

2021 年上海市宝山区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）下列运算正确的是（ ）

A. $a^2+a^2=a^4$ B. $a^3-a^2=a$ C. $a^3 \cdot a^2=a^6$ D. $a^6 \div a^3=a^3$

【分析】根据同底数幂乘法、除法法则，合并同类项法则求解即可．

【解答】解：A. $a^2+a^2=2a^2$ ，故 A 不符合题意；

B. $a^3-a^2=a^2(a-1)$ ，故 B 不符合题意；

C. $a^3 \cdot a^2=a^5$ ，故 C 不符合题意；

D. $a^6 \div a^3=a^3$ ．故 D 符合题意．

故选：D．

【点评】此题考查了同底数幂乘法、除法法则，合并同类项法则，熟记这些法则是解题的关键．

2.（4 分）我国脱贫攻坚战取得了全面胜利．12.8 万个贫困村全部出列，区域性整体贫困得到解决，完成了消灭绝对贫困的艰巨任务，把“12.8 万”用科学记数法表示应是（ ）

A. 12.8×10^4 B. 1.28×10^5 C. 12.8×10^5 D. 1.28×10^6

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，且 n 比原来的整数位数少 1，据此判断即可．

【解答】解：12.8 万 $= 1.28 \times 10^5$ ．

故选：B．

【点评】此题主要考查了用科学记数法表示较大的数，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，确定 a 与 n 的值是解题的关键．

3.（4 分）如果直线 $y=2x+m$ 的图象一定经过第二象限，那么 m 的取值范围是（ ）

A. $m > 0$ B. $m \geq 0$ C. $m < 0$ D. $m \leq 0$

【分析】图象一定经过第二象限，则函数一定与 y 轴的正半轴相交，因而 $m > 0$ ．

【解答】解：根据题意得： $m > 0$ ，

故选：A．

【点评】本题主要考查了一次函数的性质，结合坐标系以及函数的图象理解函数的性质

是关键.

4. (4分) 正多边形的一个内角为 144° , 那么该正多边形的边数为 ()

A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

【分析】根据正多边形的一个内角是 144° , 则知该正多边形的一个外角为 36° , 再根据多边形的外角之和为 360° , 即可求出正多边形的边数.

【解答】解: $\because$ 正多边形的一个内角是 144° ,

$\therefore$ 该正多边形的一个外角为 36° ,

$\therefore$ 多边形的外角之和为 360° ,

$$\therefore \text{边数} = \frac{360^\circ}{36^\circ} = 10,$$

$\therefore$ 这个正多边形的边数是 10.

故选: C.

【点评】本题主要考查多边形内角与外角的知识点, 解答本题的关键是知道多边形的外角之和为 360° , 此题难度不大.

5. (4分) 学校组织朗诵比赛, 有 11 位同学晋级决赛, 每位选手得分各不相同. 如果小杰想要确定自己是否进入前 6 名, 那么除了自己的得分以外, 他还要了解这 11 名同学得分的 ()

A. 平均数 B. 中位数 C. 众数 D. 方差

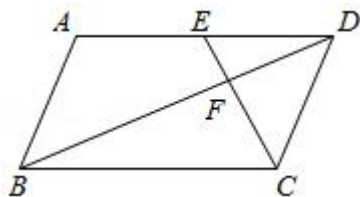
【分析】11 人成绩的中位数是第 6 名的成绩. 参赛选手要想知道自己是否能进入前 6 名, 只需要了解自己的成绩以及全部成绩的中位数, 比较即可.

【解答】解: 由于总共有 11 个人, 且他们的分数互不相同, 第 6 的成绩是中位数, 要判断是否进入前 6 名, 故应知道中位数的多少.

故选: B.

【点评】此题主要考查统计的有关知识, 主要包括平均数、中位数、众数、方差的意义.

6. (4分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 如果点 E 是边 AD 的中点, 且 $\angle A = \angle AEC$, 那么下列结论不正确的是 ()



A. $CE = CD$

B. $BF = 2DF$

$$C. AB = \frac{5}{2}EF$$

$$D. S_{\text{四边形}ABFE} = 5S_{\triangle DEF}$$

【分析】根据相似三角形的判定与性质，平行四边形的性质，逐个判断即可．

【解答】解：在□ABCD中， $AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ， $AB = CD$ ，

$$\because AD \parallel BC, \angle A = \angle AEC,$$

$$\therefore AB = CE,$$

$$\therefore CE = CD, \text{故 } A \text{ 正确};$$

$\because$ 点E是边AD的中点，

$$\therefore AD = BC = 2AE = 2DE,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle BFC \sim \triangle DFE,$$

$$\therefore \frac{BF}{DF} = \frac{BC}{DE} = 2,$$

$$\therefore BF = 2DF, \text{故 } B \text{ 正确};$$

$$\because AB = CE, \frac{FC}{EF} = \frac{BC}{DE} = 2,$$

$$\therefore FC = 2EF,$$

$$\therefore CE = 3EF,$$

$$\therefore AB = CE = 3EF, \text{故 } C \text{ 不正确};$$

$$\therefore \frac{BC}{DE} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle BFC} = 4S_{\triangle DEF},$$

$$\therefore S_{\triangle DFC} = 2S_{\triangle DEF},$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BFC} + S_{\triangle DFC} = 6S_{\triangle DEF},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABFE} = 5S_{\triangle DEF}, \text{故 } D \text{ 正确}.$$

