

2021 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. 下列各数中无理数是（ ）

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{22}{7}$

C. $\sqrt{4}$

D. $\sqrt[3]{27}$

【答案】A

【解析】

【分析】无理数就是无限不循环小数．理解无理数的概念，一定要同时理解有理数的概念，有理数是整数与分数的统称．即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数．由此即可判定选择项．

【详解】解：∵ $\frac{\pi}{2}$ 是无理数，

∴ A 正确；

∵ $\frac{22}{7}$ 是有理数，

∴ B 错误；

∵ $\sqrt{4} = 2$ 是有理数，

∴ C 错误；

∵ $\sqrt[3]{27} = 3$ 是有理数，

∴ D 错误；

故选：A．

【点睛】本题考查了实数的分类，熟练掌握有理数，无理数的定义是解题的关键．

2. 下列说法不一定成立的是（ ）

A. 若 $a > b$ ，则 $a + c > b + c$

B. 若 $a + c > b + c$ ，则 $a > b$

C. 若 $a > b$ ，则 $ac^2 > bc^2$

D. 若 $ac^2 > bc^2$ ，则 $a > b$

【答案】C

【解析】

【详解】A. 在不等式 $a > b$ 的两边同时加上 c ，不等式仍成立，即 $a + c > b + c$ ，故本选项错误；

B. 在不等式 $a + c > b + c$ 的两边同时减去 c ，不等式仍成立，即 $a > b$ ，故本选项错误；

C. 当 $c=0$ 时, 若 $a>b$, 则不等式 $ac^2 > bc^2$ 不成立, 故本选项正确;

D. 在不等式 $ac^2 > bc^2$ 的两边同时除以不为 0 的 c^2 , 该不等式仍成立, 即 $a>b$, 故本选项错误.

故选 C.

3. 下列方程中, 有实数根的方程是 ()

A. $x^4+1=0$

B. $\sqrt{x+2} = -1$

C. $\sqrt{x+2} = -x$

D. $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用乘方的意义可对 A 进行判断; 通过二次根式的性质可对 B、C 进行判断; 通过解分式方程可对 D 进行判断.

【详解】解: A、 $x^4 \geq 0$, $x^4+1 > 0$, 方程 $x^4+1=0$ 没有实数解;

B、 $\sqrt{x+2} \geq 0$, 故无实数解;

C、两边平方得 $x+2=x^2$, 解得 $x_1=-1$, $x_2=2$, 经检验, 原方程的解为 $x=-1$;

D、去分母得 $x=1$, 经检验原方程没有实数解,

故选: C.

【点睛】本题考查了乘方的意义, 分式方程, 无理方程和二次根式的性质, 熟悉相关性质是解题的关键.

4. 已知 A (x_1 , y_1) 和点 B (x_2 , y_2) 是双曲线 $y = \frac{2}{x}$ 上的两个点, 如果 $x_1 < x_2$, 那么 y_1 和 y_2 的大小关系正确的是 ()

A. $y_1 > y_2$

B. $y_1 < y_2$

C. $y_1 = y_2$

D. 无法判断

【答案】D

【解析】

【分析】由于点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) 不一定在同一象限, 所以无法判断出 y_1, y_2 的大小.

【详解】 $\because k=2>0$,

$\therefore$ 双曲线在第一、三象限,

①当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, $y_1 > y_2$;

②当 $0 < x_1 < x_2$ 时, $y_1 > y_2$;

③当 $x_1 < 0 < x_2$ 时, $y_1 < y_2$;

综上, 无法判断出 y_1, y_2 的大小,

故选: D.

【点睛】 本题考查了反比例函数的图像与性质, 熟练掌握反比例函数的图像与性质是解题关键.

5. 为了了解某校九年级 400 名学生的体重情况, 从中抽取 50 名学生的体重进行分析. 在这项调查中, 样本是指 ()

- A. 400 名学生
- B. 被抽取的 50 名学生
- C. 400 名学生的体重
- D. 被抽取的 50 名学生的体重

【答案】 D

【解析】

【详解】 本题考查的对象是某校九年级 400 名学生的体重情况,
故样本是九年级选取 50 名学生的体重情况.

故选 D.

6. 下列命题中, 真命题是 ()

- A. 平分弦的直径垂直于弦
- B. 垂直平分弦的直线平分这条弦所对的弧
- C. 在同圆中, 相等的弦所对的弧也相等
- D. 经过半径一端且垂直于这条半径的直线是圆的切线

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据圆的有关概念和性质、垂径定理进行判断解答.

【详解】 解: A、平分弦 (非直径) 的直径垂直于弦, 原命题是假命题;
B、垂直平分弦的直线平分这条弦所对的弧, 是真命题;
C、在同圆或等圆中, 相等的弦所对的弧也相等, 原命题是假命题;
D、经过半径外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线, 原命题是假命题;

故选: B.

【点睛】 本题考查了命题与定理的知识, 解题的关键是了解圆的有关概念和性质、垂径定理等知识.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $a^3 \cdot a^{-1} =$ _____.

【答案】 a^2

【解析】

【分析】 根据同底数幂的乘法, 可得答案.

【详解】 解: 原式 $= a^{3+(-1)}$

$= a^2$.

故答案为: a^2 .

【点睛】 本题主要考查同底数幂乘法运算, 掌握同底数幂乘法运算是解题的关键.

8. 分解因式: $x^2 - 4x =$ _____.

