

2021 年上海市普陀区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上]

1.（4 分）下列计算中，正确的是（ ）

A. $2a^2+3a=5a^3$ B. $2a^2\cdot 3a=5a^3$ C. $2a^2\div 3a=\frac{2}{3}a$ D. $(2a^2)^3=8a^5$

【分析】直接利用整式的混合运算以及合并同类项法则分别计算得出答案.

【解答】解：A、 $2a^2+3a$ ，无法计算，故此选项错误；

B、 $2a^2\cdot 3a=6a^3$ ，故此选项错误；

C、 $2a^2\div 3a=\frac{2}{3}a$ ，故此选项正确；

D、 $(2a^2)^3=8a^6$ ，故此选项错误；

故选：C.

【点评】此题主要考查了整式的混合运算，正确掌握相关运算法则是解题关键.

2.（4 分）下列单项式中，可以与 x^2y^3 合并同类项的是（ ）

A. x^3y^2 B. $\frac{y^3x^2}{2}$ C. $3x^2y$ D. $2x^2y^3z$

【分析】根据同类项的定义：所含字母相同，相同字母的指数相同，即可判断.

【解答】解：A、 x^3y^2 与 x^2y^3 ，所含字母相同，但是相同字母的指数不相同，不是同类项，所以不能合并，故本选项不合题意；

B、 $\frac{y^3x^2}{2}$ 与 x^2y^3 ，所含字母相同，相同字母的指数相同，是同类项，能合并，故本选项符合题意；

C、 x^2y 与 x^2y^3 ，所含字母相同，但是相同字母的指数不相同，不是同类项，所以不能合并，故本选项不合题意；

D、 $2x^2y^3z$ 与 x^2y^3 ，所含字母不尽相同，不是同类项，所以不能合并，故本选项不合题意；
故选：B.

【点评】本题考查同类项的定义，所含字母相同且相同字母的指数也相同的项是同类项. 注意同类项定义中的两个“相同”：（1）所含字母相同；（2）相同字母的指数相同.

3.（4 分）方程 $\sqrt{x+2}=x$ 的根是（ ）

A. $x = -2$

B. $x = -1$

C. $x = 0$

D. $x = 2$

【分析】将方程两边分别平方，去掉根号，化成一元二次方程，解一元二次方程，检验，舍去增根，得出原方程的根.

【解答】解：将方程两边平方得：

$$x+2 = x^2.$$

解这个一元二次方程得：

$$x_1 = 2, x_2 = -1.$$

检验：把 $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ 分别代入原方程，

$x = 2$ 是原方程的根， $x = -1$ 是原方程的增根.

$\therefore$ 原方程的根为： $x = 2$.

故选：D.

【点评】本题主要考查了无理方程的解法，将方程两边平方，化无理方程为一元二次方程是解题的关键.

4. (4分) 已知两组数据： x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 和 x_1+2 、 x_2+2 、 x_3+2 、 x_4+2 、 x_5+2 ，下列有关这两组数据的说法中，正确的是 ()

A. 平均数相等

B. 中位数相等

C. 众数相等

D. 方差相等

【分析】根据方差的意义求解即可.

【解答】解：因为新数据是在原数据的基础上每个加 2，

$\therefore$ 这两组数据的波动幅度不变，

故选：D.

【点评】本题主要考查方差，解题的关键是掌握方差的意义：方差是反映一组数据的波动大小的一个量. 方差越大，则平均值的离散程度越大，稳定性也越小；反之，则它与其平均值的离散程度越小，稳定性越好.

5. (4分) 已知在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A' B' C'$ 中， $AB = A' B'$ ， $AC = A' C'$ ，下列条件中，不一定能得到 $\triangle ABC \cong \triangle A' B' C'$ 的是 ()

A. $BC = B' C'$ B. $\angle A = \angle A'$ C. $\angle C = \angle C'$ D. $\angle B = \angle B' =$

90°

【分析】根据全等三角形的判定定理进行推理.

【解答】解：A、由 $AB = A' B'$ ， $AC = A' C'$ ， $BC = B' C'$ 可以判定 $\triangle ABC \cong \triangle A' B' C'$ (SSS)，不符合题意.

B、由 $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$ 可以判定 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (SAS), 不符合题意.

C、由 $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle C = \angle C'$ 不可以判定 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (SSA), 符合题意.

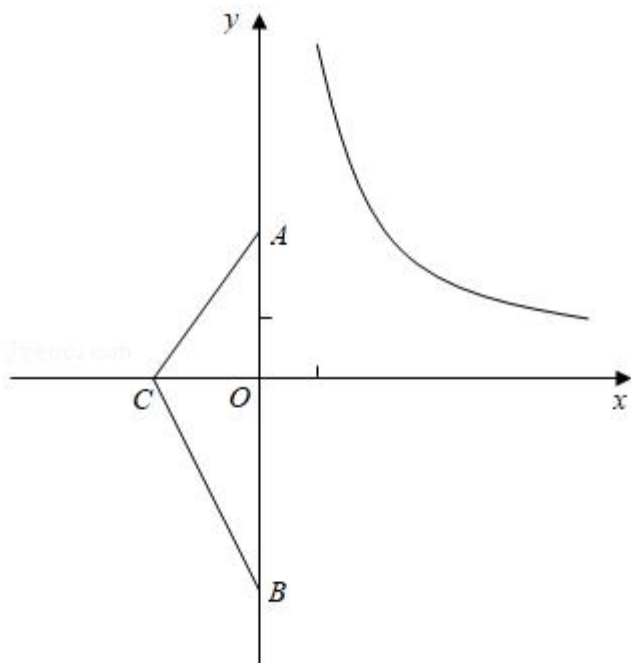
D、由 $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle B = \angle B' = 90^\circ$ 可以判定 $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle A'B'C'$ (HL), 不符合题意.

