

2021 年上海市奉贤区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. 计算 $3a \cdot 2a$ 的结果是（ ）

A. $6a$

B. $6a^2$

C. $5a$

D. $5a^2$

【答案】B

【解析】

【分析】根据单项式与单项式相乘，把他们的系数分别相乘，相同字母的幂分别相加，其余字母连同他的指数不变，作为积的因式，计算即可.

【详解】解： $3a \cdot 2a = 6a^2$.

故选：B.

2. 在下列各式中，二次根式 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的有理化因式是（ ）

A. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

B. $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

C. $\sqrt{a+b}$

D. $\sqrt{a-b}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用平方差公式及有理化因式的定义逐个判断即可.

【详解】解： $\because (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的有理化因式是 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ，故 A、C、D 均不符合题意，选项 B 符合题意，

故选：B.

【点睛】本题考查二次根式的化简、分母有理化等知识，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键.

3. 某校对进校学生进行体温检测，在某一时段测得 6 名学生的体温分别为 36.8°C ， 36.9°C ， 36.5°C ， 36.6°C ， 36.9°C ， 36.5°C ，那么这 6 名学生体温的平均数与中位数分别是（ ）

A. 36.7°C ， 36.7°C

B. 36.6°C ， 36.8°C

C. 36.8°C ， 36.7°C

D. 36.7°C ， 36.8°C

【答案】A

【解析】

【分析】根据平均数的求法，求出平均数即可，然后将这组数据重新排列，再根据中位数和平均数的定义求解即可.

【详解】解：将这组数据重新排列为 36.5°C , 36.5°C , 36.6°C , 36.8°C , 36.9°C , 36.9°C ,

$\therefore$ 这组数据的平均数为 $\frac{2 \times 36.5 + 36.6 + 36.8 + 2 \times 36.9}{6} = 36.7(^{\circ}\text{C})$,

中位数为 $\frac{36.6 + 36.8}{2} = 36.7(^{\circ}\text{C})$,

故选：A.

【点睛】本题主要考查中位数和平均数，将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

4. 下列函数中， y 随 x 的增大而减小的是（ ）

A. $y = 2x$

B. $y = \frac{2}{x}$

C. $y = -2x$

D. $y = -\frac{2}{x}$

【答案】C

【解析】

【分析】反比例函数的增减性有限制条件（即范围），一次函数当一次项系数为负数时， y 随着 x 增大而减小.

【详解】解：A、函数 $y=2x$ 的图象是 y 随着 x 增大而增大，故本选项错误；

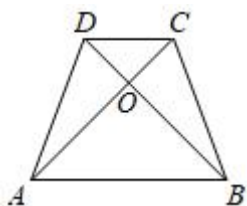
C、函数 $y=-2x$ 中的 $k < 0$ ， y 随着 x 增大而减小，故本选项正确；

B、D 两个答案考虑其增减性时，需要考虑自变量的取值范围，故 B、D 错误.

故选：C.

【点睛】本题考查了一次函数、反比例函数的增减性. 关键是明确各函数的增减性的限制条件.

5. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ，对角线 AC 、 BD 交于点 O ，下列条件中，不一定能判断梯形 $ABCD$ 是等腰梯形的是（ ）



A. $AD = BC$

B. $\angle ABC = \angle BAD$

C. $AB = 2DC$

D. $\angle OAB = \angle OBA$

【答案】C

【解析】

【分析】等腰梯形的判定定理有：①有两腰相等的梯形是等腰梯形，②对角线相等的梯形是等腰梯形，③在同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形，根据以上内容判断即可.

【详解】解：A、 $\because AD=BC$,

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 是等腰梯形，故本选项错误；

B、 $\because \angle ABC = \angle BAD$,

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 是等腰梯形，故本选项错误；

C、 $\because AB=2DC$,

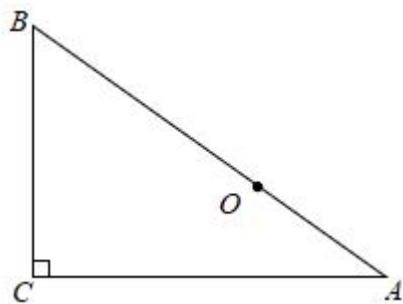
$\therefore$ 不能推出四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，故本选项正确；

D、根据 $\angle OAB = \angle OBA$ ，能推出梯形 $ABCD$ 是等腰梯形，故本选项错误.

故选：C.

【点睛】本题主要考察了等腰梯形的判定，属于基础题型.

6. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $BC=18$ ， $AC=24$ ，点 O 在边 AB 上，且 $BO=2OA$. 以点 O 为圆心， r 为半径作圆，如果 $\odot O$ 与 $Rt\triangle ABC$ 的边有 3 个公共点，那么下列各值中，半径 r 不可以取的是 ()



A. 6

B. 10

C. 15

D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】根据勾股定理得到 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 30$ ，求得 $OA=10$ ， $OB=20$ ，过 O 分别作 $OD \perp AC$ 于 D ， $OE \perp BC$ 于 E ，根据相似三角形的性质即可得到结论.