故选：C．

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，平行四边形的性质，三角形的面积等知识，解决本题的关键是掌握相似三角形的判定与性质．

二、填空题：（本大题共12题，每题4分，满分48分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7.（4分）因式分解： $m^2 - n^2 = \underline{(m+n)(m-n)}$ ．

【分析】运用 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 分解即可．

【解答】解：原式 = $(m+n)(m-n)$,

故答案为 $(m+n)(m-n)$.

【点评】考查因式分解的知识；若只有两项，又没有公因式，应考虑用平方差公式分解.

8. (4分) 方程 $\sqrt{3x+4}=x$ 的根是 $x=4$.

【分析】首先把方程两边平方，然后整理方程，解一元二次方程，然后进行检验即可.

【解答】解：两边平方得： $3x+4=x^2$,

解方程得： $x_1=-1$, $x_2=4$,

检验：当 $x=-1$ 时，原方程右边 = -1 ，所以 $x=-1$ 不是原方程的解，

当 $x=4$ 时，原方程左边 = 右边，所以 $x=4$ 是原方程的解.

故答案为： $x=4$;

【点评】本题主要考查了解无理方程，关键在于首先把方程两边分别平方，注意把所得的结果进行检验.

9. (4分) 已知一元二次方程 $\frac{1}{2}x^2 - 2x - m = 0$ 有实数根，那么 m 的取值范围是 $m \geq -2$.

【分析】由方程有两个实数根，得到根的判别式的值大于等于 0，列出关于 m 的不等式，求出不等式的解集即可得到 m 的范围.

【解答】解： $\because$ 一元二次方程 $\frac{1}{2}x^2 - 2x - m = 0$ 有两个实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-m) = 4 + 2m \geq 0,$$

解得： $m \geq -2$.

故 m 的取值范围是 $m \geq -2$.

故答案为： $m \geq -2$.

【点评】本题考查了根的判别式，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：

①当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；

②当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；

③当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

上面的结论反过来也成立.

10. (4分) 不透明的布袋里有 2 个黄球、4 个红球、3 个白球，它们除颜色外其它都相同，

那么从布袋中任意摸出一个球恰好为红球的概率是 $\frac{4}{9}$.

【分析】用红色球的个数除以球的总个数即可.

【解答】解： $\because$ 布袋里共有 9 个除颜色外其它都相同的小球，其中红球有 4 个，

$\therefore$ 从布袋中任意摸出一个球恰好为红球的概率是 $\frac{4}{9}$,

故答案为： $\frac{4}{9}$.

【点评】本题主要考查概率公式，随机事件 A 的概率 $P(A) = \text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数} \div \text{所有可能出现的结果数}$.

11. (4 分) 为了解六年级学生掌握游泳技能的情况，在全区六年级 7200 名学生中，随机抽取了 600 名学生，结果有 240 名学生会游泳，那么估计该区会游泳的六年级学生数约为 2880 人.

【分析】用总人数乘以样本中会游泳的六年级学生数所占比例即可.

【解答】解：估计该区会游泳的六年级学生数约为 $7200 \times \frac{240}{600} = 2880$ (人),

故答案为：2880.

【点评】本题主要考查用样本估计总体，从一个总体得到一个包含大量数据的样本，我们很难从一个个数字中直接看出样本所包含的信息. 这时，我们用频率分布直方图来表示相应样本的频率分布，从而去估计总体的分布情况.

12. (4 分) 已知点 $A(-3, y_1)$ 和点 $B(-\frac{2}{3}, y_2)$ 都在二次函数 $y = ax^2 - 2ax + m$ ($a > 0$) 的图象上，那么 $y_1 - y_2$ $>$ 0 (结果用 $>$, $<$, $=$ 表示).

【分析】将点 $A(-3, y_1)$ 和点 $B(-\frac{2}{3}, y_2)$ 代入二次函数 $y = ax^2 - 2ax + m$ ($a > 0$), 进而可得结果.