故选: C.

【点评】 本题考查三角形全等的判定方法, 判定两个三角形全等的一般方法有: SSS、SAS、ASA、AAS.

注意: AAA、SSA 不能判定两个三角形全等, 判定两个三角形全等时, 必须有边的参与, 若有两边一角对应相等时, 角必须是两边的夹角.

6. (4分) 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B 均在 y 轴上, 点 C 在 x 轴上, 将 $\triangle ABC$ 绕着顶点 B 旋转后, 点 C 的对应点 C' 落在 y 轴上, 点 A 的对应点 A' 落在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 在第一象限的图象上. 如果点 B 、 C 的坐标分别是 $(0, -4)$ 、 $(-2, 0)$, 那么点 A' 的坐标是 ()



- A. $(3, 2)$ B. $(\frac{3}{2}, 4)$ C. $(2, 3)$ D. $(4, \frac{3}{2})$

【分析】 根据题意求得 D 的坐标, 然后根据待定系数法即可求得直线 $A'B$ 的解析式, 与反比例函数解析式联立, 解方程组即可求得 A' 的坐标.

8. (4分) 已知 $f(x) = \frac{2}{x-1}$, 则 $f(\sqrt{3}) = \underline{\sqrt{3}+1}$.

【分析】将 $x = \sqrt{3}$ 代入 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ，再化简即可得.

【解答】解：当 $x = \sqrt{3}$ 时， $f(\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1$,

故答案为： $\sqrt{3}+1$.

【点评】本题考查求函数值的能力，当已知函数解析式时，求函数值就是求代数式的值.

9. (4分) 不等式组 $\begin{cases} -2x < 4 \\ x-3 < 1 \end{cases}$ 的解集是 $-2 < x < 4$.

【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

【解答】解：解不等式 $-2x < 4$ ，得： $x > -2$ ，

解不等式 $x-3 < 1$ ，得： $x < 4$ ，

则不等式组的解集为 $-2 < x < 4$ ，

故答案为： $-2 < x < 4$.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

10. (4分) 已知正比例函数 $y = kx$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的函数值 y 随 x 的值增大而减小，那么 k 的取值范围是 $k < 0$.

【分析】根据正比例函数图象的性质可以得出结论.

【解答】解： $\because$ 对于正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$)， y 随 x 的值增大而减小，

$\therefore k < 0$.

故答案为： $k < 0$.

【点评】本题主要考查了一次函数图象与系数的关系，熟记一次函数图象的性质是解题的关键.

11. (4分) 如果关于 x 的方程 $x^2 - x + m - 1 = 0$ 有两个相等的实数根，那么 m 的值等于 $-\frac{5}{4}$.

【分析】一元二次方程有两个相等的实根，即根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，即可求 m 值.

【解答】解： $\because$ 方程 $x^2 - x + m - 1 = 0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(m-1) = 0$ ，解得 $m = \frac{5}{4}$ ，

故答案为： $\frac{5}{4}$.

【点评】此题主要考查的是一元二次方程的根判别式，当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时，方程有两

个相等的实根，当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时，方程有两个不相等的实根，当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时，方程无实数根.

12. (4分) 抛物线 $y = ax^2 + ax + 2$ ($a \neq 0$) 的对称轴是直线 $x = -\frac{1}{2}$.

【分析】依据抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴方程 $x = -\frac{b}{2a}$ ，可以得出结论.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴方程 $x = -\frac{b}{2a}$,

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + ax + 2$ ($a \neq 0$) 的对称轴是直线 $x = -\frac{a}{2a} = -\frac{1}{2}$.

即对称轴是直线 $x = -\frac{1}{2}$.

故答案为： $x = -\frac{1}{2}$.

【点评】本题主要考查了二次函数的性质，熟记二次函数的对称轴方程为 $x = -\frac{b}{2a}$ 是解题的关键.

13. (4分) 为了唤起公众的节水意识，从1993年起，联合国将每年的3月22日定为“世界水日”. 某居委会表彰了社区内100户节约用水的家庭，5月份这100户家庭节约用水的情况如表所示，那么5月份这100户家庭节水量的平均数是5.5吨.

每户节水量(单位：吨)	5	6	7.2
节水户数	62	28	10

【分析】根据加权平均数的定义列式计算即可.

【解答】解：5月份这100户家庭节水量的平均数是 $\frac{5 \times 62 + 6 \times 28 + 7.2 \times 10}{100} = 5.5$ (吨),

故答案为：5.5.

【点评】本题主要考查加权平均数，解题的关键是掌握加权平均数的定义.

14. (4分) 小明已有两根长度分别是2cm和5cm的细竹签，盒子里有四根长度分别是3cm、4cm、7cm、8cm的细竹签，小明从盒子里随意抽取一根细竹签，恰能与已有的两根细竹签首尾顺次联结组成三角形的概率等于 $\frac{1}{4}$.

【分析】根据三角形的三边关系结合概率公式即可得出答案.