【详解】解： $\because \angle C=90^\circ$ ， $BC=18$ ， $AC=24$ ，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 30$ ，

$$\therefore BO = 2OA,$$

$$\therefore OA = 10, OB = 20,$$

过 O 分别作 $OD \perp AC$ 于 D , $OE \perp BC$ 于 E ,

$$\therefore \angle BEO = \angle C = \angle ADO,$$

$$\therefore \angle A = \angle A, \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BEO \sim \triangle BCA, \triangle AOD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{BO}{BA} = \frac{OE}{AC}, \frac{AO}{AB} = \frac{OD}{BC},$$

$$\therefore \frac{20}{30} = \frac{OE}{24}, \frac{10}{30} = \frac{OD}{18},$$

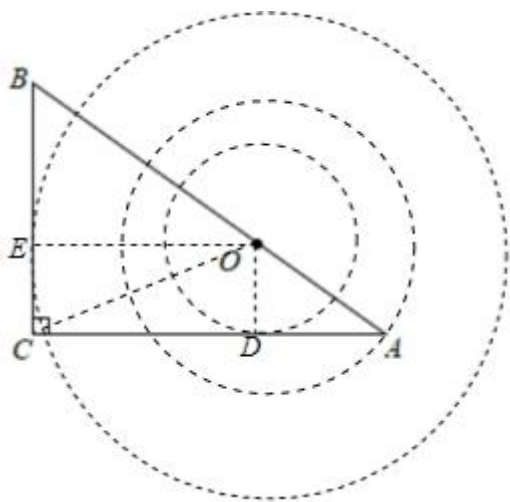
$$\therefore OE = 16, OD = 6,$$

当 $\odot O$ 过点 C 时, 连接 OC , 根据勾股定理得 $OC = \sqrt{OD^2 + CD^2} = 2\sqrt{73}$,

如图, $\therefore$ 以点 O 为圆心, r 为半径作圆, 如果 $\odot O$ 与 $Rt\triangle ABC$ 的边有 3 个公共点,

$$\therefore r = 6 \text{ 或 } 10 \text{ 或 } 16 \text{ 或 } 2\sqrt{73},$$

故选: C .



【点睛】 本题考查了直线与圆的位置关系, 相似三角形的判定和性质, 正确的理解题意是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 9 的平方根是_____.

【答案】 ± 3

【解析】

【详解】分析：根据平方根的定义解答即可.

详解： $\because (\pm 3)^2 = 9$,

$\therefore 9$ 的平方根是 ± 3 .

故答案为 ± 3 .

点睛：本题考查了平方根的定义，注意一个正数有两个平方根，它们互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根.

8. 函数 $y = \frac{x}{x-1}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq 1$.

【解析】

【详解】试题分析：由题意得， $x - 1 \neq 0$ ，解得 $x \neq 1$. 故答案为 $x \neq 1$.

考点：函数自变量的取值范围.

9. 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在对称轴左侧呈上升趋势，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < 0$

【解析】

【分析】利用二次函数的性质得到抛物线开口向下，即可求解.

【详解】解： $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在对称轴左侧呈上升趋势，

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$\therefore a < 0$,

故答案为 $a < 0$.

【点睛】本题考查了二次函数的性质，熟练掌握二次函数的增减性是解题的关键

10. 如果一元二次方程 $x^2 - px + 3 = 0$ 有两个相等的实数根，那么 p 的值是_____.

【答案】 $\pm 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】关于 x 的方程 $x^2 - px + 3 = 0$ 有两个相等的实数根，即 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，代入即可求 p 的值.

【详解】解： $\because$ 一元二次方程 $x^2 - px + 3 = 0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta = (-p)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 0$,

解得 $p = \pm 2\sqrt{3}$,

故答案为： $\pm 2\sqrt{3}$.

【点睛】此题考查了一元二次方程根与系数关系，熟练掌握一元二次方程根与系数的关系的几种情况是解题的关键.

11. 将 π , $\frac{2}{3}$, $\sqrt{2}$, 0 , -1 这 5 个数分别写在 5 张相同的卡片上, 字面朝下随意放在桌上, 任取一张, 取到无理数的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】根据随机事件概率大小的求法, 找准两点: ①符合条件的情况数目; ②全部情况的总数. 二者的比值就是其发生的概率的大小.

【详解】解: 从写有 $\pi, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, 0, -1$ 这 5 个数的相同卡片上任取一张, 有 5 种等可能结果, 其中取到无理数的有 $\pi, \sqrt{2}$ 这 2 种结果,

所以取到无理数的概率为 $\frac{2}{5}$,

故答案为: $\frac{2}{5}$

【点睛】本题考察了无理数, 概率等知识点, 属于基础题型.

12. 某小区一天收集各类垃圾共 2.4 吨, 绘制成各类垃圾收集量的扇形图, 其中湿垃圾在扇形图中对应的圆心角为 135° , 那么该小区这一天湿垃圾共收集了_____吨.

【答案】 0.9

【解析】

【分析】根据扇形统计图的意义, 求出湿垃圾占垃圾总数的百分比即可.

【详解】解: $2.4 \times \frac{135}{360} = 0.9$ (吨),

故答案为: 0.9..

【点睛】本题主要考察了扇形统计图, 属于基础题型.

13. 某品牌汽车公司大力推进技术革新, 新款汽车油耗从每百公里 8 升下降到每百公里 6.8 升, 那么该汽车油耗的下降率为_____.

【答案】 15%

【解析】

【分析】先求出新款汽油车每百公里下降的油耗, 然后再用下降的油耗除以原来的每百公里油耗即为所求.

【详解】解: 根据题意得, $8 - 6.8 = 1.2$ (升),

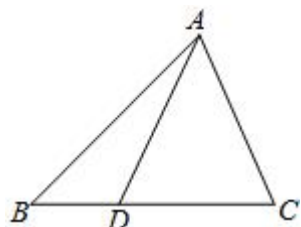
$$12 \div 8 = 15\%,$$

$\therefore$ 该汽车油耗下降率为 15%.

故答案为：15%.

【点睛】 本题主要考察了有理数的相关计算，弄清楚下降率是什么是解题关键.

14. 如图 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 BC 上，且 $CD = 2BD$. 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{AD} =$ _____



【答案】 $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】 首先利用三角形法则求得 $\overrightarrow{BC}$ ，则 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ；然后再在 $\triangle ABD$ 中，利用三角形法则求得 $\overrightarrow{AD}$.

【详解】 解： $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\because CD = 2BD$$

$$\text{则 } \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b},$$

$$\text{故答案为： } \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

【点睛】 本题主要考察了平面向量的计算，属于基础题型.

15. 已知传送带和水平面所成斜坡的坡度 $i = 1:3$ ，如果物体在传送带上经过的路程是 30 米，那么该物体上升的高度是_____米（结果保留根号）.