【解答】解： $\because$ 点 $A(-3, y_1)$ 和点 $B(-\frac{2}{3}, y_2)$ 都在二次函数 $y = ax^2 - 2ax + m$ ($a > 0$) 的图象上，

$$\therefore y_1 = 9a + 6a + m = 15a + m, \quad y_2 = \frac{4}{9}a + \frac{4}{3}a + m = \frac{16}{9}a + m,$$

$$\therefore y_1 - y_2 = 15a + m - \frac{16}{9}a - m = \frac{119}{9}a,$$

$$\because a > 0,$$

$$\therefore \frac{119}{9}a > 0,$$

$$\therefore y_1 - y_2 > 0.$$

故答案为：>.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数图象上点的坐标满足其解析式，也考查了二次函数的性质，解决本题的关键是掌握二次函数的性质.

13. (4分)《九章算术》记载了这样一个问题：“今有善田一亩，价三百；恶田七亩，价五百，今并买一顷，价钱一万，问善田几何？”意思是：当下良田1亩，价值300钱；薄田7亩，价值500钱，现在共买1顷，价值10000钱，根据条件，良田买了12.5亩.

【分析】设良田买了 x 亩，薄田买了 y 亩，由“当下良田1亩，价值300钱；薄田7亩，价值500钱，现在共买1顷，价值10000钱”列出方程组，解方程组即可.

【解答】解：设良田买了 x 亩，薄田买了 y 亩，

$$\text{依题意得：} \begin{cases} x+y=100 \\ 300x+\frac{500}{7}y=10000 \end{cases},$$

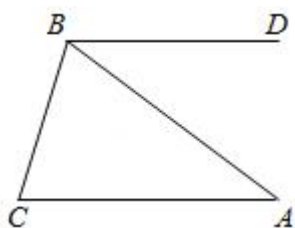
$$\text{解得：} \begin{cases} x=12.5 \\ y=87.5 \end{cases},$$

即良田买了12.5亩，

故答案为：12.5.

【点评】本题考查了由实际问题抽象出二元一次方程组，找准等量关系，正确列出二元一次方程组是解题的关键.

14. (4分)如图， $AC \parallel BD$ ， $\angle C = 72^\circ$ ， $\angle ABC = 70^\circ$ ，那么 $\angle ABD$ 的度数为 38° .



【分析】根据两直线平行，同旁内角互补，以及角的和差关系即可解答.

【解答】解： $\because AC \parallel BD$ ， $\angle C = 72^\circ$ ，

$$\therefore \angle DBC = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 70^\circ,$$

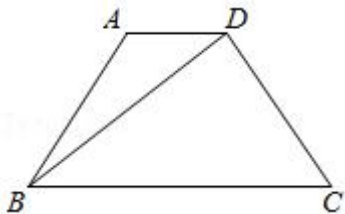
$$\therefore \angle ABD = 108^\circ - 70^\circ = 38^\circ.$$

故答案为： 38° .

【点评】本题考查了两直线平行，同旁内角互补的性质，是基础题，熟记性质是解题的

关键.

15. (4分) 如图, 已知等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 3AD$, 如果 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$. (结果用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示)



【分析】利用三角形法则求解即可.

【解答】解: $\because AD \parallel BC$, $BC = 3AD$,

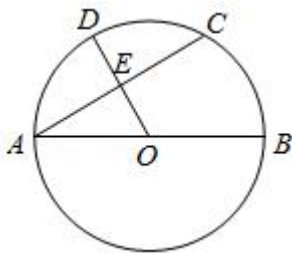
$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b},$$

故答案为: $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.

【点评】本题考查平面向量, 梯形的性质, 三角形法则等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

16. (4分) 如图, AB 是圆 O 的直径, $\widehat{AD} = \widehat{DC} = \widehat{CB}$, AC 与 OD 交于点 E . 如果 $AC = 3$, 那么 DE 的长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



【分析】根据 $\widehat{AD} = \widehat{DC} = \widehat{CB}$, 可得 $\angle AOD = 60^\circ$, $OD \perp AC$, $AE = CE = \frac{1}{2}AC = \frac{3}{2}$, 再根

据含 30° 角的直角三角形即可求出结果.

【解答】解: $\because \widehat{AD} = \widehat{DC} = \widehat{CB}$,

$$\therefore \angle AOD = 60^\circ, \quad OD \perp AC, \quad AE = CE = \frac{1}{2}AC = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore OE = AE \cdot \tan 30^\circ = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore OA = OD = 2OE = \sqrt{3},$$

$$\therefore DE = OD - OE = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点评】 本题考查了垂径定理，圆心角、弧、弦的关系，解决本题的关键是掌握圆的相关性质.