【解答】解：∵已有两根长度分别是 2cm 和 5cm 的细竹签，

∴设第 3 根竹签长为 $x\text{cm}$ ，则第三根可以构成三角形的范围是： $3 < x < 7$ ，

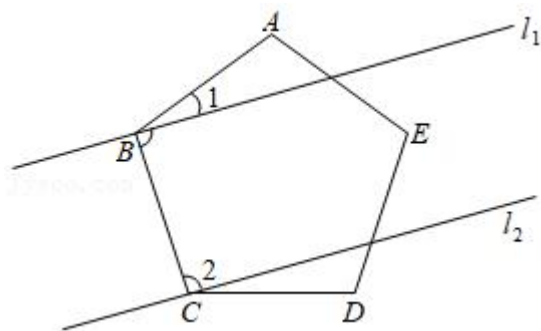
故只有 4cm ，符合题意，

则小明从盒子里随意抽取一根细竹签，恰能与已有的两根细竹签首尾顺次联结组成三角形的概率是： $\frac{1}{4}$ 。

故答案为： $\frac{1}{4}$ 。

【点评】此题主要考查了概率公式以及三角形三边关系，正确得出符合题意的竹签长是解题关键。

15. (4 分) 如图，两条平行线 l_1 、 l_2 分别经过正五边形 $ABCDE$ 的顶点 B 、 C 。如果 $\angle 1 = 20^\circ$ ，那么 $\angle 2 = 92^\circ$ 。



【分析】根据正五边形的内角和平行线的性质解答即可。

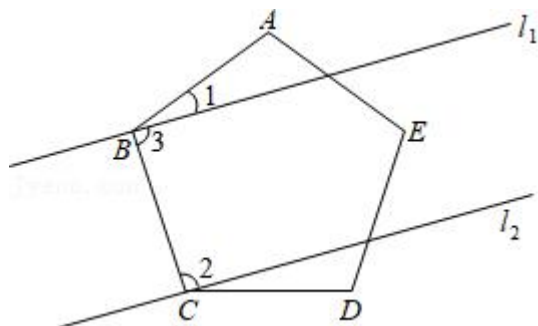
【解答】解：∵正五边形 $ABCDE$ 的一个内角是 108° ，

$$\therefore \angle 3 = 108^\circ - \angle 1 = 108^\circ - 20^\circ = 88^\circ,$$

$$\because l_1 \parallel l_2, \angle 3 = 88^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - 88^\circ = 92^\circ,$$

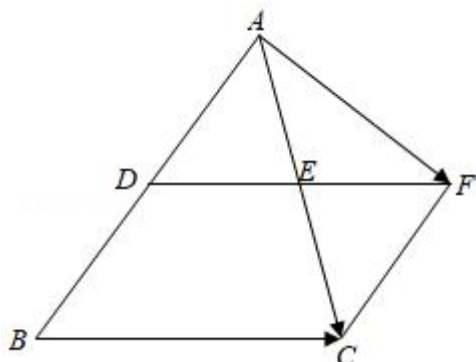
故答案为： 92° 。



【点评】此题考查的知识点是平行线的性质及正多边形的性质，解题的关键是由正多边形的性质和已知得出答案。

16. (4分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别为边 AB 、 AC 的中点, 点 F 在 DE 的延长线上,

$EF = DE$, 设 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AC}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示是 $2\vec{b} - \vec{a}$.



【分析】根据三角形中位线定理和已知条件求得 $EF = \frac{1}{2}BC$; 然后在 $\triangle AEF$ 中, 利用三角形法则得到 $\overrightarrow{AE}$; 最后易得 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$.

【解答】解: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别为边 AB 、 AC 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE \parallel BC$, 且 $DE = \frac{1}{2}BC$.

$\therefore \overrightarrow{BC} = \vec{a}$,

$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\vec{a}$.

又 $\because EF = DE$,

$\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\vec{a}$.

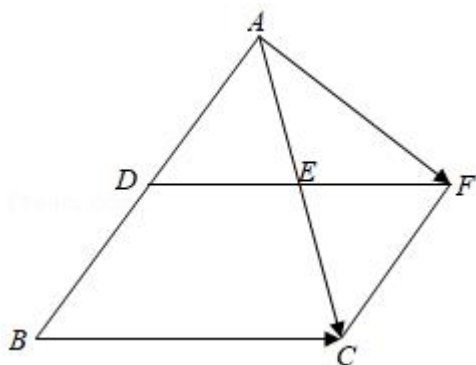
$\therefore \overrightarrow{AF} = \vec{b}$,

$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{EF}$.

$\because$ 点 E 是 AC 的中点,

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE} = 2(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{EF}) = 2(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}) = 2\vec{b} - \vec{a}$.

故答案是: $2\vec{b} - \vec{a}$.



【点评】 本题考查三角形中位线定理，平面向量等知识，解题的关键是熟练掌握三角形法则，属于中考常考题型．

17. (4 分) 已知等腰三角形 ABC 中, $AB = AC$, $BC = 6$, 以 A 为圆心 2 为半径长作 $\odot A$, 以 B 为圆心 BC 为半径作 $\odot B$, 如果 $\odot A$ 与 $\odot B$ 内切, 那么 $\triangle ABC$ 的面积等于 $3\sqrt{7}$.

【分析】 根据两圆内切的性质求出 AB , 根据勾股定理求出 AD , 根据三角形的面积公式计算, 得到答案.

【解答】 解: $\because \odot A$ 的半径为 2, $\odot B$ 的半径为 6, $\odot A$ 与 $\odot B$ 内切,

$$\therefore AB = 6 - 2 = 4,$$

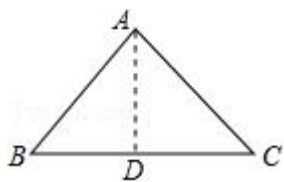
过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ,

$$\text{则 } BD = \frac{1}{2}BC = 3,$$

$$\text{由勾股定理得, } AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7},$$

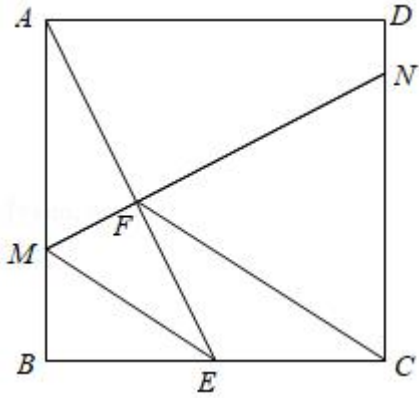
$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7},$$

故答案为: $3\sqrt{7}$.



