键.

21. 如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\cot\angle BAC=2$, $BC=4$, 以边 AC 上一点 O 为圆心, OA 为半径的 $\odot O$ 经过点 B .

(1) 求 $\odot O$ 的半径;

(2) 点 P 是劣弧 AB 的中点, 求 $\tan\angle PAB$ 的值.



【答案】 (1) $\odot O$ 的半径为 5; (2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 如图 1 连接 OB ，设 $\odot O$ 的半径为 r ，解直角三角形求出 AC 的长，利用勾股定理列方程可得结论；

(2) 如图 2，作辅助线，构建直角三角形，先根据垂径定理可得 OE 和 PE 的长，最后根据三角函数定义可得结论.

【详解】解：(1) 如图 1，连接 OB ，

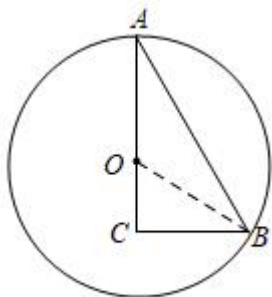


图1

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\because \angle C = 90^\circ$ ， $BC = 4$ ，

$$\because \cot \angle BAC = 2, \quad BC = 4,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = 2,$$

$$\therefore \frac{AC}{4} = 2,$$

$$\therefore AC = 8,$$

设 $\odot O$ 的半径为 r ，则 $OB = r$ ，

在 $\text{Rt}\triangle OCB$ 中，由勾股定理得： $OB^2 = OC^2 + BC^2$ ，

$$\therefore r^2 = (8 - r)^2 + 4^2,$$

解得： $r = 5$ ，

$\therefore \odot O$ 的半径为 5；

(2) 如图 2，连接 OP ， OP 交 AB 于 E ，

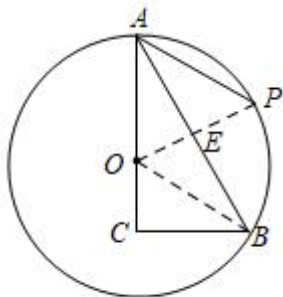


图2

$\text{Rt}\triangle OCB$ 中，由勾股定理得： $OC = 3$ ，

$$\text{Rt}\triangle ACB \text{ 中, } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5},$$

$\therefore$ 点 P 是劣弧 AB 的中点,

$$\therefore OP \perp AB,$$

$$\therefore AE = BE = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore EP = OP - OE = 5 - \sqrt{5},$$

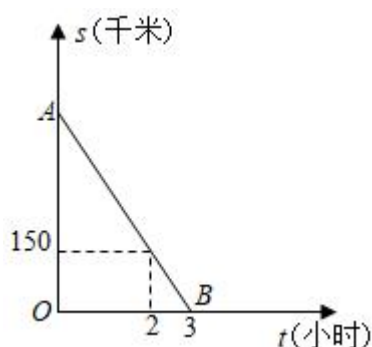
$$\text{Rt}\triangle AEP \text{ 中, } \tan \angle PAB = \frac{PE}{AE} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} - 5}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

【点睛】 本题考查解直角三角形，垂径定理，勾股定理，锐角三角函数等知识，解题的关键是熟练掌握基本知,属于中考常考题型.

22. 一辆轿车和一辆货车分别从甲、乙两地同时出发，匀速相向而行，两车相遇时轿车比货车多行驶了 90 千米. 设行驶的时间为 t (小时)，两车之间的距离为 s (千米)，图中线段 AB 表示从两车发车至两车相遇这一过程中 s 与 t 之间的函数关系，根据图象提供的信息回答下列问题：

(1) 求 s 关于 t 的函数关系式；(不必写出定义域)

(2) 求两车的速度.



【答案】 (1) $s = -150t + 450$; (2) 轿车和货车速度分别为 90 千米/小时，60 千米/小时.

【解析】

【分析】 (1) 观察图像找出直线上的两个点坐标，带入计算即可；

(2) 由 $s = -150t + 450$ ，可知甲、乙两车相距 450 千米，相遇时间是 3 小时，根据题型列出方程组求解即可.