【答案】 $3\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 过 A 作 $AB \perp CB$ 于 B ，根据坡度的概念求出 $BC = 3AB$ ，再根据勾股定理计算得到答案.

【详解】 解：过 A 作 $AB \perp CB$ 于 B ，如图所示：

由题意得， $AC = 30$ 米，

$\because$ 斜坡的坡度 $i = 1:3$,

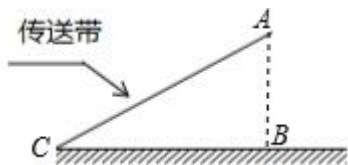
$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BC = 3AB,$$

由勾股定理得, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{10}AB = 30$ 米,

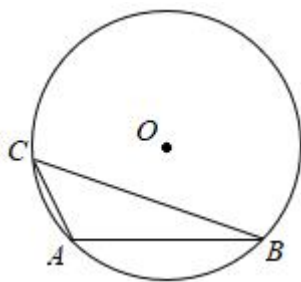
$$\therefore AB = 3\sqrt{10}(m),$$

故答案为: $3\sqrt{10}$.



【点睛】本题考查的是解直角三角形的应用—坡度坡角问题，掌握坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比是解题的关键.

16. 如图, $\odot O$ 的半径为 6, 如果弦 AB 是 $\odot O$ 内接正方形的一边, 弦 AC 是 $\odot O$ 内接正十二边形的一边, 那么弦 BC 的长为_____.



【答案】 $6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】连接 OA 、 OB 、 OC , 作 $OD \perp BC$ 于点 D , 根据 AB 是 $\odot O$ 内接正方形的一边, 弦 AC 是 $\odot O$ 内接正十二边形的一边得到 $\angle AOB = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$, $\angle AOC = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$, 从而得到 $\angle BOC = \angle AOB + \angle AOC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$, 然后求得 BC 的长即可.

【详解】解: 连接 OA 、 OB 、 OC , 作 $OD \perp BC$ 于点 D ,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 内接正方形的一边, 弦 AC 是 $\odot O$ 内接正十二边形的一边,

$$\therefore \angle AOB = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ, \quad \angle AOC = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle AOB + \angle AOC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ,$$

$$\because OC = OB,$$

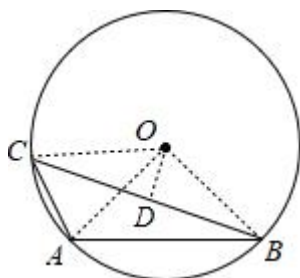
$$\therefore \angle OCD = \angle OBC = 30^\circ,$$

$$\because OC=6,$$

$$\therefore CD = \frac{OC}{\cos 30^\circ} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = 2CD = 6\sqrt{3},$$

故答案为: $6\sqrt{3}$.



【点睛】考查了正多边形和圆的知识，解题的关键是求得 $\angle BOC$ 的度数.

17. 我们把反比例函数图象上到原点距离相等的点叫做反比例函数图象上的等距点. 如果第一象限内点 $A(2, 4)$ 与点 B 是某反比例函数图象上的等距点, 那么点 A, B 之间的距离是_____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据题意, 结合反比例函数和轴对称的性质, 得出 B 的坐标, 然后根据勾股定理即可求得点 A, B 之间的距离, 即可完成求解.

【详解】由题意可知, 点 B 与点 A 关于直线 $y=x$ 对称,

$$\because \text{点 } A(2, 4),$$

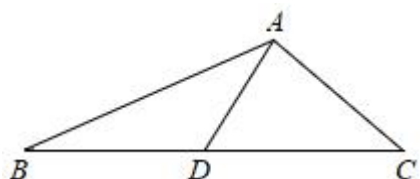
$$\therefore \text{点 } B(4, 2),$$

$$\therefore AB = \sqrt{(4-2)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2},$$

故答案为: $2\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了反比例函数、轴对称、直角坐标系、勾股定理的知识; 解题的关键是熟练掌握反比例函数的性质, 从而完成求解.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的中线, $\angle ADC = 60^\circ$, $BC = 3AD$. 将 $\triangle ABD$ 沿直线 AD 翻折, 点 B 落在平面上的 B' 处, 联结 AB' 交 BC 于点 E , 那么 $\frac{CE}{BE}$ 的值为_____.

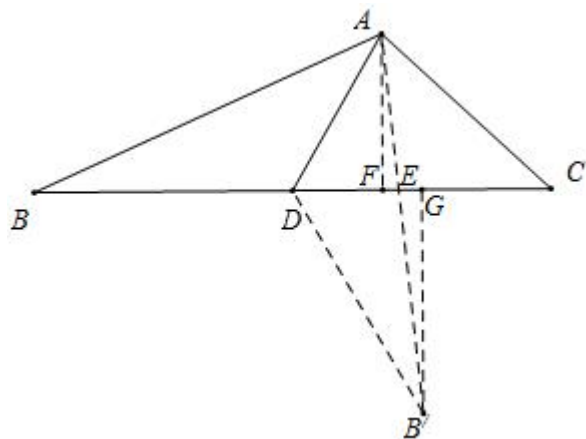


【答案】 $\frac{3}{7}$

【解析】

【分析】过 A 作 $AF \perp BC$ 于 F ，过 B 作 $B'G \perp BC$ 于 G ，设 $AD = m$ ，根据翻折及 $\angle ADC = 60^\circ$ ，用 m 的代数式表示 CE 、 BE 即可得出答案。

【详解】解：过 A 作 $AF \perp BC$ 于 F ，过 B 作 $B'G \perp BC$ 于 G ，如图：



$$\because \angle ADC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = 120^\circ,$$