【答案】 $x(x - 4)$

【解析】

【详解】 解: $x^2 - 4x = x(x - 4)$.

故答案为: $x(x - 4)$.

9. 在函数 $y = \frac{x}{2x+3}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq -\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 由分式的分母不为 0, 求出 x 的范围.

【详解】 解: 根据题意得, $2x + 3 \neq 0$,

$\therefore x \neq -\frac{3}{2}$,

故答案为: $x \neq -\frac{3}{2}$.

【点睛】 此题是函数自变量的取值范围题, 主要考查了分式有意义的条件, 分母不为 0, 解本题的关键是列出不等式.

10. 不等式组 $\begin{cases} 3x - 15 \leq 0 \\ \frac{3-x}{2} > 1 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $x < 1$

【解析】

【分析】 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无

解了确定不等式组的解集.

【详解】解：解不等式 $3x - 15 \leq 0$ ，得： $x \leq 5$ ，

解不等式 $\frac{3-x}{2} > 1$ ，得： $x < 1$ ，

则不等式组的解集为 $x < 1$ ，

故答案为： $x < 1$ ．

【点睛】本题主要考查了一元一次不等式组的求解，准确计算是解题的关键．

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + m - 1 = 0$ 有两个相等的实数根，那么 m 的值为_____．

【答案】 10

【解析】

【分析】根据原方程根的情况，利用根的判别式求出 m 的值即可．

【详解】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + m - 1 = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = 36 - 4(m - 1) = 40 - 4m = 0,$$

解得 $m = 10$ ．

故答案为 10．

【点睛】本题考查了根的判别式，一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：（1） $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；（2） $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；（3） $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根．

12. 一个射箭运动员连续射靶 5 次，所得环数分别是：8，6，10，7，9，则这个运动员所得环数的标准差为_____．

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【详解】先由平均数的公式求得平均数的值，再根据方差的公式计算方差，最后计算标准差．

$$\text{解：由题意知：} \bar{x} = \frac{8+6+10+7+9}{5} = 8,$$

$$\text{方差 } S^2 = \frac{1}{5}[(8-8)^2 + (6-8)^2 + (10-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2] = 2$$

$\therefore$ 标准差是方差的算术平方根为 $\sqrt{2}$ ．

故填 $\sqrt{2}$ ．

点评：计算标准差需先算出方差，计算方差的步骤是：

（1）计算数据的平均数 $\bar{x}$ ；

- (2) 计算偏差，即每个数据与平均数的差；
- (3) 计算偏差的平方和；
- (4) 偏差的平方和除以数据个数.

标准差即方差的算术平方根；

注意标准差和方差一样都是非负数.

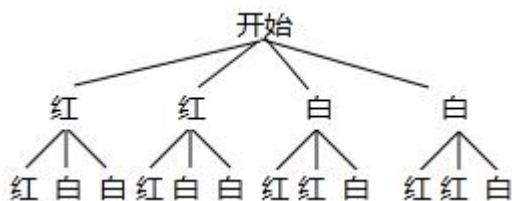
13. 在一个布袋中，装有除颜色外其他完全相同的 2 个红球和 2 个白球，如果从中随机摸出两个球，那么摸到的两个球颜色相同的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】画树状图，共有 12 个等可能的结果，摸到的两个球颜色相同的结果有 4 个，再由概率公式求解即可.

【详解】解：画树状图如图：



共有 12 个等可能的结果，摸到的两个球颜色相同的结果有 4 个，

$\therefore$ 摸到的两个球颜色相同的概率为 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【点睛】本题考查列表法或画树状图求概率，解题的关键是准确画出树状图或列出表格.

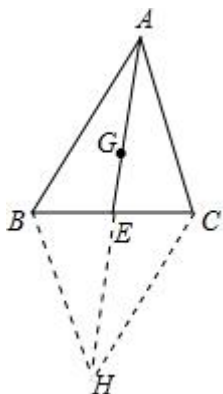
14. 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{AG}$ 用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】如图，延长 AE 到 H ，使得 $EH=AE$ ，连接 BH ， CH . 求出 $\overrightarrow{AH}$ ，证明 $AG = \frac{1}{3}AH$ 即可解决问题.

【详解】如图，延长 AE 到 H ，使得 $EH=AE$ ，连接 BH ， CH .



$\because AE=EH, BE=EC,$

$\therefore$ 四边形 ABHC 是平行四边形,

$\therefore AC=BH, AC \parallel BH,$

$\because \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \vec{a} + \vec{b},$

$\because G$ 是重心,

$\therefore AG = \frac{2}{3} AE,$

$\because AE=EH,$

$\therefore AG = \frac{1}{3} AH,$

$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}.$

【点睛】 本题考查三角形的重心，平行四边形的判定和性质等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

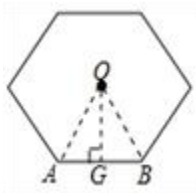
15. 已知一个正六边形的边心距为 $\sqrt{3}$ ，则它的半径为_____ .

【答案】 2

【解析】

【详解】 试题分析：设正六边形的中心是 O ，一边是 AB ，过 O 作 $OG \perp AB$ 与 G ，在直角 $\triangle OAG$ 中，根据三角函数即可求得 OA .