【详解】 解：(1) 设 s 关于 t 的函数关系式为 $s = kt + b$ ，根据题意

$$\begin{cases} 2k + b = 150 \\ 3k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -150 \\ b = 450 \end{cases},$$

$$\therefore s = -150t + 450;$$

(2) 由 $s = -150t + 450$, 可知甲, 乙两车相距 450 千米, 相遇时间是 3 小时

设两车相遇时, 设轿车和货车的速度分别为 v_1 千米/小时, v_2 千米/小时, 根据题意得:

$$\begin{cases} 3v_1 + 3v_2 = 450 \\ 3v_1 - 3v_2 = 90 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} v_1 = 90 \\ v_2 = 60 \end{cases}$$

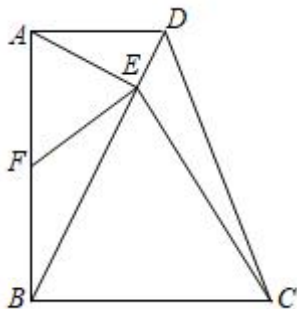
轿车和货车速度分别为 90 千米/小时, 60 千米/小时.

【点睛】本题主要考察了二元一次方程组, 一次函数等知识点, 能从图像中看出总路程是解题关键.

23. 如图, 已知在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AE \perp BD$, 垂足为 E , 联结 CE , 作 $EF \perp CE$, 交边 AB 于点 F .

(1) 求证: $\triangle AEF \sim \triangle BEC$;

(2) 若 $AB = BC$, 求证: $AF = AD$.



【答案】(1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据垂直证明 $\angle EAF = \angle CBE$, 再根据同角的余角相等得到 $\angle AEF = \angle BEC$, 即可得证;

(2) 根据平行线的性质得到 $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ$, 在根据垂直的性质得到 $\angle AEB = 90^\circ = \angle BAD$, 得到 $\triangle ABE \sim \triangle DBA$, 即可得解;

【详解】解: (1) 证明: $\because AE \perp BD$, $EF \perp CE$,

$$\therefore \angle AEB = \angle CEF = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle EAF = \angle ABE + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle CBE,$$

$$\because \angle AEF + \angle BEF = \angle BEC + \angle BEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle BEC,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle BEC;$$

(2) 证明: $\because AD \parallel BC, \angle ABC = 90^\circ,$

$$\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ = \angle BAD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle DBA,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DBA,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{AB},$$

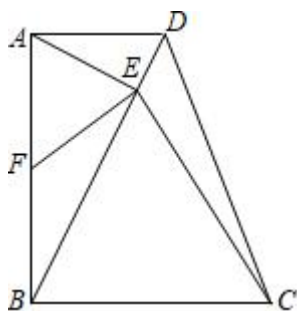
$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BC},$$

$$\therefore \frac{AF}{BC} = \frac{AD}{AB},$$

$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore AF = AD.$$



【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质，准确证明是解题的关键.

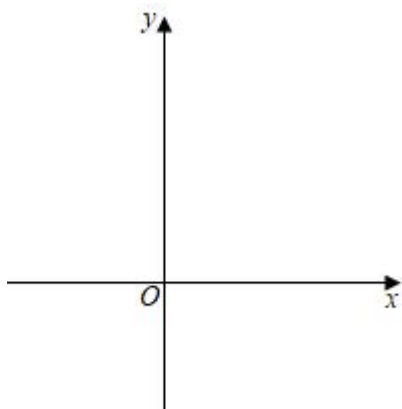
24. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = 3x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ，抛物线 $y = ax^2 + bx - 5a$ 经过点

A . 将点 B 向右平移 5 个单位长度，得到点 C .

(1) 求点 C 的坐标;

(2) 求抛物线的对称轴;

(3) 若抛物线的顶点在 $\triangle OBC$ 的内部，求 a 的取值范围.



【答案】(1) $C(5, 3)$; (2) $x=2$; (3) $-\frac{1}{3} < a < -\frac{2}{15}$.