$\because \triangle ABD$ 沿直线 AD 翻折，点 B 落在平面上的 B' 处，

$$\therefore \angle ADB' = 120^\circ, \angle CDB' = 60^\circ, B'D = BD,$$

$\because BC = 3AD$ ， AD 是 BC 边上的中线，

$$\therefore \text{设 } AD = m, \text{ 则 } BC = 3m, BD = B'D = \frac{3}{2}m,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ADF \text{ 中, } DF = AD \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}m, AF = AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}m,$$

$$\therefore BF = BD + DF = 2m, CF = BC - BF = m$$

$$\text{在 } Rt\triangle B'DG \text{ 中, } DG = B'D \cdot \cos 60^\circ = \frac{3}{4}m, B'G = B'D \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}m,$$

$$\therefore FG = DG - DF = \frac{1}{4}m,$$

$$\because AF \perp BC, B'G \perp BC,$$

$$\therefore AF \parallel B'G,$$

$$\therefore \frac{FE}{GE} = \frac{AF}{B'G} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}m}{\frac{3\sqrt{3}}{4}m} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore FE + GE = FG = \frac{1}{4}m,$$

$$\therefore FE = \frac{1}{10}m,$$

$$\therefore BE = BF + EF = \frac{21}{10}m, \quad CE = CF - EF = \frac{9}{10}m,$$

$$\therefore \frac{CE}{BE} = \frac{\frac{9}{10}m}{\frac{21}{10}m} = \frac{3}{7},$$

故答案为: $\frac{3}{7}$.

【点评】本题考查翻折、特殊角的三角函数及相似三角形性质等综合知识，解题的关键是做垂线把 60° 角放入直角三角形.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 先化简, 再求值: $\frac{4x}{x^2 - 2x - 3} - \frac{x}{x - 3} + \frac{2x}{x + 1}$, 其中 $x = \sqrt{3}$.

【答案】 $\frac{x}{x+1}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式, 再将 x 的值代入计算即可.

【详解】解: 原式 = $\frac{4x}{(x-3)(x+1)} - \frac{x^2 + x}{(x+1)(x-3)} - \frac{2x^2 - 6x}{(x+1)(x-3)}$

$$= \frac{x^2 - 3x}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-3)}$$

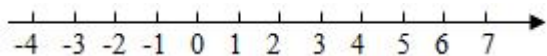
$$= \frac{x}{x+1},$$

当 $x = \sqrt{3}$ 时,

$$\text{原式} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

【点睛】本题主要考查分式的混合运算化简, 二次根式的运算, 解题的关键是将分式因式分解, 然后通分, 再将 x 的值代入计算即可.

20. 解不等式组:
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3 < 2x \\ \frac{2x-1}{3} \leq \frac{x+1}{2} \end{cases}$$
, 并把解集在数轴上表示出来.



【答案】 $-2 < x \leq 5$, 图见解析

【解析】

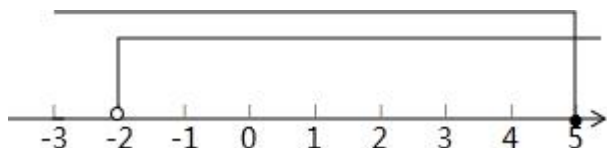
【分析】 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了即可确定不等式组的解集.

【详解】 解: 解不等式 $\frac{1}{2}x - 3 < 2x$, 得: $x > -2$,

解不等式 $\frac{2x-1}{3} \leq \frac{x+1}{2}$, 得: $x \leq 5$,

则不等式组的解集为 $-2 < x \leq 5$,

将不等式组的解集表示在数轴上如下:

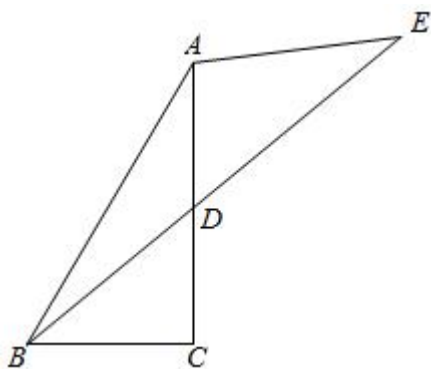


【点睛】 此题主要考查不等式组的求解, 解题的关键是熟知不等式的性质.

21. 如图, 已知, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 2$, 点 D 是 AC 的中点, 联结 BD 并延长至点 E , 使 $\angle E = \angle BAC$.

(1) 求 $\sin \angle ABE$ 的值;

(2) 求点 E 到直线 BC 的距离.



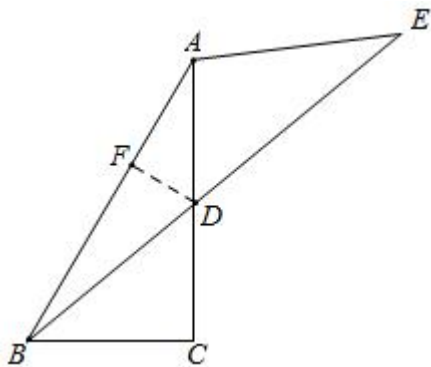
【答案】 (1) $\frac{\sqrt{21}}{14}$; (2) $\frac{16\sqrt{3}}{7}$

【解析】

【分析】(1) 过 D 作 $DF \perp AB$ 于 F ，结合题意，根据勾股定理、三角函数的性质，分别求出 DF 和 BD ，即可得答案；

(2) 过 A 作 $AH \perp BE$ 于 H ，过 E 作 $EG \parallel AC$ 交 BC 延长线于 G ，根据相似三角形性质，通过证明 $\triangle BCD \sim \triangle AHD$ ，得 AH 、 HD ，结合三角函数性质，计算得 HE ，从而得 BE ，再用相似三角形性质，通过证明 $\triangle CBD \sim \triangle GBE$ ，即可得到答案.