解： 如图所示，



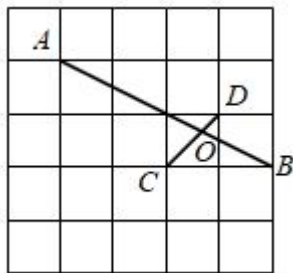
在 $\text{Rt}\triangle AOG$ 中, $OG = \sqrt{3}, \angle AOG = 30^\circ,$

$$\therefore OA = OG \div \cos 30^\circ = \sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2;$$

故答案为 2.

点睛：本题主要考查正多边形和圆的关系，解题的关键在于利用正多边形的半径、边心距构造直角三角形并利用解直角三角形的知识求解.

16. 如图，已知在正方形网格中，点 A 、 B 、 C 、 D 在小正方形的顶点上，线段 AB 与线段 CD 相交于点 O ，那么 $\tan \angle AOC = \underline{\hspace{2cm}}$.

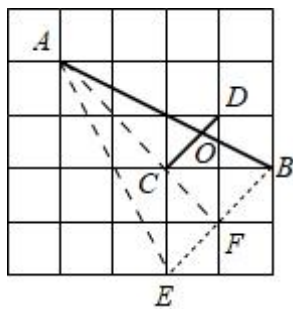


【答案】 3

【解析】

【分析】如图，取格点 E 、 F ，连接 AE 、 AF 、 BE ，通过计算得到等腰三角形 $\triangle ABE$ ，利用等腰三角形的三线合一得出 $AF \perp BE$ ，接着推出 $\angle AOC = \angle ABF$ 。在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中，由勾股定理求出两直角边的长，再依据正切值的意义可求解。

【详解】解：如图，取格点 E 、 F ，连接 AE 、 AF 、 BE ，可知 AF 经过点 C ， BE 经过点 F ，



设网格中的小正方形的边长为 1，

$$\text{则 } AE = AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

$\therefore F$ 是 BE 的中点，

$$\therefore AF \perp BE.$$

由题意： $\angle DCB = \angle CBE = 45^\circ$.

$$\therefore CD \parallel BE,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle ABF.$$

$$\therefore \tan \angle AOC = \tan \angle ABF.$$

$$\because BF = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$AF = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

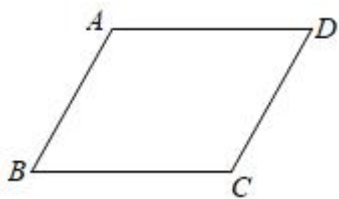
$$\therefore \tan \angle ABF = \frac{AF}{BF} = 3.$$

$$\therefore \tan \angle AOC = 3.$$

故答案为：3.

【点睛】本题考察了网格中的边和角的计算问题，涉及到了等腰三角形的性质、勾股定理、三角函数等知识，要求学生能挖掘出图中的隐含条件，构造直角三角形，利用正切公式求出角的正切值，本题蕴含了数形结合的思想方法.

17. 如果一条直线把一个平面图形的面积分成相等的两部分，那么我们把这条直线叫做这个平面图形的面积等分线. 已知在菱形 $ABCD$ 中， $AB=6$ ， $\angle B=60^\circ$ ，点 E 在边 AD 上，且 $AE=2$ ，过点 E 的面积等分线与菱形的另一条边交于点 F ，那么线段 EF 的长为_____.



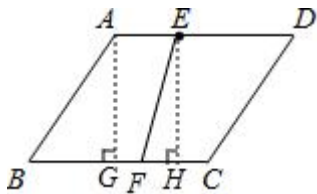
【答案】 $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】过点 A 和点 E 作 $AG \perp BC$ ， $EH \perp BC$ 于点 G 和 H ，可得矩形 $AGHE$ ，再根据菱形 $ABCD$ 中， $AB=6$ ， $\angle B=60^\circ$ ，可得 $BG=3$ ， $AG=3\sqrt{3}=EH$ ，由题意可得， $FH=FC-HC=2-1=1$ ，进而根据勾股定理可得 EF 的长.

【详解】解：如图，过点 A 和点 E 作 $AG \perp BC$ ， $EH \perp BC$ 于点 G 和 H ，即得矩形 $AGHE$ ，

$$\therefore GH = AE = 2,$$



$$\because \text{在菱形 } ABCD \text{ 中, } AB=6, \angle B=60^\circ,$$

$$\therefore BG = 3, \quad AG = 3\sqrt{3} = EH,$$

$$\therefore HC = BC - BG - GH = 6 - 3 - 2 = 1,$$

$\therefore EF$ 平分菱形面积, EF 经过菱形对角线交点,

$$\therefore FC = AE = 2,$$

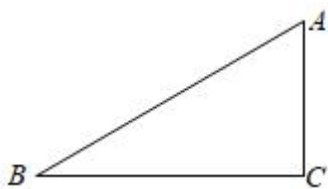
$$\therefore FH = FC - HC = 2 - 1 = 1,$$

在 $Rt\triangle EFH$ 中, 根据勾股定理, 得 $EF = \sqrt{EH^2 + FH^2} = \sqrt{27 + 1} = 2\sqrt{7}$,

故答案为: $2\sqrt{7}$.

【点睛】本题考查菱形的性质, 含 30° 角的直角三角形的性质, 矩形的判定和性质以及勾股定理. 作出辅助线是解答本题的关键.

18. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 2$, 点 D 是边 BC 的中点, 点 E 是边 AB 上一点, 将 $\triangle BDE$ 沿直线 DE 翻折, 点 B 落在 B' 处, 联结 AB' , 如果 $\angle AB'D = 90^\circ$, 那么线段 AE 的长为_____.