17. (4分) 我们把直角坐标平面内横、纵坐标互相交换的两个点称为“关联点对”，如点 $A(2, 3)$ 和点 $B(3, 2)$ 为一对“关联点对”. 如果反比例函数 $y = \frac{10}{x}$ 在第一象限内的图象上有一对“关联点对”，且这两个点之间的距离为 $3\sqrt{2}$ ，那么这对“关联点对”中，距离 x 轴较近的点的坐标为 $(5, 2)$.

【分析】 根据题意利用反比例函数图象上点的坐标特征结合关联点的定义，求得关联点的坐标，即可得出结论.

【解答】 解：设反比例函数 $y = \frac{10}{x}$ 在第一象限内的图象上一对“关联点对”为 $A(a, b)$,

$B(b, a)$ 且 $a > b$,

$$\therefore ab = 10,$$

$$\because \text{这两个点之间的距离为 } 3\sqrt{2},$$

$$\therefore AB = \sqrt{(a-b)^2 + (b-a)^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore a - b = 3,$$

$$\text{由 } \begin{cases} a-b=3 \\ ab=10 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=5 \\ b=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-2 \\ b=-5 \end{cases},$$

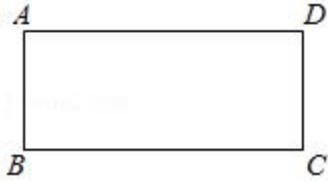
$$\therefore A(5, 2), B(2, 5),$$

$$\therefore \text{距离 } x \text{ 轴较近的点的坐标为 } (5, 2),$$

故答案为 $(5, 2)$.

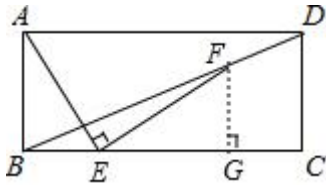
【点评】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征、解方程组，解题的关键是利用反比例函数图象上点的坐标特征结合关联点的定义，求出反比例函数图象上的关联点.

18. (4分) 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $AD = 5$ ，点 E 是 BC 边上一点，联结 AE ，将 AE 绕点 E 顺时针旋转 90° ，点 A 的对应点记为点 F ，如果点 F 在对角线 BD 上，那么 $\frac{BF}{DF} =$ 2.



【分析】根据题意画出图形，过点 F 作 $FG \perp BC$ 于点 G ，由旋转可知： $EA = EF$ ， $\angle AEF = 90^\circ$ ，证明 $\triangle ABE \cong \triangle EGF$ ，可得 $BE = FG$ ， $AB = EG = 2$ ，设 $CG = x$ ，则 $BE = BC - CG - EG = 5 - x - 2 = 3 - x$ ，可得 $FG = BE = 3 - x$ ，根据 $FG \parallel DC$ ，可得 $\triangle BFG \sim \triangle BDC$ ，对应边成比例可得 x 的值，进而可得结论．

【解答】解：根据题意画出图形，过点 F 作 $FG \perp BC$ 于点 G ，



由旋转可知： $EA = EF$ ， $\angle AEF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AEB + \angle FEG = 90^\circ$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABE = 90^\circ$ ， $AB = CD = 2$ ， $BC = AD = 5$ ，

$\therefore \angle BAE + \angle AEB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle FEG$ ，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle EGF$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle GEF \\ \angle ABE = \angle EGF = 90^\circ \\ AE = FE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle EGF$ (AAS)，

$\therefore BE = FG$ ， $AB = EG = 2$ ，

设 $CG = x$ ，则 $BE = BC - CG - EG = 5 - x - 2 = 3 - x$ ，

$\therefore FG = BE = 3 - x$ ，

$\because FG \parallel DC$ ，

$\therefore \triangle BFG \sim \triangle BDC$ ，

$$\therefore \frac{BG}{BC} = \frac{FG}{DC}$$

$$\therefore \frac{5-x}{5} = \frac{3-x}{2}$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{3},$$

$$\therefore CG = \frac{5}{3},$$

$$\therefore BG = BC - CG = 5 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3},$$

$$FG = 3 - x = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore FG \parallel DC,$$

$$\therefore \frac{BF}{DF} = \frac{BG}{CG} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}} = 2.$$

故答案为：2.

【点评】 本题考查了旋转的性质，矩形的性质，相似三角形的判定与性质，平行线分线段成比例定理，解决本题的关键是综合运用以上知识.

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算： $(\frac{1}{2})^{-2} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - 27^{\frac{2}{3}} + |\sqrt{3} - 2|$.

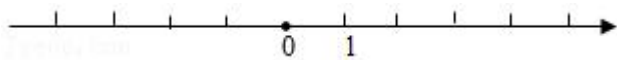
【分析】 直接利用积的乘方运算法则以及负整数指数幂的性质分别化简得出答案.