【解析】

【分析】(1) 由 $y=3x+3$ 与 x 、 y 轴分别交于点 A 、 B ，可求出 A 、 B 坐标， B 向右移动 5 个单位即得 C 坐标；

(2) 将 A 坐标代入 $y=ax^2+bx-5a$ 可得 $b=-4a$ ，根据对称轴公式可得答案；

(3) 对称轴 $x=2$ 与 BC 交于 D ，与 OC 交于 E ，抛物线的顶点在 $\triangle OBC$ 的内部，则顶点在 D 和 E 之间，用 a 表示顶点纵坐标列不等式可得答案.

【详解】解：(1) 在 $y=3x+3$ 中，令 $x=0$ 得 $y=3$ ，令 $y=0$ 得 $x=-1$ ，

$\therefore A(-1, 0)$ ， $B(0, 3)$ ，

$\therefore$ 点 B 向右平移 5 个单位长度，得到点 C .

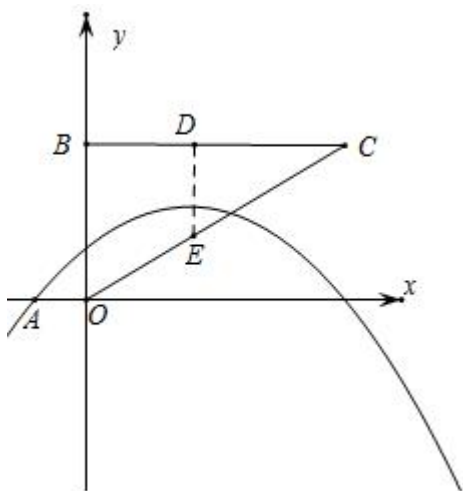
$\therefore C(5, 3)$ ；

(2) $\because A(-1, 0)$ ，抛物线 $y=ax^2+bx-5a$ 经过点 A ，

$\therefore 0=a-b-5a$ ，即 $b=-4a$ ，

$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx-5a$ 对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4a}{2a}=2$ ；

(3) 对称轴 $x=2$ 与 BC 交于 D ，与 OC 交于 E



设 OC 解析式为 $y=kx$ ，

$$\therefore (5, 3),$$

$$\therefore 3 = 5k,$$

$$\therefore k = \frac{3}{5},$$

$$\therefore OC \text{ 解析式为 } y = \frac{3}{5}x,$$

$$\text{令 } x = 2 \text{ 得 } y = \frac{6}{5}, \text{ 即 } E(2, \frac{6}{5}),$$

$$\text{由 (1) 知 } b = -4a,$$

$$\therefore \text{抛物线为 } y = ax^2 - 4ax - 5a,$$

$$\therefore \text{顶点坐标为 } (2, -9a),$$

抛物线的顶点在 $\triangle OBC$ 的内部, 则顶点在 D 和 E 之间,

$$\text{而 } D(2, 3),$$

$$\therefore \frac{6}{5} < -9a < 3,$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < a < -\frac{2}{15}.$$

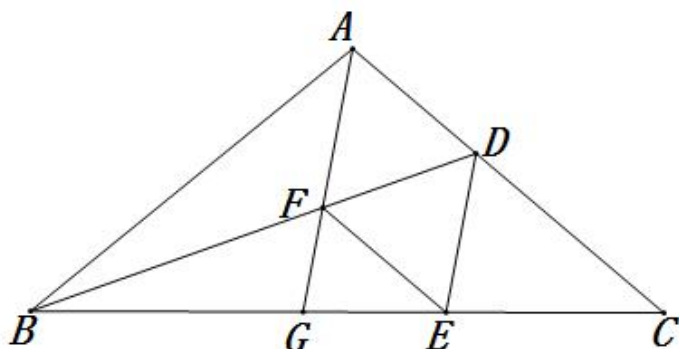
【点睛】本题考查点的平移、二次函数综合。(1) 中会求一次函数与坐标轴交点是解题关键; (2) 中掌握对称轴公式是解题关键; (3) 掌握顶点公式是解题关键。

25. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $BC > AB$, BD 平分 $\angle ABC$, 交边 AC 于点 D , E 是 BC 边上一点, 且 $BE = BA$, 过点 A 作 $AG \parallel DE$, 分别交 BD 、 BC 于点 F 、 G , 联结 FE .