【答案】 $\frac{14}{5}$ 或 2

【解析】

【分析】分两种情况讨论, 由折叠的性质和锐角三角函数可求解.

【详解】解: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 2$,

$$\therefore AB = 4, \quad BC = \sqrt{3} AC = 2\sqrt{3},$$

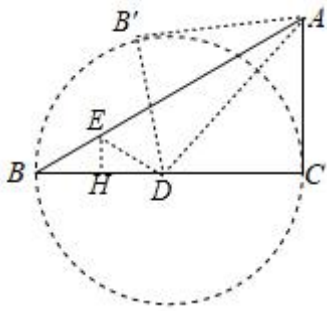
$\therefore$ 点 D 是边 BC 的中点,

$$\therefore BD = CD = \sqrt{3},$$

$\therefore$ 将 $\triangle BDE$ 沿直线 DE 翻折,

$$\therefore B'D = BD = \sqrt{3},$$

$\therefore$ 点 B' 在以点 D 为圆心, BD 为半径的圆上, 如图, 当点 B' 与点 C 不重合时, 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于 H , 连接 AD ,



在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 和 $\text{Rt}\triangle AB'D$ 中,

$$\begin{cases} AD = AD \\ CD = DB' \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AB'D \quad (HL),$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DAB',$$

$$\because \angle BDB' + \angle B'DC = 180^\circ = \angle B'AC + \angle B'DC,$$

$$\therefore \angle B'AC = \angle BDB',$$

$\because$ 折叠,

$$\therefore \angle BDE = \angle EDB',$$

$$\therefore \angle BDE = \angle DAC,$$

$$\therefore \tan \angle DAC = \tan \angle BDE = \frac{DC}{AC} = \frac{HE}{DH} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \text{设 } EH = \sqrt{3}x, \quad DH = 2x,$$

$$\because \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore BH = \sqrt{3}EH = 3x, \quad BE = 2\sqrt{3}x$$

$$\because BH + DH = BD = \sqrt{3},$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{5},$$

$$\therefore EH = \frac{3}{5}, \quad BE = \frac{6}{5},$$

$$\therefore AE = \frac{14}{5},$$

当点 B' 与点 C 重合时, $\angle AB'D = 90^\circ$,

$\therefore DE$ 是 BC 的垂直平分线,

$$\therefore DE \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{CD}{BD} = 1,$$

$$\therefore AE = BE = \frac{1}{2} AB = 2,$$

综上所述: $AE = \frac{14}{5}$ 或 2.

故答案为: $\frac{14}{5}$ 或 2.

【点睛】 本题考查了翻折变换, 锐角三角函数, 全等三角形的判定和性质等知识, 灵活运用这些性质解决问题是本题的关键.

三.解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $+\sqrt{8} - \frac{1}{\sqrt{3}-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \div \sqrt{3} + (1-\sqrt{2})^2$.

【答案】 5

【解析】

【分析】 先根据负整数指数幂的意义、完全平方公式计算和除法运算化为乘法运算, 再分母有理化, 然后合并即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: 原式} &= 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} - 3 \div \sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{2} + 2 \\ &= 2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{2} + 2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的化简, 二次根式的分母有理化, 负整数指数幂, 完全平方公式, 熟练掌握运算的法则和运算的顺序是解题的关键.

20. 解方程: $\frac{4x}{x^2-9} = 1 + \frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+3}$.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 因式分解 $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$, 确定最简公分母, 化分式方程为整式方程求解

【详解】 解: 方程两边同乘以 $(x+3)(x-3)$ 得:

$$4x = x^2 - 9 + 2(x+3) - 2(x-3),$$

$$\text{整理得: } x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 1, \quad x_2 = 3,$$

经检验: $x_2 = 3$ 是原方程的增根,

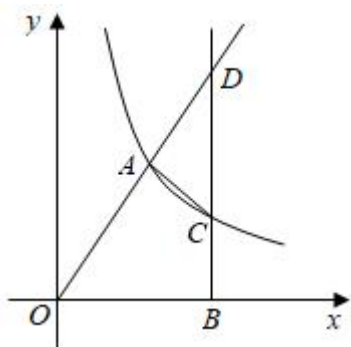
所以, 原方程的解为 $x = 1$.

【点睛】 本题考查了分式方程的解法, 通过因式分解确定最简公分母, 化成整式方程求解是解题的关键, 注意验根是防止出错的根本.

21. 如图, 已知正比例函数 $y = kx$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过点 $A(a, 3)$, 点 B 为 x 轴正半轴上一点, 过点 B 作 $BD \perp x$ 轴, 交反比例函数的图象于点 C , 交正比例函数的图象于点 D .

(1) 求 a 、 k 的值;

(2) 联结 AC , 如果 $BD = 6$, 求 $\triangle ACD$ 的面积.



【答案】 (1) $a = 2, k = \frac{3}{2}$; (2) $\frac{9}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 把点 $A(a, 3)$ 代入反比例函数关系式可求出 a 的值, 确定点 A 的坐标, 进而求出正比例函数的关系式;

(2) 根据 $BD = 6$, 求出点 B 的横坐标, 求出 OB , 代入求出 BC , 得到 DC , 根据三角形的面积公式进行计算即可.