【解答】 解：原式 = $2^2 + 2 + \sqrt{3} - 3^2 + 2 - \sqrt{3}$.

$$= -1.$$

【点评】 此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

20. (10 分) 解不等式组： $\begin{cases} 5x > 3x - 8 \\ \frac{x+2}{4} \geq x - 1 \end{cases}$ ，并把解集在数轴上表示出来.



【分析】 分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集，再把解集在数轴上表示出来即可.

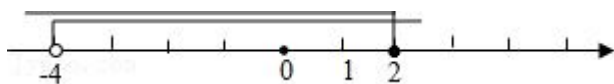
【解答】 解： $\begin{cases} 5x > 3x - 8 \text{ ①} \\ \frac{x+2}{4} \geq x - 1 \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式①得： $x > -4$,

解不等式②得： $x \leq 2$,

故不等式组的解集为 $-4 < x \leq 2$,

将解集表示在数轴上如下：

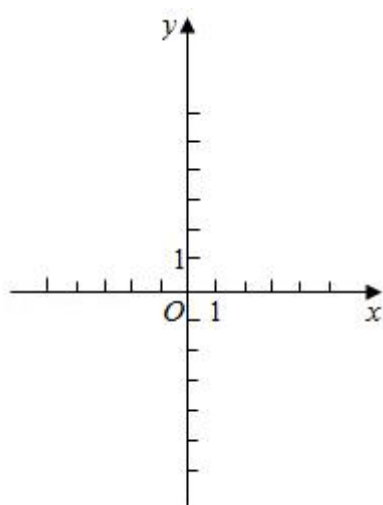


【点评】 本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键．

21. (10 分) 已知直线 $y = x + m$ 经过点 $A(2, 3)$ ，且与 x 轴交于点 B ．

(1) 求点 B 的坐标；

(2) 如果一个反比例函数的图象与线段 BA 的延长线交于点 D ，且 $BA:AD = 3:2$ ，求这个反比例函数的解析式．



(备用图)

【分析】 (1) 根据直线 $y = x + m$ 经过点 $A(2, 3)$ ，可得 m 的值，进而根据直线与 x 轴交于点 B ，可得点 B 的坐标；

(2) 过点 A, D 作 x 轴的垂线，垂足分别为点 G, H ，根据题意可知： $AG = 2, BG = 3$ ，根据 $BA:AD = 3:2$ ，即可求出点 D 坐标，进而可得反比例函数的解析式．

【解答】 解：(1) $\because$ 直线 $y = x + m$ 经过点 $A(2, 3)$ ，

$$\therefore 2 + m = 3,$$

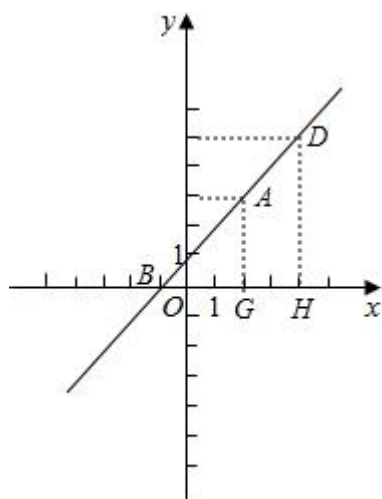
解得 $m = 1$ ，

$\therefore$ 直线 $y = x + 1$ 与 x 轴交于点 B ．

$$\therefore x = -1,$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-1, 0)$ ；

(2) 过点 A, D 作 x 轴的垂线，垂足分别为点 G, H ，



(备用图)

$$\therefore AG \parallel DH,$$

根据题意可知： $AG = 2$ ， $BG = 3$ ，

$$\therefore BA : AD = 3 : 2,$$

$$\therefore GH = 2, DH = 5,$$

$$\therefore D(4, 5),$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{20}{x}.$$

【点评】 本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，解决本题的关键是掌握一次函数与反比例函数的性质.

22. (10分) 图1是某地摩天轮的图片，图2是示意图. 已知线段 BC 经过圆心 D 且垂直于地面，垂足为点 C ，当座舱在点 A 时，测得摩天轮顶端点 B 的仰角为 15° ，同时测得点 C 的俯角为 76° ，又知摩天轮的半径为 10 米，求摩天轮顶端 B 与地面的距离. (精确到 1 米)

参考数据： $\sin 15^\circ \approx 0.26$ ， $\cos 15^\circ \approx 0.96$ ， $\tan 15^\circ \approx 0.27$ ， $\sin 76^\circ \approx 0.97$ ， $\cos 76^\circ \approx 0.24$ ， $\tan 76^\circ \approx 4.01$.