【详解】(1) 过 D 作 $DF \perp AB$ 于 F ，如图：



$$\because \angle C = 90^\circ, AB = 4, BC = 2,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 2\sqrt{3}, \sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle BAC = 30^\circ,$$

$\because$ 点 D 是 AC 的中点,

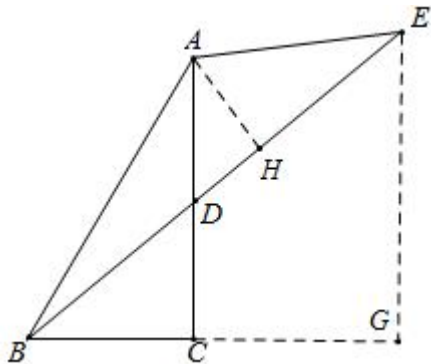
$$\therefore AD = CD = \sqrt{3},$$

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{7}$$

$$\text{Rt} \triangle ADF \text{ 中, } DF = AD \times \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Rt} \triangle BDF \text{ 中, } \sin \angle ABE = \frac{DF}{BD} = \frac{\sqrt{21}}{14};$$

(2) 过 A 作 $AH \perp BE$ 于 H ，过 E 作 $EG \parallel AC$ 交 BC 延长线于 G ，如图：



$$\therefore \angle CGE = 90^\circ$$

$$\because \angle ADH = \angle BDC, \angle BCD = \angle AHD = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle AHD$$

$$\therefore \frac{BC}{AH} = \frac{BD}{AD} = \frac{CD}{HD}$$

$$\because BC = 2, AD = CD = \sqrt{3}, BD = \sqrt{7}$$

$$\therefore \frac{2}{AH} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{HD}$$

$$\therefore AH = \frac{2\sqrt{21}}{7}, HD = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$\because \angle AEB = \angle BAC = 30^\circ$$

$$\therefore HE = \frac{AH}{\tan 30^\circ} = \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

$$\therefore BE = BD + HD + HE = \sqrt{7} + \frac{3\sqrt{7}}{7} + \frac{6\sqrt{7}}{7} = \frac{16\sqrt{7}}{7}$$

$$\because EG \parallel AC$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BEG,$$

$$\because \angle CBD = \angle GBE,$$

$$\therefore \triangle CBD \sim \triangle GBE,$$

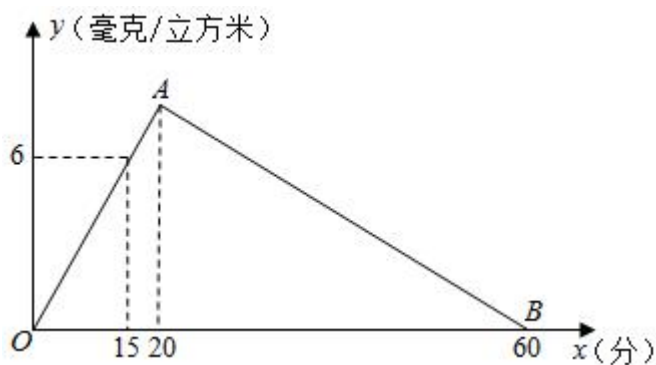
$$\therefore \frac{GE}{CD} = \frac{BE}{BD}, \text{ 即 } \frac{GE}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{16\sqrt{7}}{7}}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore EG = \frac{16\sqrt{3}}{7}.$$

【点睛】 本题考查了勾股定理、三角函数、相似三角形、平行线、二次根式的知识；解题的关键是熟练掌握勾股定理、三角函数、相似三角形的性质，从而完成求解.

22. 为了预防“诺如病毒”，某校对专用教室采取“药熏”消毒. 从开始消毒到结束，室内含药量 y (毫克/立方米) 与时间 x (分) 这两个变量之间的关系如图中折线 $OA-AB$ 所示.

- (1) 求 20 分钟至 60 分钟时间段之间的含药量 y 与时间 x 的函数解析式 (不要求写定义域);
- (2) 开始消毒后，消毒人员在某一时刻对该专用教室的含药量进行第一次检测，时隔半小时进行了第二次跟踪检测，发现室内含药量比第一次检测时的含药量下降了 2 毫克/立方米，求第一次检测时的含药量.



【答案】(1) $y = -\frac{1}{5}x + 12$; (2) $\frac{16}{3} \text{ mg/m}^3$

【解析】

【分析】(1) 先求得 A 的坐标，将 A 、 B 坐标分别代入解析式即可得到答案；

(2) 根据图像分情况讨论，即可得出答案.

【详解】解：(1) 设直线 OA 的解析式为 $y = kx$ ($k \neq 0$),

将 $(15, 6)$ 代入知: $k = \frac{2}{5}$,

故直线 OA 的解析式为 $y = \frac{2}{5}x$,

将 $x = 20$ 代入 $y = \frac{2}{5}x$, 得: $y = 8$,

$\therefore A(20, 8)$,

设直线 AB 即 20 分钟到 60 分钟时间段之间的含药量的解析式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$),

将 $A(20, 8)$, $B(60, 0)$ 代入得:
$$\begin{cases} 20k + b = 8 \\ 60k + b = 0 \end{cases}$$

解得,
$$\begin{cases} k = -\frac{1}{5} \\ b = 12 \end{cases}$$

故直线 AB 的解析式为: $y = -\frac{1}{5}x + 12$;

(2) 设第一次检测在 x 分, 则第二次检测在 $(x + 30)$ 分,

①若第一次检测时, $x < 20$ 分, 由于含药量降低, 则第二次 $x > 20$ 分,

由题意知:

$$\frac{2}{5}x - \left[-\frac{1}{5}(x + 30) + 12\right] = 2,$$

解得: $x = \frac{40}{3}$,

故含药量 $y = \frac{2}{5}x = \frac{16}{3}$,

②若两次检测时, $x > 20$ 分,

$$\text{则 } -\frac{1}{5}x + 12 - \left[-\frac{1}{5}(x + 30) + 12\right] = 2,$$

该方程无解,

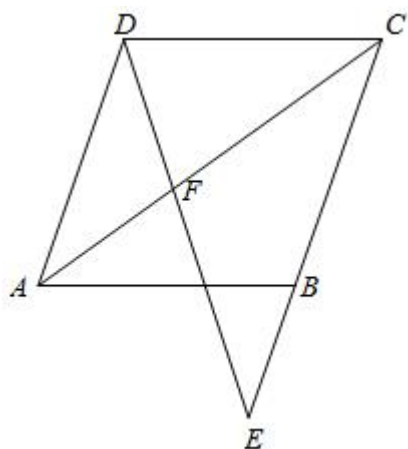
故含药量为 $\frac{16}{3} \text{ mg/m}^3$.