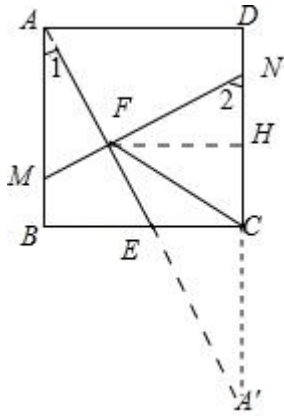
【点评】 本题考查的是圆与圆的位置关系、等腰三角形的性质, 掌握两圆内切 $\Leftrightarrow d = R - r$ 是解题的关键.

18. (4 分) 如图, 正方形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, E 为边 BC 的中点, 点 F 在 AE 上, 过点 F 作 $MN \perp AE$, 分别交边 AB 、 DC 于点 M 、 N , 联结 FC , 如果 $\triangle FNC$ 是以 CN 为底边的等腰三角形, 那么 $FC = \frac{4}{3}\sqrt{5}$.



【分析】延长 AE ， DC 交于点 A' ，过点 F 作 $FH \perp CD$ 于 H ，易证 $\triangle ABE \cong \triangle A'CE$ ，得出 $AB = A'C = 4$ ；利用勾股定理求出 AE 的长，进而得出 $\sin \angle A'$ 。利用互余角的三角函数的关系，得出 $\cos \angle 2$ ，在 $\text{Rt} \triangle FHN$ 和 $\text{Rt} \triangle A'FN$ 中利用 $\cos \angle 2$ 的值列出方程，即可求得结论。

【解答】解：延长 AE ， DC 交于点 A' ，过点 F 作 $FH \perp CD$ 于 H ，



$\because ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = BC = 4$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle A'$ ，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle A'CE$ 中，

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle A' \\ \angle AEB = \angle A'EC, \\ BE = EC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle A'CE$ (AAS)，

$\therefore AB = A'C = 4$ ，

$\because E$ 为边 BC 的中点，

$\therefore BE = EC = \frac{1}{2}BC = 2$ ，

$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = 2\sqrt{5}$ ，

$$\therefore \sin \angle 1 = \frac{BE}{AE} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \sin \angle A' = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\because AE \perp MN,$$

$$\therefore \angle A' FN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A' + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \cos \angle 2 = \sin \angle A' = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\because FN = FC, FH \perp CN,$$

$$\therefore NH = CH = \frac{1}{2}CN,$$

设 $NH = x$, 则 $NC = 2x$,

$$\therefore A' N = A' C + NC = 4 + 2x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle FHN \text{ 中, } \cos \angle 2 = \frac{NH}{FN} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore FN = \sqrt{5}x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle A' FN \text{ 中, } \cos \angle 2 = \frac{FN}{A' N} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}x}{4+2x} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore x = \frac{4}{3},$$

$$\therefore FC = FN = \sqrt{5}x = \frac{4}{3}\sqrt{5},$$

故答案为: $\frac{4}{3}\sqrt{5}$.

【点评】 本题主要考查了正方形的性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理等知识点, 利用已知条件通过添加辅助线构造全等三角形是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $-1^{2020} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} - |\sqrt{3}-2| + \sqrt{27}$.

【分析】 直接利用分数指数幂的性质以及二次根式的性质、绝对值的性质分别化简得出答案.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= -1 + 3^{\frac{1}{2}} - (2 - \sqrt{3}) + 3\sqrt{3} \\ &= -1 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$= 5\sqrt{3} - 3.$$

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

20. (10分) 解方程: $\frac{2x}{x+3} - \frac{24}{x^2+2x-3} = 1.$

【分析】直接去分母进而解分式方程，再检验得出答案.

【解答】解：方程两边同乘以 $(x+3)(x-1)$ 得：

$$2x(x-1) - 24 = (x+3)(x-1),$$

$$\text{整理得：} 2x^2 - 2x - 24 = x^2 + 2x - 3,$$

$$\text{则 } x^2 - 4x - 21 = 0,$$

$$(x-7)(x+3) = 0,$$

$$\text{解得：} x_1 = 7, x_2 = -3,$$

$$\text{检验：当 } x = -3 \text{ 时，} (x+3)(x-1) = 0,$$

故 $x = -3$ 是方程的增根，

$$\text{当 } x = 7 \text{ 时，} (x+3)(x-1) \neq 0,$$

故 $x = 7$ 是原方程的根.

【点评】此题主要考查了解分式方程，正确掌握解题方法是解题关键.