【详解】 解: (1) 把点 $A(a, 3)$ 代入反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ ($x > 0$) 得, $3 = \frac{6}{a}$,
解得 $a = 2$,

$\therefore$ 点 $A(2, 3)$, 代入 $y = kx$ 得, $k = \frac{3}{2}$;

(2) 当 $BD = 6 = y$ 时, 代入 $y = \frac{3}{2}x$ 得, $x = 4$,

$\therefore OB = 4$,

当 $x = 4$ 代入 $y = \frac{6}{x}$ 得, $y = \frac{3}{2}$, 即 $BC = \frac{3}{2}$,

$\therefore CD = BD - BC = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$,

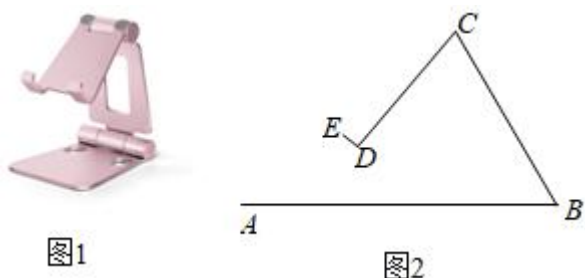
$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times (4-2) = \frac{9}{2}.$$

【点睛】本题主要考查待定系数法求正比例函数解析式，正比例函数与反比例函数图象的应用；掌握掌握三角形面积公式，根据第一问求解的结果以及BD垂直x轴，求出BC，得到DC，解答本题的关键.

22. 如图1是一种手机平板支架，由底座、支撑板和托板构成，手机放置在托板上，如图2是其侧面示意图，量得底座长 $AB=11\text{cm}$ ，支撑板长 $BC=8\text{cm}$ ，托板长 $CD=6\text{cm}$ ，托板CD固定在支撑板顶端点C处，托板CD可绕点C旋转，支撑板BC可绕点B转动.

- (1) 如果 $\angle ABC=60^\circ$ ， $\angle BCD=70^\circ$ ，求点D到直线AB的距离（精确到0.1cm）；
- (2) 在第(1)小题的条件下，如果把线段CD绕点C顺时针旋转 20° 后，再将线段BC绕点B逆时针旋转，使点D落在直线AB上，求线段BC旋转的角度.

(参考数据: $\sin 40^\circ \approx 0.64$, $\cos 40^\circ \approx 0.77$, $\tan 40^\circ \approx 0.84$, $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)



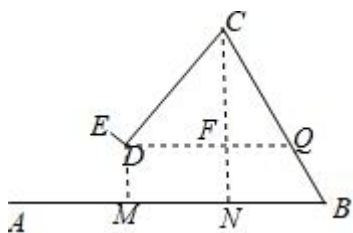
【答案】(1) 2.3cm; (2) 23°

【解析】

【分析】(1) 通过作垂线，构造直角三角形，利用直角三角形的边角关系，求出CN、CF，即可求出点D到直线AB的距离；

(2) 画出旋转后的图形，结合图形，明确图形中的已知的边角，再利用直角三角形的边角关系求出相应的角度即可.

【详解】解：(1) 如图，过D作 $DM \perp AB$ ，交AB于点M，过点C作 $CN \perp AB$ 于点N，垂足为N，过点D作 $DQ \perp CN$ 交CB于点Q，垂足为F，



在 $\text{Rt}\triangle CNB$ 中， $\angle ABC=60^\circ$ ， $BC=8\text{cm}$,

$$\therefore CN = CB \cdot \sin \angle ABC = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6.92 \text{ (cm)},$$

$$\therefore \angle BCN = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\text{又} \therefore \angle DCB = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle DCF = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle DCF$ 中, $\angle DCF = 40^\circ$, $CD = 6\text{cm}$,

$$\therefore CF = CD \cdot \cos 40^\circ \approx 6 \times 0.77 = 4.62 \text{ (cm)},$$

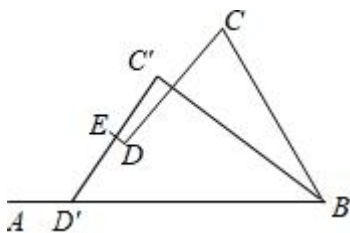
$$\therefore \angle DMN = \angle MNF = \angle NFD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $MNFD$ 是矩形,

$$\therefore DM = FN = CN - CF = 6.92 - 4.62 = 2.3 \text{ (cm)},$$

即点 D 到直线 AB 的距离为 2.3cm ;

(2) 把线段 CD 绕点 C 顺时针旋转 20° 后, $\angle C' = 70^\circ + 20^\circ = 90^\circ$, 如图,



$$\therefore BC = 8\text{cm}, \quad CD = 6\text{cm},$$

$$\therefore \tan \angle D'BC' = \frac{C'D'}{BC'} = \frac{6}{8} = 0.75,$$

$$\therefore \tan 37^\circ \approx 0.75,$$

$$\therefore \angle C'BD' = 37^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CBC' = 60^\circ - 37^\circ = 23^\circ,$$

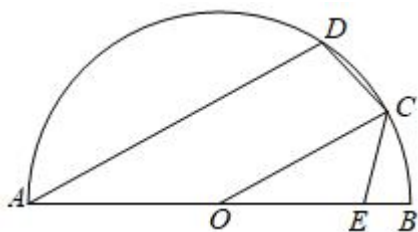
答: 线段 BC 旋转的角度为 23° .

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形的应用, 结合矩形的性质求解是解题的关键.

23. 已知: 如图, AB 是半圆 O 的直径, C 是半圆上一点 (不与点 A 、 B 重合), 过点 A 作 $AD \parallel OC$ 交半圆于点 D , E 是直径 AB 上一点, 且 $AE = AD$, 联结 CE 、 CD .