【点睛】 本题主要考查一次函数的应用, 正确理解题意并观察图像是解题的关键.

23. 如图, 已知, 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 为射线 CB 上一点, 联结 DE 交对角线 AC 于点 F , $\angle ADE = \angle BAC$.

(1) 求证: $CF \cdot CA = CB \cdot CE$;

(2) 如果 $AC = DE$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形.



【答案】 (1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 利用平行四边形性质, 得到 $\angle ADE = \angle E$. 结合已知找到 $\angle BAC = \angle E$. 即可证明 $\triangle ACB \sim \triangle ECF$. 从而得到结论.

(2) 先证明 $\triangle ADF \sim \triangle CEF$. 利用对应边成比例, 结合已知 $AC = DE$ 和 (1) 的结论, 即可证明 $AB = BC$, 从而得到结论.

【详解】 证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$$\therefore AD \parallel BC.$$

$$\therefore \angle ADE = \angle E.$$

$$\because \angle ADE = \angle BAC.$$

$$\therefore \angle BAC = \angle E.$$

$$\because \angle ACB = \angle ECF.$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle ECF.$$

$$\therefore \frac{AC}{EC} = \frac{BC}{CF}.$$

$$\therefore CF \cdot CA = CB \cdot CE$$

(2) 由 (1) 知 $\angle ADE = \angle E$.

$$\therefore \angle ADF = \angle CFE.$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle CEF.$$

$$\therefore \frac{DF}{EF} = \frac{AF}{CF}.$$

$$\therefore \frac{EF}{DE} = \frac{CF}{AC}.$$

$$\therefore AC = DE.$$

$$\therefore EF = CF.$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle ECF.$$

$$\therefore AB = BC$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

【点睛】 本题考查相似三角形的判定和性质，平行四边形性质和菱形的判定等知识，关键在于熟悉各个知识点在本题中运用.

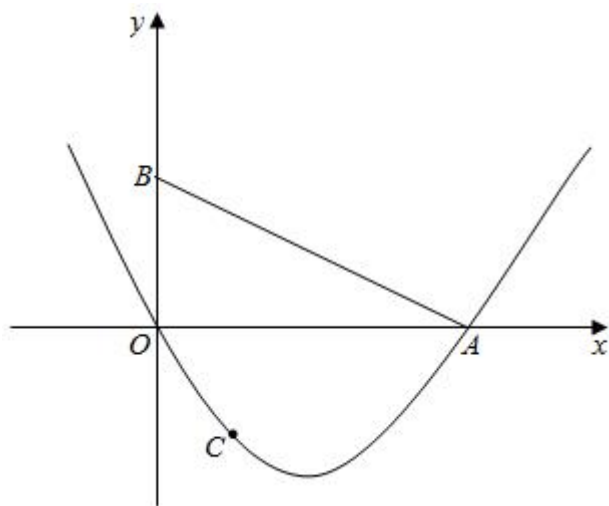
24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $B(0, 2)$ ， $C(1, -\frac{3}{2})$ ，点 A 在 x 轴正半轴上，且 $OA = 2OB$ ，

抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 经过点 A 、 C .

(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 将抛物线先向右平移 m 个单位，再向上平移 1 个单位，此时点 C 恰好落在直线 AB 上的点 C' 处，求 m 的值;

(3) 设点 B 关于原抛物线对称轴的对称点为 B' ，联结 AC ，如果点 F 在直线 AB' 上， $\angle ACF = \angle BAO$ ，求点 F 的坐标.



【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$; (2) 4; (3) F 坐标为 $(4, \frac{5}{2})$ 或 $(4, -1.5)$.

【解析】

【分析】(1) 求出 A 坐标, 将 A 、 C 坐标代入 $y = ax^2 + bx$ 即可得答案;

(2) 求出 AB 解析式, 用 m 表示 C' 坐标代入即可得答案;

(3) 分 F 在 A 上方和下方两种情况画出图形, 构造相似三角形利用对应边成比例可得答案.

【详解】解: (1) $\because B(0, 2)$,

$$\therefore OB = 2,$$

$\because$ 点 A 在 x 轴正半轴上, 且 $OA = 2OB$,

$$\therefore A(4, 0),$$

$\therefore$ 将 $A(4, 0)$, $C(1, -\frac{3}{2})$ 代入 $y = ax^2 + bx$ 得:

$$\begin{cases} 0 = 16a + 4b \\ -\frac{3}{2} = a + b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$;

(2) 设直线 AB 的解析式是 $y = mx + n$,

将 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ 代入得:

$$\begin{cases} 0 = 4m + n \\ 2 = n \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式是 $y = -\frac{1}{2}x + 2$,

$\because$ 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ 向右平移 m 个单位, 再向上平移 1 个单位, 则其上的点 C 也向右平移 m 个单位, 再

向上平移 1 个单位, 而 $C(1, -\frac{3}{2})$,

$$\therefore C'(1+m, -\frac{1}{2}),$$

$\because C'(1+m, -\frac{1}{2})$ 在直线 AB 上,

$$\therefore -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1+m) + 2,$$

$$\therefore m = 4;$$

(3) $\because y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ 对称轴为 $x = 2$, $B(0, 2)$, 点 B 关于原抛物线对称轴的对称点为 B' ,