图 1

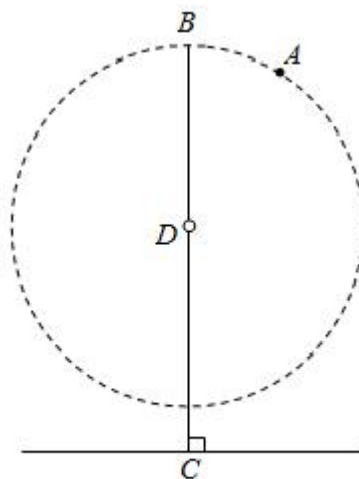


图 2

【分析】连接 AB 、 AD 、 AC ，过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ，由题意得 $DB = DA$ ，由锐角三角函数定义求出 BE 、 CE 的长，即可求解．

【解答】解：连接 AB 、 AD 、 AC ，过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ，

则 $\angle AEB = \angle AEC = 90^\circ$ ，

由题意得：点 A 、 B 在圆 D 上，

$\therefore DB = DA$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $\angle BAE = 15^\circ$ ，

$\therefore \angle DBA = \angle DAB = 75^\circ$ ， $\angle DAE = 60^\circ$ ，

$\because DA = 10$ 米，

$\therefore AE = 5$ （米），

$\therefore BE = AE \times \tan 15^\circ \approx 5 \times 0.27 = 1.35$ （米），

$\because \angle EAC = 76^\circ$ ，

$\therefore CE = AE \times \tan 76^\circ \approx 5 \times 4.01 = 20.05$ （米），

$\therefore BC = BE + CE = 1.35 + 20.05 \approx 21$ （米），

答：摩天轮顶端 B 与地面的距离约为 21 米．

$$\therefore \triangle GDF \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \frac{DG}{AD} = \frac{DF}{AF},$$

$$\therefore AD^2 = DG \cdot AF;$$

(2) 解: $\because AF$ 平分 $\angle BAD$,

$$\therefore \angle BAE = \angle DAF,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BEA = \angle DAF,$$

$$\therefore \angle BEA = \angle BAE,$$

$$\because BG \perp AE, AB = 6, AD = 9,$$

$$\therefore BA = BE = 6,$$

$$\because \angle BEA = \angle CEF,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle F,$$

$$\therefore EC = CF = 3, DF = AD = 9,$$

$$\therefore \frac{FE}{FA} = \frac{CE}{AD} = \frac{1}{3},$$

即 $AG = GE = EF$,

$$\because AD^2 = DG \cdot AF,$$

$$\therefore \frac{2}{3}AF^2 = 81,$$

$$\therefore AF = \frac{9\sqrt{6}}{2}.$$

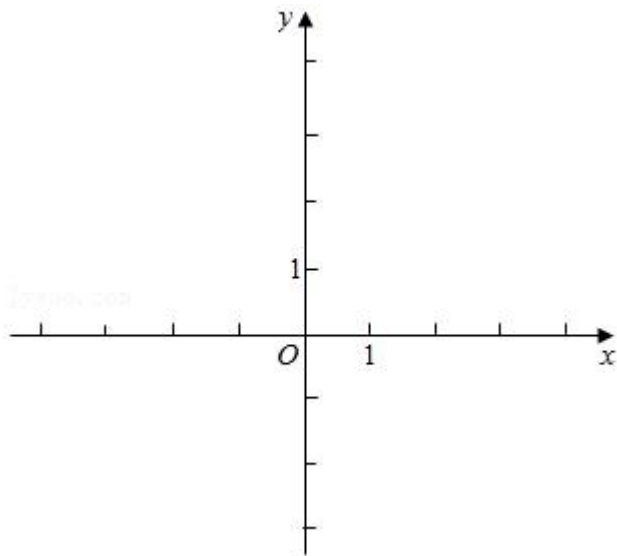
【点评】 本题考查了平行四边形的性质、等腰三角形的判定与性质以及相似三角形的判定与性质, 涉及的知识较多, 比较麻烦, 解决本题的关键是注意掌握性质的运用.

24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$ 和点 $D(-3, n)$, 与 y 轴交于点 C .

(1) 求该抛物线的表达式及点 D 的坐标;

(2) 将抛物线平移, 使点 C 落在点 B 处, 点 D 落在点 E 处, 求 $\triangle ODE$ 的面积;

(3) 如果点 P 在 y 轴上, $\triangle PCD$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 求点 P 的坐标.