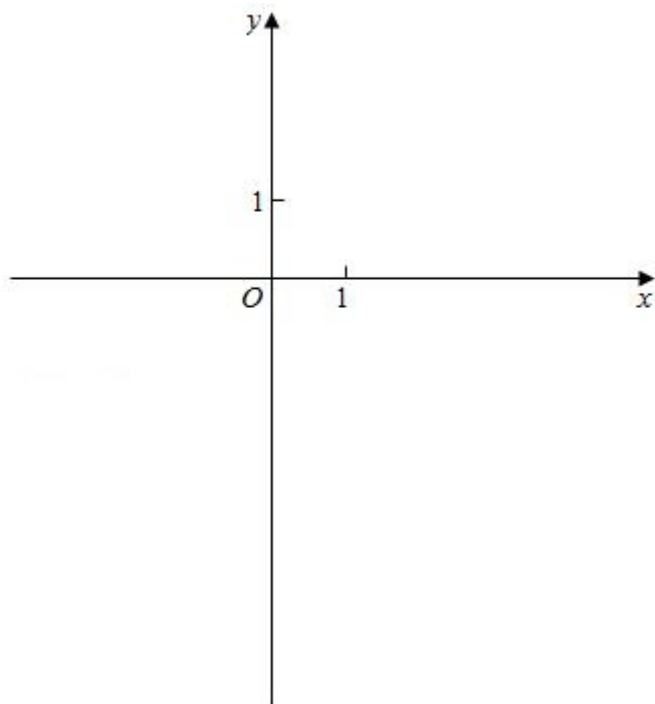
21. (10分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知直线 $y = -\frac{1}{2}x+2$ 分别与 x 轴、 y 轴交

于点 A 、 B , 一个正比例函数的图象与这直线交于点 C , 点 C 的横坐标是 1.

(1) 求正比例函数的解析式;

(2) 将正比例函数的图象向上或向下平移, 交直线 $y = -\frac{1}{2}x+2$ 于点 D , 设平移后函数

图象的截距为 b , 如果交点 D 始终落在线段 AB 上, 求 b 的取值范围.



【分析】（1）先求得 C 的坐标，然后根据待定系数法即可求得；

（2）求得 A 、 B 的坐标，把 A 的坐标代入平移后的直线解析式，求得 b 的值，根据图象即可求得符合题意的 b 的取值．

【解答】解：（1）把 $x=1$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 得， $y=\frac{3}{2}$ ，

$$\therefore C\left(1, \frac{3}{2}\right),$$

设正比例函数解析式为 $y=kx$ ，

把 C 的坐标代入得 $k=\frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 正比例函数的解析式为 $y=\frac{3}{2}x$ ；

（2）直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 中，令 $y=0$ ，则 $x=4$ ，

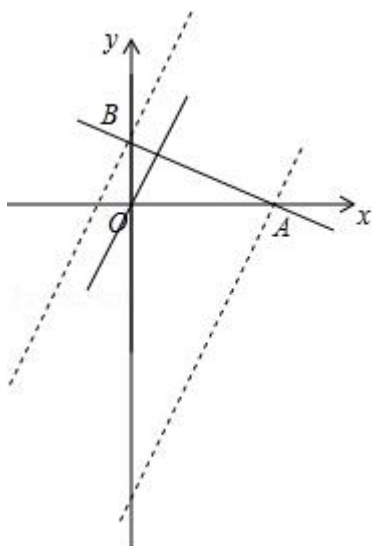
$$\therefore A(4, 0), B(0, 2),$$

设平移后的直线解析式为 $y=\frac{3}{2}x+b$ ，

把 $A(4, 0)$ 代入得， $\frac{3}{2} \times 4 + b = 0$ ，

解得 $b=-6$ ，

$\therefore$ 符合题意的 b 的取值范围是 $-6 \leq b \leq 2$ ．



【点评】 本题考查了一次函数图象与几何变换，一次函数图象上点的坐标特征，一次函数的性质，数形结合是解题的关键．

22. (10 分) 如图 1，一扇窗户打开后可以用窗钩 AB 将其固定，窗钩的一个端点 A 固定在窗户底边 OE 上，且与转轴底端 O 之间的距离为 20cm ，窗钩的另一个端点 B 可在窗框边上的滑槽 OF 上移动，滑槽 OF 的长度为 17cm ， AB 、 BO 、 AO 构成一个三角形．当窗钩端点 B 与点 O 之间的距离是 7cm 的位置时(如图 2)，窗户打开的角 $\angle AOB$ 的度数为 37° ．

(1) 求钩 AB 的长度(精确到 1cm)；

(2) 现需要将窗户打开的角 $\angle AOB$ 的度数调整到 45° 时，求此时窗钩端点 B 与点 O 之间的距离(精确到 1cm)．

(参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.6$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.8$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ， $\sqrt{2} \approx 1.4$)

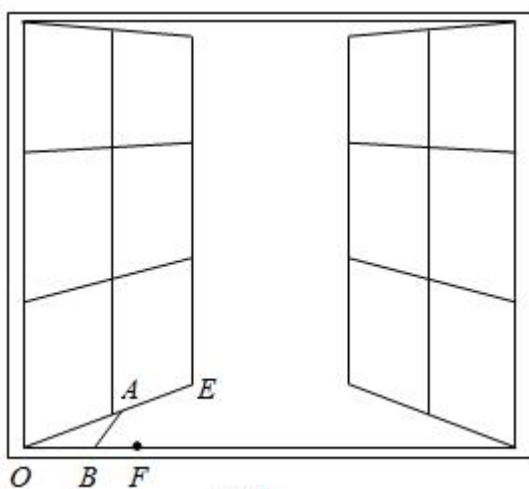


图 1

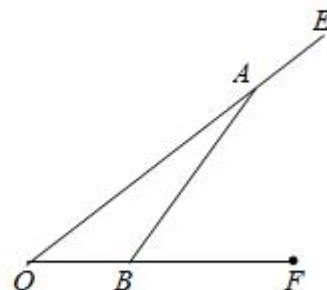


图 2

【分析】 (1) 由锐角三角函数可求 $AH = 12\text{cm}$ ，由勾股定理可求解；

(2) 由等腰直角三角形的性质可求 AH 的长，由勾股定理可求 BH 的长，即可求解．

【解答】解：（1）如图 2，过点 A 作 $AH \perp OF$ 于 H ，

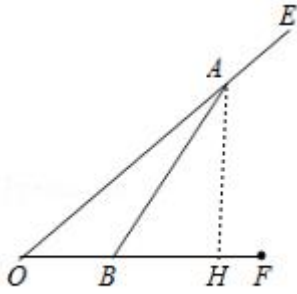


图 2

$$\because \sin O = \frac{AH}{AO} = 0.6,$$

$$\therefore AH = 20 \times 0.6 = 12 \text{ (cm)},$$

$$\therefore OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{400 - 144} = 16 \text{ (cm)},$$