(1) 求证: $CE = CD$;

(2) 如果 $\widehat{AD} = 3\widehat{CD}$, 延长 EC 与弦 AD 的延长线交于点 F , 联结 OD , 求证: 四边形 $OCFD$ 是菱形.



【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由“SAS”可证 $\triangle DAC \cong \triangle EAC$ ，可得 $CE = CD$ ；

(2) 先求出 $\angle AOD = \angle AEC = 108^\circ$ ，可证 $OD \parallel CE$ ，由菱形的判定可得结论.

【详解】证明：(1) 如图 1，连接 AC ，

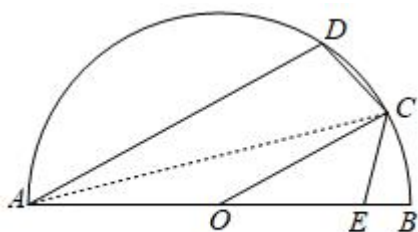


图1

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA,$$

$$\because AD \parallel OC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle OAC,$$

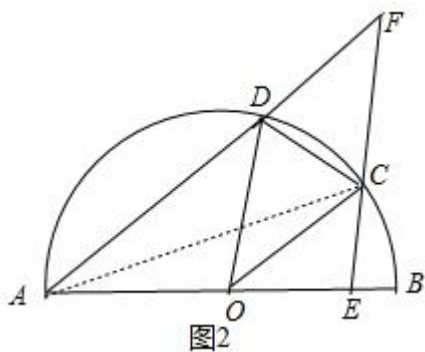
在 $\triangle DAC$ 和 $\triangle EAC$ 中，

$$\begin{cases} AD = AE \\ \angle DAC = \angle EAC, \\ AC = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DAC \cong \triangle EAC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CE = CD;$$

(2) 如图 2，连接 CA ，



$$\because \widehat{AD} = 3\widehat{CD},$$

$$\therefore \angle AOD = 3\angle COD,$$

$$\because AD \parallel OC,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle DOC,$$

$$\because OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA,$$

$$\because \angle AOD + \angle OAD + \angle ADO = 180^\circ,$$

$$\therefore 5\angle ADO = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADO = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 108^\circ, \quad \angle DOC = 36^\circ,$$

$$\because OD = OC,$$

$$\therefore \angle ODC = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 108^\circ,$$

$$\because \triangle DAC \cong \triangle EAC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle AEC = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle AEC,$$

$$\therefore OD \parallel CE,$$

$$\text{又} \because OC \parallel AD,$$

$$\therefore \text{四边形 } OCFD \text{ 是平行四边形},$$

$$\text{又} \because OD = OC,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } OCFD \text{ 是菱形}.$$

【点睛】本题考查了圆心角与弧的关系，平行线的性质，三角形的全等，菱形的判定，熟练掌握圆的基本性质，菱形的判定是解题的关键.

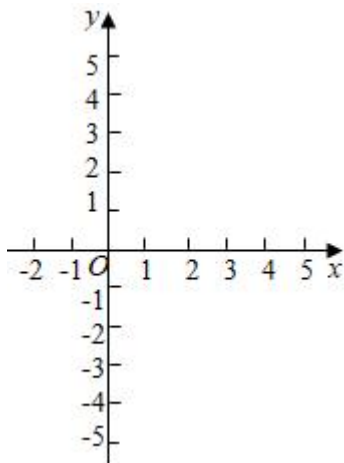
24. 如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = x - 5$ 与 x 轴相交于点 A ，与 y 轴相交于点 B ，抛物线 y

$= ax^2+6x+c$ 经过 A 、 B 两点.

(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 设抛物线与 x 轴的另一个交点为 C , 点 P 是抛物线上一点, 点 Q 是直线 AB 上一点, 当四边形 $BCPQ$ 是平行四边形时, 求点 Q 的坐标;

(3) 在第 (2) 小题的条件下, 联结 QC , 在 $\angle QCB$ 内作射线 CD 与抛物线的对称轴相交于点 D , 使得 $\angle QCD = \angle ABC$, 求线段 DQ 的长.



【答案】(1) $y = -x^2+6x-5$; (2) $Q(3, -2)$; (3) 8

【解析】

【分析】(1) 求出 A 、 B 坐标代入 $y = ax^2+6x+c$ 即可得答案;

(2) 求出 C 坐标, 设 P 、 Q 坐标, 根据平行四边形两条对角线的中点重合可列方程求解;

(3) CD 与 AB 交于 N , 由 $\angle QCD = \angle ABC$ 可得 $\triangle CQN \sim \triangle BQC$, 求出 QN 及 N 坐标, 再求 CN 解析式及 D 坐标即可得出答案.