【分析】（1）由待定系数法可求出解析式，由抛物线解式可求出点 D 的坐标；

（2）求出 E 点坐标，由三角形面积公式可得出答案；

（3）由点的坐标得出 $\angle ABC = \angle OCD = 45^\circ$ ，若 $\triangle PCD$ 与 $\triangle ABC$ 相似，分两种情况：

①当 $\angle BAC = \angle CDP$ 时， $\triangle DCP \sim \triangle ABC$ ；②当 $\angle BAC = \angle DPC$ 时， $\triangle PCD \sim \triangle ABC$ ，得出比例线段，则可求出答案．

【解答】解：（1） $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 经过点 $A(-2, 0)$ ， $B(1, 0)$ 和 $D(-3, n)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 4a - 2b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为：} y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1;$$

$$\therefore n = \frac{1}{2} \times (-3)^2 + \frac{1}{2} \times (-3) - 1 = 2,$$

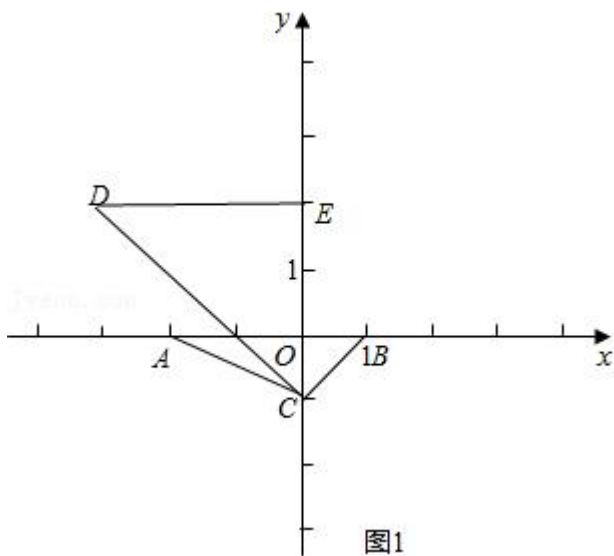
$$\therefore D(-3, 2);$$

（2） $\because$ 将抛物线平移，使点 C 落在点 B 处，点 D 落在点 E 处，

$$\therefore E(-2, 3),$$

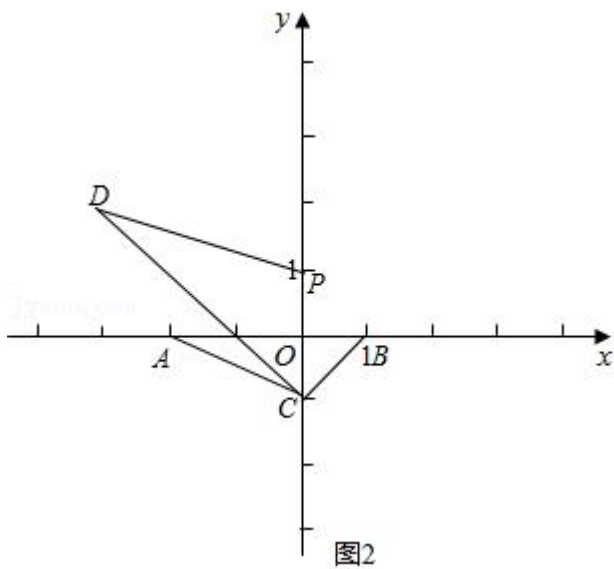
$$\therefore S_{\triangle ODE} = 9 - \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2};$$

（3）如图 1，连接 CD ， AC ， CB ，过点 D 作 $DE \perp y$ 轴于点 E ，



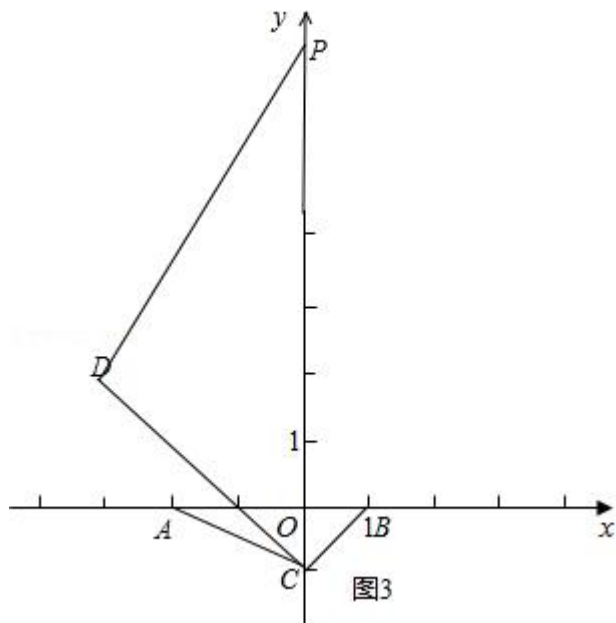
$\because A(-2, 0), B(1, 0), C(0, -1), D(-3, 2),$
 $\therefore OB = OC, DE = CE = 3, AB = 3, BC = \sqrt{2}, CD = 3\sqrt{2},$
 $\therefore \angle ABC = \angle OCD = 45^\circ,$
 $\because \triangle PCD$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 点 P 在 y 轴上,
 $\therefore$ 分两种情况讨论:

①如图 2, 当 $\angle BAC = \angle CDP$ 时, $\triangle DCP \sim \triangle ABC$,



$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{AB}{CD} &= \frac{BC}{PC}, \\
 \therefore \frac{3}{3\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{PC}, \\
 \therefore PC &= 2, \\
 \therefore P &(0, 1),
 \end{aligned}$$

②如图 3，当 $\angle BAC = \angle DPC$ 时， $\triangle PCD \sim \triangle ABC$ ，



$$\begin{aligned} \therefore \frac{BC}{CD} &= \frac{AB}{PC}, \\ \therefore \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} &= \frac{3}{PC}, \end{aligned}$$

$$\therefore PC = 9,$$

$$\therefore P(0, 8).$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0, 8)$ 或 $(0, 1)$ 时， $\triangle PCD$ 与 $\triangle ABC$ 相似.

【点评】 本题二次函数综合题，考查了待定系数法求解析式，二次函数的性质，三角形的面积，相似三角形的判定和性质等知识，灵活运用这些知识解决问题是解题的关键.

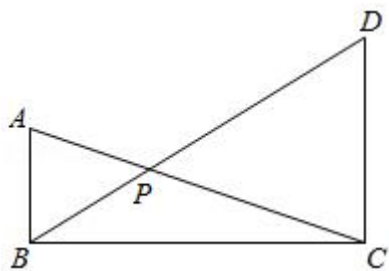
25. (14 分) 如图，已知 $AB \perp BC$ ， $DC \perp BC$ ，垂足分别为点 B 、点 C ， AC 与 BD 交于点 P .

(1) 如果 $AB = 3$ ， $CD = 5$ ，以点 P 为圆心作圆，圆 P 与直线 BC 相切.

①求圆 P 的半径长；

②又 $BC = 8$ ，以 BC 为直径作圆 O ，试判断圆 O 与圆 P 的位置关系，并说明理由.

(2) 如果分别以 AB 、 CD 为直径的两圆外切，求证： $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 相似.



【分析】 (1) ①过点 P 作 $PH \perp BC$ 于 H . 利用平行线分线段成比例定理求出 PH ，可得

结论.

②求出 OP 的长, 即可判断.

(2) 设 AB , DC 的中点分别为 O_1 , O_2 , 连接 O_1O_2 , 过点 O_1 作 $O_1E \perp DC$ 于 E , 设 $AB = a$, $DC = b$. 根据两边成比例夹角相等, 证明三角形相似即可.

【解答】解: (1) ①过点 P 作 $PH \perp BC$ 于 H .

$$\because AB \perp BC, DC \perp BC,$$

$$\therefore AB \parallel PH \parallel DC,$$

$$\therefore \frac{PH}{AB} = \frac{CH}{CB}, \frac{PH}{DC} = \frac{BH}{BC},$$

$$\because AB = 3, DC = 5,$$

$$\therefore \frac{PH}{3} + \frac{PH}{5} = 1,$$

$$\therefore PH = \frac{15}{8},$$

$\therefore$ 直线 BC 与 $\odot P$ 相切,

$$\therefore \odot P \text{ 的半径为 } \frac{15}{8}.$$

②结论: $\odot O$ 与 $\odot P$ 内切.

理由: 设 BC 的中点为 O ,

$$\because BC = 8,$$

$$\therefore OB = OC = 4,$$

$$\text{由 } \frac{PH}{AB} = \frac{CH}{BC},$$

$$\therefore CH = 5, OH = 1,$$

$$\therefore OP = \frac{17}{8},$$

$$\text{即 } OP = |R_O - R_P|,$$

$\therefore \odot O$ 与 $\odot P$ 内切.

(2) 设 AB , DC 的中点分别为 O_1 , O_2 , 连接 O_1O_2 , 过点 O_1 作 $O_1E \perp DC$ 于 E , 设 $AB = a$, $DC = b$.

$$\text{由题意 } O_1O_2 = \frac{a+b}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle O_1O_2E$ 中, $O_1E = \sqrt{ab}$,

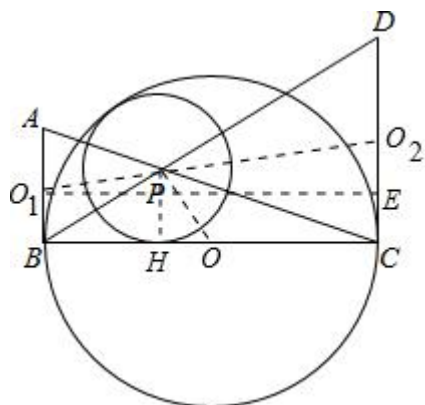
$$\because O_1E = BC,$$

$$\therefore AB \cdot DC = BC^2,$$

$$\text{即 } \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DC},$$

$$\because \angle ABC = \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BCD.$$



【点评】 本题属于圆综合题, 考查了切线的判定, 相似三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.