$$\therefore BH = 16 - 7 = 9 \text{ (cm)},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{144 + 81} = 15 \text{ (cm)};$$

$$(2) \because \angle AOB = 45^\circ, AH \perp OF,$$

$$\therefore AH = OH = 10\sqrt{2} \text{ (cm)},$$

$$\therefore BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{225 - 200} = 5 \text{ (cm)},$$

$$\therefore OB = OH - BH = 14 - 5 = 9 \text{ (cm)},$$

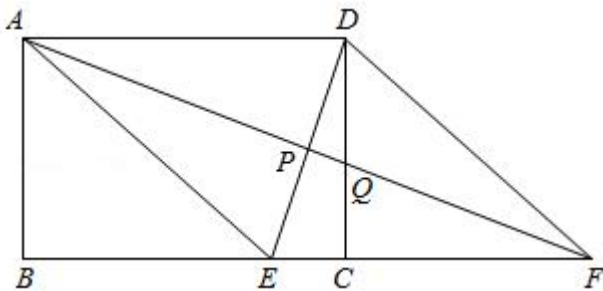
答：时窗钩端点 B 与点 O 之间的距离为 9cm 。

【点评】本题考查了解直角三角形，勾股定理，添加恰当辅助线构造直角三角形是本题的关键。

23. (12 分) 已知：如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 BC 、边 BC 的延长线上，四边形 $AEFD$ 是菱形，菱形的对角线 AF 分别交 DE 、 DC 于点 P 、 Q ， $\frac{AF}{BF} = \frac{EF}{PF}$ 。

求证：（1）四边形 $ABCD$ 为矩形；

$$(2) BE \cdot DQ = FQ \cdot PE.$$



【分析】(1) 通过证明 $\triangle ABF \sim \triangle EPF$ ，可得结论；

(2) 通过证明 $\triangle DPQ \sim \triangle FCQ$ ，可得结论．

【解答】证明：(1) $\because$ 四边形 $ADFE$ 是菱形，

$$\therefore AF \perp DE,$$

$$\therefore \angle EPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{EF}{PF}, \quad \angle PFE = \angle AFB,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle EPF,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle EPF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形；

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AD = BC = EF,$$

$$\therefore EC + CF = BE + CE,$$

$$\therefore BE = CF,$$

$$\therefore \angle DPF = \angle QCF = 90^\circ, \quad \angle CQF = \angle PQD,$$

$$\therefore \triangle DPQ \sim \triangle FCQ,$$

$$\therefore \frac{FQ}{DQ} = \frac{CF}{DP},$$

$$\therefore \frac{FQ}{DQ} = \frac{BE}{PE},$$

$$\therefore BE \cdot DQ = FQ \cdot PE.$$

【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，菱形的性质，矩形的性质和判定，灵活运用这些性质解决问题是本题的关键．

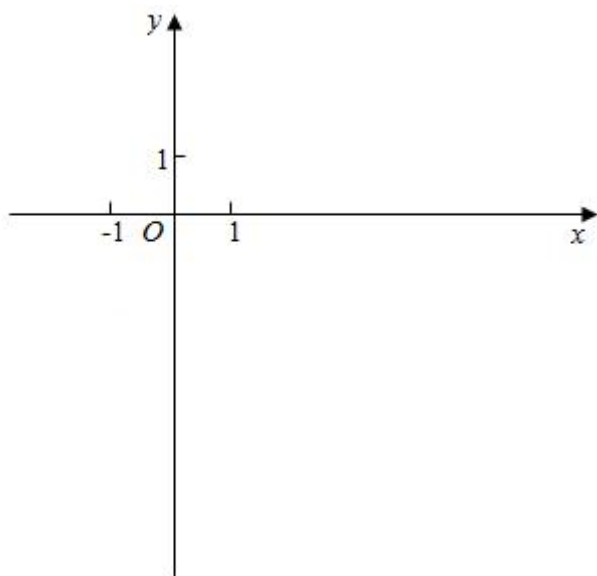
24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图)，已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A

$(-2, 0)$ 、 $B(6, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ，点 D 是在第四象限内抛物线上的一个动点，直线 AD 与直线 BC 交于点 E ．

(1) 求 b 、 c 的值和直线 BC 的表达式；

(2) 设 $\angle CAD = 45^\circ$ ，求点 E 的坐标；

(3) 设点 D 的横坐标为 d ，用含 d 的代数式表示 $\triangle ACE$ 与 $\triangle DCE$ 的面积比．



【分析】（1）利用待定系数法可求解析式；

（2）通过证明 $\triangle ACE \sim \triangle BCA$ ，可得 $\frac{AC}{BC} = \frac{CE}{AC}$ ，即可求解；

（3）由相似三角形的性质可得 $\frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle DCE}} = \frac{AB}{DF}$ ，即可求解．

【解答】解：（1） $\because$ 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ 、 $B(6, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 0 = \frac{1}{2} \times 4 - 2b + c \\ 0 = \frac{1}{2} \times 36 + 6b + c \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = -2 \\ c = -6 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6,$$