(1) 求证: 四边形 $AFED$ 是菱形;

(2) 求证: $AB^2 = BG \cdot BC$;

(3) 若 $AB = AC$, $BG = CE$, 联结 AE , 求 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值.



【答案】(1) 见解析; (2) 见解析; (3) $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 由题目条件可证得 $\triangle ABF \cong \triangle EBF$ (SAS) 及 $\triangle ABD \cong \triangle EBD$ (SAS), 进而可推出 $AF = FE = ED = DA$, 可得出四边形 $AFED$ 是菱形.

(2) 根据条件可证得 $\triangle ABG \sim \triangle CBA$, 即可证明结论.

(3) 由条件可得 $\triangle DAE \sim \triangle ABC$, 由相似比可得 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{BC}\right)^2$, 由 $BE^2 = EC \cdot BC$, 得到点 E 是 BC 的黄金分割点, 可得出 $\frac{AE}{BC} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, 即可得出结论.

【详解】(1) 证明: $\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABF = \angle EBF,$$

$$\because BA = BE, BF = BF,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle EBF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AF = EF,$$

同理可得 $\triangle ABD \cong \triangle EBD$ (SAS),

$$\therefore AD = ED, \angle ADB = \angle EDB,$$

$$\therefore AG \parallel DE,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle EDF,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle ADF,$$

$$\therefore AF = AD,$$

$$\therefore AF = FE = ED = DA,$$

$\therefore$ 四边形 $AFED$ 是菱形.

(2) 证明: 由(1)得: $\triangle ABF \cong \triangle EBF$,

$$\therefore \angle BAG = \angle BEF,$$

$\because$ 四边形 $AFED$ 是菱形,

$$\therefore AD \parallel FE,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle C,$$

$$\therefore \angle BAG = \angle C,$$

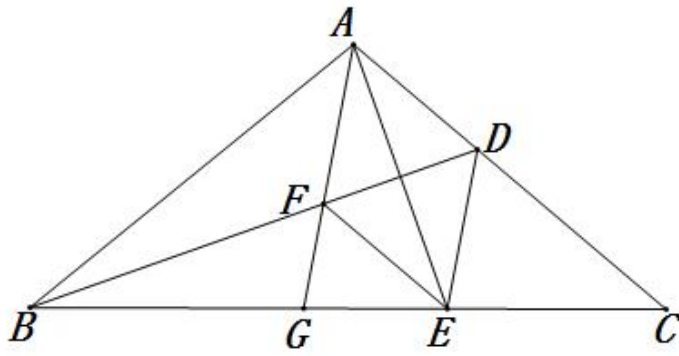
$$\because \angle ABG = \angle CBA,$$

$$\therefore \triangle ABG \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BG}{AB},$$

即 $AB^2 = BG \cdot BC$.

(3) 解: 如图,



$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABG = \angle C,$$

$$\because \angle BAG = \angle C,$$

$$\therefore \angle ABG = \angle BAG,$$

$$\because \angle AGC = \angle ABG + \angle BAG,$$

$$\therefore \angle AGC = 2\angle BAG,$$

$$\because BG = CE,$$

$$\therefore BE = CG,$$

$$\therefore CG = CA,$$

$$\therefore \angle CAG = \angle CGA,$$

$$\because \angle CAG = 2\angle DAE,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle DEA = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{BC}\right)^2,$$

$$\because AB^2 = BG \cdot BC, \quad AB = BE,$$

$$\therefore BE^2 = EC \cdot BC,$$

$\therefore$ 点 E 是 BC 的黄金分割点,

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$\because \angle EAC = \angle C,$$

$$\therefore CE = AE,$$

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}.$$

【点睛】 本题考查了菱形的判定，相似三角形的性质与判定及黄金分割点等知识，综合性较强，熟练掌握相关知识并灵活运用所学知识求解是解题的关键.