【详解】解: (1) 在 $y = x - 5$ 中令 $x = 0$, 得 $y = -5$, 令 $y = 0$ 得 $x = 5$,

$\therefore A(5, 0)$, $B(0, -5)$,

将 $A(5, 0)$, $B(0, -5)$ 代入 $y = ax^2+6x+c$ 得:

$$\begin{cases} 0 = 25a + 30 + c \\ -5 = c \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ c = -5 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -x^2+6x-5$;

(2) 在 $y = -x^2+6x-5$ 中令 $y = 0$ 得 $x_1 = 1$, $x_2 = 5$,

$\therefore C(1, 0)$,

点 P 是抛物线上一点, 点 Q 是直线 AB 上一点,

设 $P(m, -m^2+6m-5)$, $Q(n, n-5)$,

则 BP 的中点为 $(\frac{0+m}{2}, \frac{-5-m^2+6m-5}{2})$, CQ 的中点为 $(\frac{1+n}{2}, \frac{0+n-5}{2})$,

$\therefore$ 四边形 $BCPQ$ 是平行四边形,

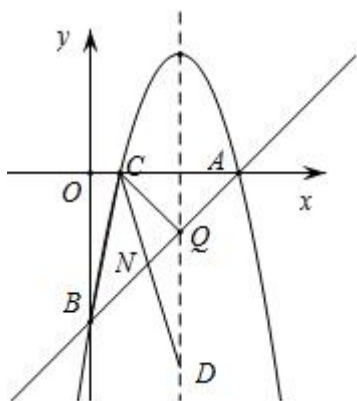
$\therefore$ 线段 BP 的中点即是 CQ 的中点,

$$\therefore \begin{cases} 0+m=1+n \\ -5-m^2+6m-5=0+n-5 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m=1 \\ n=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m=4 \\ n=3 \end{cases},$$

$\therefore Q(3, -2)$;

(3) 设 CD 与 AB 交于 N , 如图:



$\therefore B(0, -5)$, $C(1, 0)$, $Q(3, -2)$,

$\therefore CQ=2\sqrt{2}$, $BQ=3\sqrt{2}$,

$\therefore \angle QCD = \angle ABC$, $\angle CQN = \angle BQC$,

$\therefore \triangle CQN \sim \triangle BQC$,

$$\therefore \frac{CQ}{BQ} = \frac{QN}{CQ}, \text{ 即 } \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{QN}{2\sqrt{2}},$$

$$\therefore QN = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

设 $N(t, t-5)$, 而 $Q(3, -2)$,

$$\therefore \sqrt{(t-3)^2 + (t-5+2)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore t = \frac{13}{3} \text{ 或 } t = \frac{5}{3},$$

∴在 $\angle QCB$ 内作射线 CD ,

$$\therefore t = \frac{5}{3}, N\left(\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}\right),$$

设 CN 解析式为 $y = kx + b$, 将 $N\left(\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}\right)$, $C(1, 0)$ 代入得:

$$\begin{cases} -\frac{10}{3} = \frac{5}{3}k + b \\ 0 = k + b \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -5 \\ b = 5 \end{cases},$$

∴ CN 解析式为 $y = -5x + 5$,

令 $x = 3$ 得 $y = -10$,

∴ $Q(3, -10)$,

$$\therefore DQ = -2 - (-10) = 8.$$

【点睛】本题考查二次函数、平行四边形及相似三角形综合知识, 解题关键是设出坐标, 利用相似三角形性质求出 QN 的长度.

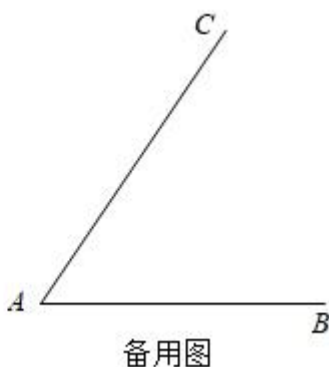
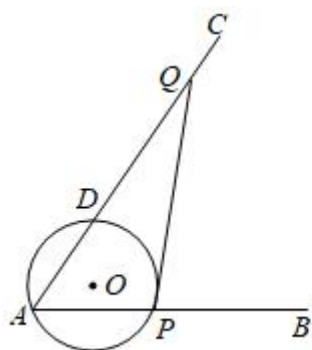
25. 如图, 已知 Q 是 $\angle BAC$ 的边 AC 上一点, $AQ = 15$, $\cot \angle BAC = \frac{3}{4}$, 点 P 是射线 AB 上一点, 联结 PQ ,

$\odot O$ 经过点 A 且与 QP 相切于点 P , 与边 AC 相交于另一点 D .

(1) 当圆心 O 在射线 AB 上时, 求 $\odot O$ 的半径;

(2) 当圆心 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{3}{4}$ 时, 求线段 AP 的长;

(3) 试讨论以线段 PQ 长为半径的 $\odot P$ 与 $\odot O$ 的位置关系, 并写出相应的线段 AP 取值范围.



【答案】(1) $\frac{9}{2}$; (2) 3 或 $\frac{9+3\sqrt{17}}{4}$; (3) 当 $\odot O$ 与 $\odot P$ 内含时, $0 < AP < 12$. 当 $\odot O$ 与 $\odot P$ 内切时, AP

$= 12$. 当 $\odot O$ 与 $\odot P$ 相交时, $12 < AP < 18$

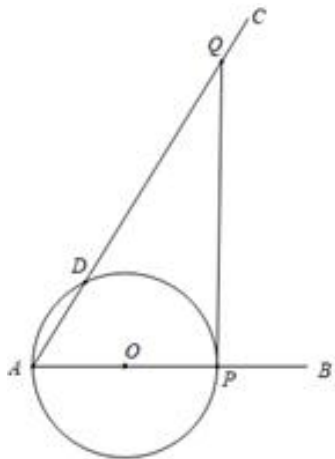
【解析】

【分析】(1) 解直角三角形求出 PA 即可.

(2) 分两种情形: 如图, 当点 O 在射线 AB 的上方时, 当点 O 在射线 AB 的下方时, 分别利用相似三角形的性质求解即可.