当 $x = 0$ 时， $y = -6$ ，

$\therefore$ 点 $C(0, -6)$ ，

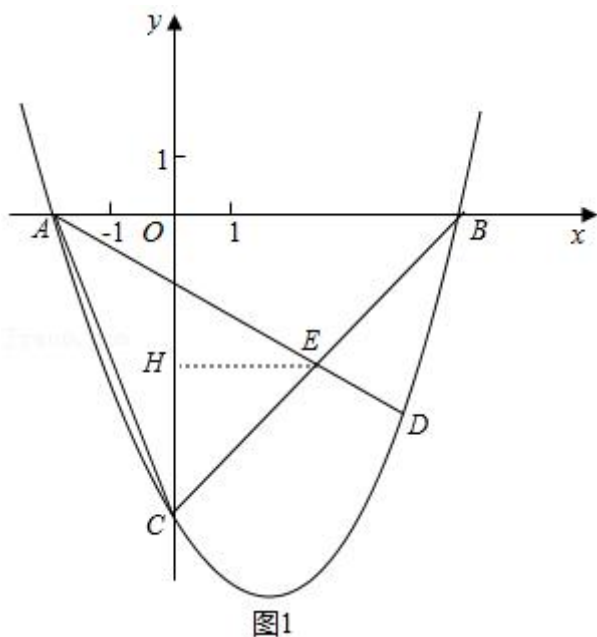
设直线 BC 解析式为 $y = mx + n$ ，

$$\text{则} \begin{cases} n = -6 \\ 0 = 6m + n \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = 1 \\ n = -6 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 解析式为 $y = x - 6$ ；

（2）如图1，过点 E 作 $EH \perp OC$ 于 H ，



$\because$ 点 $C(0, -6)$, 点 $B(6, 0)$, 点 $A(-2, 0)$,

$\therefore OB = OC = 6, OA = 2,$

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ, BC = 6\sqrt{2}, AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10},$

$\therefore \angle ABC = \angle CAD = 45^\circ, \angle ACE = \angle ACB,$

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle BCA,$

$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CE}{AC},$

$\therefore \frac{2\sqrt{10}}{6\sqrt{2}} = \frac{CE}{2\sqrt{10}},$

$\therefore CE = \frac{10\sqrt{2}}{3},$

$\therefore EH \perp CO, \angle ECH = 45^\circ,$

$\therefore EH = HC = \frac{10}{3},$

$\therefore OH = \frac{8}{3},$

$\therefore$ 点 $E(\frac{10}{3}, -\frac{8}{3});$

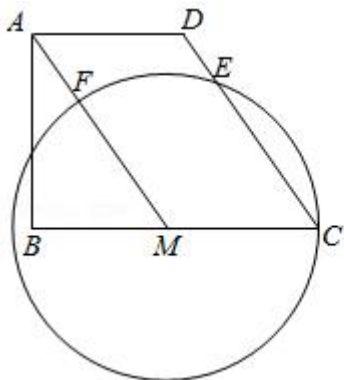
(3) $\because$ 点 D 的横坐标为 $d,$

$\therefore$ 点 $D(d, \frac{1}{2}d^2 - 2d - 6), (0 < d < 6),$

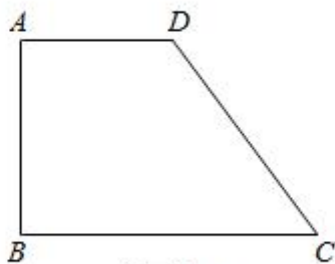
如图 2, 过点 D 作 $DF \parallel AB$ 交 BC 于点 $F,$

(2) 联结 EM , 设 $\angle FMB = \angle EMC$, 求 CE 的长;

(3) 以点 D 为圆心, DA 为半径作圆, $\odot D$ 与 $\odot M$ 的公共弦恰好经过梯形的一个顶点, 求此时 $\odot M$ 的半径长.



备用图 1



备用图 2

【分析】(1) 如图 1 中, 连接 EM , 过点 M 作 $MG \perp CD$ 于 G , 则 $EG = CG = \frac{9}{5}$, 通过计算证明 $AD = CM$, 可得结论.

(2) 如图 2 中, 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于 H , 过点 M 作 $MT \perp EC$ 于 T . 由 $\cos C = \frac{CT}{CM} = \frac{3}{5}$, 设 $EC = 6k$, 则 $CT = ET = 3k$, $MC = ME = 5k$, 在 $\text{Rt}\triangle CEH$ 中, $EH = \frac{4}{5}CE = \frac{24}{5}k$, $CH = \frac{3}{5}EC = \frac{18}{5}k$, 想办法构建方程, 求解即可.

(3) 分两种情形: 如图 3-1 中, 当公共弦经过点 A 时, 过点 D 作 $DP \perp BC$ 于 P , 则四边形 $ABPD$ 是矩形. 如图 3-2 中, 当公共弦经过点 D 时, 连接 MD , MP , 过点 M 作 $MN \perp AD$ 于 N . 分别求解即可.