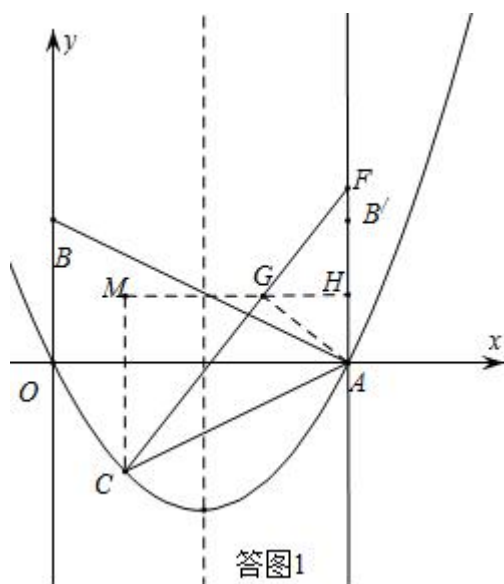
$$\therefore B'(4, 2),$$

$$\therefore A(4, 0),$$

$\therefore$ 直线 AB' 为 $x = 4$,

点 F 在直线 AB' 上, $\angle ACF = \angle BAO$, 分两种情况:

① F 在 A 上方, 如图:



过 A 作 $AG \perp CF$ 于 G , 过 G 作 $GH \parallel x$ 轴交直线 $x = 4$ 于 H , 过 C 作 $CM \perp x$ 轴交直线 GH 于 M ,

$$\because B(0, 2), A(4, 0),$$

$$\therefore \tan \angle BAO = \frac{1}{2},$$

$$\because \angle ACF = \angle BAO, AG \perp CF,$$

$$\therefore \tan \angle ACF = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{AG}{CG} = \frac{1}{2},$$

$$\text{而 } \angle MCG = 90^\circ - \angle MGC = \angle AGH, \angle M = \angle AHG,$$

$$\therefore \triangle MCG \sim \triangle HGA,$$

$$\therefore \frac{AH}{MG} = \frac{GH}{MC} = \frac{AG}{CG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore MC = GH, \quad MG = 2AH,$$

设 $G(m, n)$, 则 $MC = n + 1.5$, $MG = m - 1$, $GH = 4 - m$. $AH = n$,

$$\therefore n + 1.5 = 2(4 - m), \quad \text{且 } m - 1 = 2n,$$

解得 $m = 2.8$, $n = 0.9$,

$$\therefore G(2.8, 0.9),$$

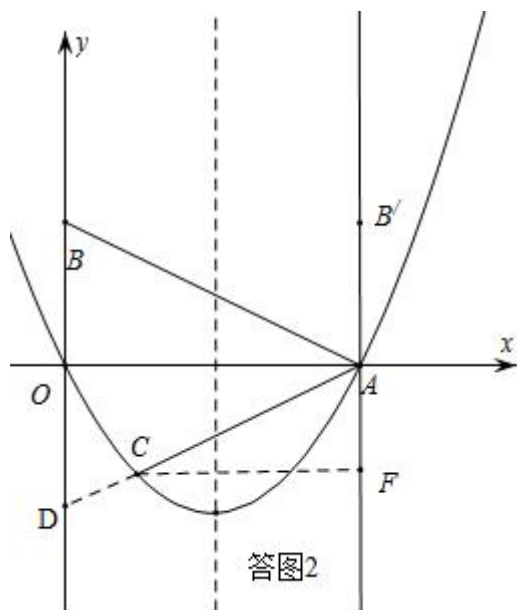
又 $C(1, -1.5)$,

$$\therefore \text{直线 } GC \text{ 解析式为: } y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{6},$$

$$\text{令 } x = 4 \text{ 得 } y = \frac{5}{2}$$

$$\therefore F(4, \frac{5}{2}),$$

② F 在 A 下方,



延长 AC 交 y 轴于 D , 过 C 作 $CF \parallel x$ 轴交直线 $x = 4$ 于 F ,

$$\therefore A(4, 0), \quad C(1, -1.5),$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 解析式为 } y = \frac{1}{2}x - 2,$$

$$\therefore D(0, -2),$$

$$\therefore B(0, 2),$$

$\therefore B, D$ 关于 x 轴对称,

$$\therefore \angle BAO = \angle DAO,$$

若 $\angle ACF = \angle BAO$,

则 $\angle ACF = \angle DAO$,

$\therefore CF \parallel x$ 轴,

$\therefore F(4, -1.5)$

综上所述, $\angle ACF = \angle DAO$, F 坐标为或 $(4, \frac{5}{2})$ 或 $(4, -1.5)$.

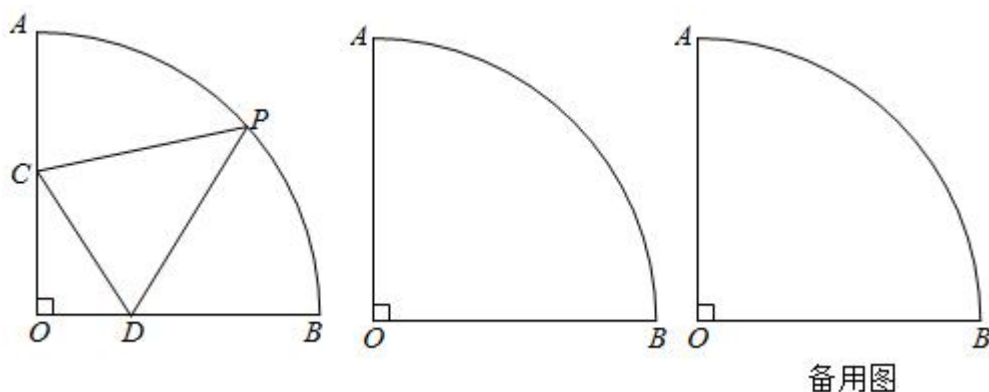
【点睛】 本题考查二次函数的综合题, 涉及待定系数法求二次函数的解析式、二次函数的平移、相似三角形的判定与性质, 锐角三角函数的应用, 等知识, 是重要考点, 难度较易, 掌握相关知识是解题关键.