(3) 求出两圆内切时 AP 的值, 条件 $\odot O$ 与 AC 相切于时 A 时, AP 的值, 即可判断.

【详解】解: (1) 如图,



$\because$ 点 O 在 PA 上, PQ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore PQ \perp AP$,

$$\because \cot \angle PAQ = \frac{AP}{PQ} = \frac{3}{4},$$

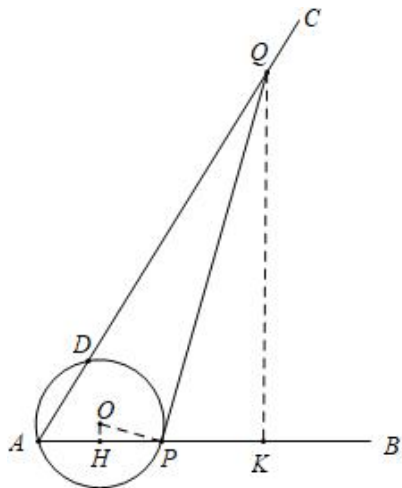
$\therefore$ 可以假设 $PA = 3k$, $PQ = 4k$, 则 $AQ = 5k = 15$,

$\therefore k = 3$,

$\therefore PA = 9$, $PQ = 12$,

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\frac{9}{2}$.

(2) 如图, 当点 O 在射线 AB 的上方时, 过点 Q 作 $QK \perp AB$ 于 K , 过点 O 作 $OH \perp AB$ 于 H .



$\because PQ$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore \angle PHO = \angle OPQ = \angle PKQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OPH + \angle QPK = 90^\circ, \quad \angle QPK + \angle POK = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PHO \sim \triangle QPK,$$

$$\therefore \frac{PH}{QK} = \frac{OH}{PK}$$

设 $PA = 2m$, 则 $AH = PH = m$, $PK = 9 - 2m$,

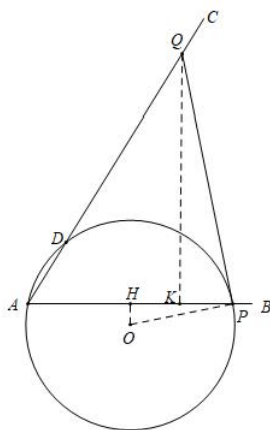
$$\therefore \frac{m}{12} = \frac{\frac{3}{4}}{9 - 2m}$$

$$\text{解得, } m = \frac{3}{2} \text{ 或 } -3,$$

经检验, $x = \frac{3}{2}$ 是分式方程的解, 且符合题意.

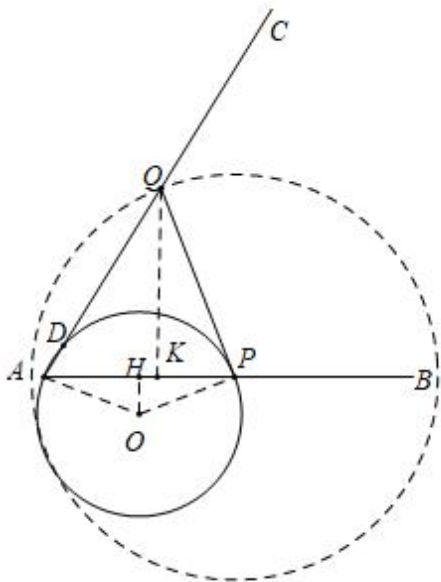
$$\therefore AP = 3.$$

如图, 当点 O 在射线 AB 的下方时, 同法可得 $AP = \frac{9 + 3\sqrt{17}}{2}$.



综上所述, 满足条件的 AP 的值为 3 或 $\frac{9 + 3\sqrt{17}}{2}$.

(3) 如图, 当 $\odot P$ 与 $\odot O$ 内切时,



由 $\triangle PHO \sim \triangle QKP$, 可得 $\frac{OP}{PQ} = \frac{PH}{QK} = \frac{1}{2}$,

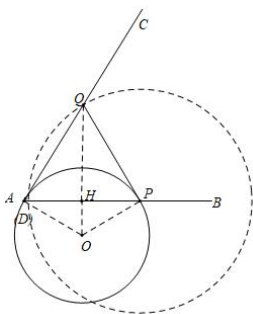
$$\therefore OH \perp AP,$$

$$\therefore AH = PH,$$

$$\therefore AP = 2PH, \quad QK = 2PH,$$

$$\therefore PA = QK = 12,$$

如图, 当 $\odot O$ 与 AC 相切于点 A 时,



$$\therefore \angle OAQ = \angle OPQ = 90^\circ, \quad OQ = OQ, \quad OA = OP,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle OAQ \cong \text{Rt}\triangle OPQ \quad (HL),$$

$$\therefore AQ = PQ,$$

$$\therefore OA = OP,$$

$$\therefore OQ \text{ 垂直平分线段 } AP,$$

$$\therefore AP = 2AH = 18,$$

观察图像可知: 当 $\odot O$ 与 $\odot P$ 内含时, $0 < AP < 12$.

当 $\odot O$ 与 $\odot P$ 内切时, $AP = 12$.

当 $\odot O$ 与 $\odot P$ 相交时, $12 < AP < 18$.

【点睛】 本题相似三角形、全等三角形的判定、圆与圆的位置关系, 分类讨论思想是难点, 灵活进行角的转换证明相似是重点.