【解答】(1) 证明: 如图 1 中, 连接 EM , 过点 M 作 $MG \perp CD$ 于 G , 则 $EG = CG = \frac{9}{5}$,

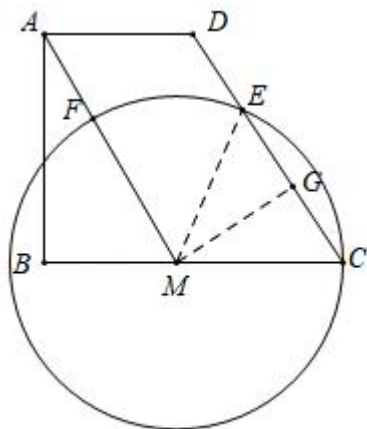


图 1

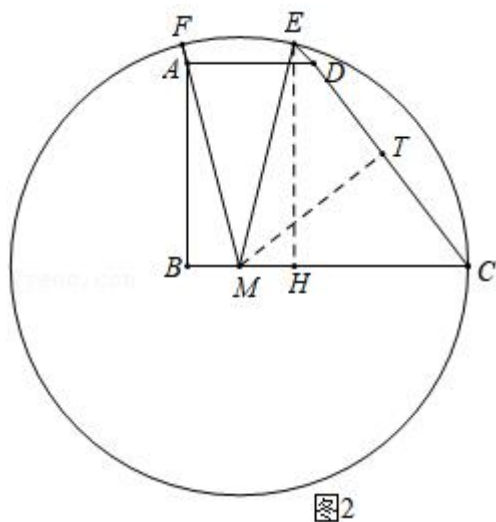
$$\text{在 Rt}\triangle CGM \text{ 中, } CM = \frac{CG}{\cos C} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{3}{5}} = 3,$$

$$\therefore AD = CM,$$

$$\because AD \parallel CM,$$

$\therefore$ 四边形 $AMCD$ 是平行四边形.

(2) 解: 如图 2 中, 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于 H , 过点 M 作 $MT \perp EC$ 于 T .



$$\because ME = MC, MT \perp EC,$$

$$\therefore CT = ET,$$

$$\therefore \cos C = \frac{CT}{CM} = \frac{3}{5},$$

设 $EC = 6k$, 则 $CT = ET = 3k$, $MC = ME = 5k$,

在 $\text{Rt}\triangle CEH$ 中, $EH = \frac{4}{5}CE = \frac{24}{5}k$, $CH = \frac{3}{5}EC = \frac{18}{5}k$,

$$\therefore MH = CM - CH = \frac{7}{5}k,$$

$$\therefore \tan \angle EMH = \frac{24}{7},$$

$$\because \angle FMB = \angle EMC,$$

$$\therefore \tan \angle FMB = \frac{AB}{BM} = \frac{4}{BM} = \frac{24}{7},$$

$$\therefore BM = \frac{7}{6},$$

$$\therefore CM = BC - BM = \frac{29}{6} = 5k,$$

(3) 如图 3-1 中, 当公共弦经过点 A 时, 过点 D 作 $DP \perp BC$ 于 P , 则四边形 $ABPD$ 是矩形.

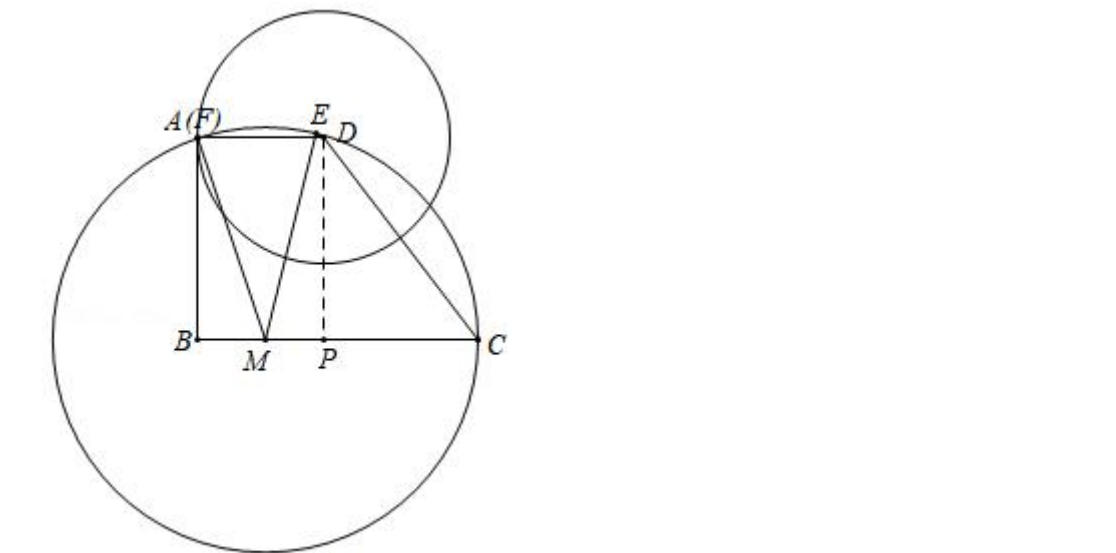


图3-1

$$\therefore AD = BP = 3,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDP$ 中, $\cos C = \frac{PC}{CD} = \frac{3}{5}$,

$$\because CD = 5,$$

$$\therefore PC = 3, AB = PD = 4,$$

$$\therefore BC = 3+3 = 6,$$

设 $CM = AM = x$,

在 Rt△ABM 中, 则有 $x^2 = 4^2 + (6 - x)^2$,

解得 $x = \frac{13}{3}$,

$$\therefore \odot M \text{ 的半径为 } \frac{13}{3}.$$

如图 3-2 中, 当公共弦经过点 D 时, 连接 MD , MP , 过点 M 作 $MN \perp AD$ 于 N .


$$\therefore DM^2 = MN^2 + DN^2 = MP^2 - DP^2,$$

$$\therefore x = \frac{17}{3},$$

【点评】本题属于圆综合题，考查了直线与圆的位置关系，直角梯形的性质，平行四边形的判定和性质，解直角三角形等知识，解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题，学会利用参数构建方程解决问题，属于中考压轴题。