25. 如图, 已知扇形 AOB 的半径 $OA = 4$, $\angle AOB = 90^\circ$, 点 C 、 D 分别在半径 OA 、 OB 上 (点 C 不与点 A 重合), 联结 CD . 点 P 是弧 AB 上一点, $PC = PD$.

(1) 当 $\cot \angle ODC = \frac{3}{4}$, 以 CD 为半径的圆 D 与圆 O 相切时, 求 CD 的长;

(2) 当点 D 与点 B 重合, 点 P 为弧 AB 的中点时, 求 $\angle OCD$ 的度数;

(3) 如果 $OC = 2$, 且四边形 $ODPC$ 是梯形, 求 $\frac{S_{\triangle PCD}}{S_{\triangle OCD}}$ 的值.



【答案】 (1) $\frac{5}{2}$; (2) 67.5° ; (3) $\sqrt{6} - 1$ 或 $3 + \sqrt{6}$

【解析】

【分析】 (1) 由题意 $\angle COD = 90^\circ$, $\cot \angle ODC = \frac{OD}{OC} = \frac{3}{4}$, 可以假设 $OD = 3k$, $OC = 4k$, 则 $CD = 5k$, 证明 $AC = OC = 4k = 2$, 推出 $k = \frac{1}{2}$, 可得结论.

(2) 如图 2 中, 连接 OP , 过点 P 作 $PE \perp OA$ 于 E , $PF \perp OB$ 于 F . 利用全等三角形的性质证明 $\triangle PCB$ 是等腰直角三角形, 可得结论.

(3) 分两种情形: 如图 3-1 中, 当 $OC \parallel PD$ 时, 如图 3-2 中, 当 $PC \parallel OD$ 时, 分别求解即可.

【详解】 解: (1) 如图 1 中,

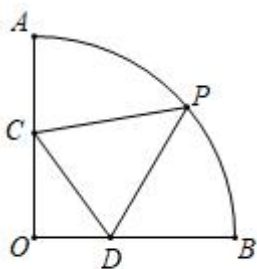


图1

$$\because \angle COD = 90^\circ, \cot \angle ODC = \frac{OD}{OC} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{设 } OD = 3k, OC = 4k, \text{ 则 } CD = 5k,$$

$$\therefore \text{以 } CD \text{ 为半径的圆 } D \text{ 与圆 } O \text{ 相切,}$$

$$\therefore CD = DB = 5k,$$

$$\therefore OB = OA = 8k,$$

$$\therefore AC = OC = 4k = 2,$$

$$\therefore k = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CD = \frac{5}{2}.$$

(2) 如图 2 中, 连接 OP , 过点 P 作 $PE \perp OA$ 于 E , $PF \perp OB$ 于 F .

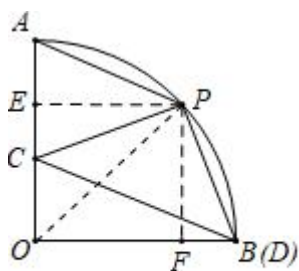


图2

$$\because \widehat{PA} = \widehat{PB},$$

$$\therefore \angle AOP = \angle POB,$$

$$\because PE \perp OA, PF \perp OB,$$

$$\therefore PE = PF,$$

$$\because \angle PEC = \angle PFB = 90^\circ, PD = PC,$$

$$\therefore Rt\triangle PEC \cong Rt\triangle PFB \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle EPC = \angle FPB,$$

$$\because \angle PEO = \angle EOF = \angle OFP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPF = \angle CPB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PCB = \angle PBC = 45^\circ,$$

$$\because OP = OB, \quad \angle POB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OBP = \angle OPB = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle CBO = 67.5^\circ - 45^\circ = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle OCD = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ.$$

(3) 如图 3-1 中, 当 $OC \parallel PD$ 时,

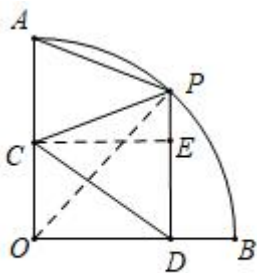


图3-1

$$\because OC \parallel PD,$$

$$\therefore \angle PDO = \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\because CE \perp PD,$$

$$\therefore \angle CED = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是矩形,

$$\therefore OC = DE = 2, \quad CE = OD,$$

设 $PC = PD = x$, $EC = OD = y$,

$$\text{则} \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 = y^2 + (x-2)^2 \end{cases},$$

解得 $x_1 = 2\sqrt{6} - 2$, $x_2 = -2\sqrt{6} - 2$ (不合题意, 舍去),

$$\therefore PD = 2\sqrt{6} - 2,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PCD}}{S_{\triangle OCD}} = \frac{PD}{OC} = \sqrt{6} - 1,$$

如图 3-2 中, 当 $PC \parallel OD$ 时,

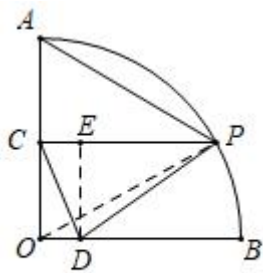


图3-2

$$\because PC \parallel OD,$$

$$\therefore \angle COD = \angle OCE = \angle CED = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是矩形,

$$\therefore OC = DE = 2, \quad CE = OD,$$

$$\because OP = 4, \quad OC = 2,$$

$$\therefore PC = \sqrt{OP^2 - OC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore PD = PC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore PE = \sqrt{PD^2 - DE^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore EC = OD = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PCD}}{S_{\triangle OCD}} = \frac{PC}{OD} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{6},$$

综上所述, $\frac{S_{\triangle PCD}}{S_{\triangle OCD}}$ 的值为 $\sqrt{6} - 1$ 或 $3 + \sqrt{6}$.

【点睛】 本题属于圆综合题, 考查了两圆的位置关系, 解直角三角形, 等腰三角形的性质, 梯形的性质等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造特殊四边形解决问题, 属于中考压轴题.