

2021 年上海市嘉定区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.

1. 下列四个选项中的数，不是分数的是（ ）

A. 80%

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $2\frac{1}{3}$

D. $\frac{22}{7}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据有理数包括分数和整数，无理数一定不是分数判断即可.

【详解】解：∵ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 是无理数，无理数一定不是分数，

∴ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 不是分数，

故选：B.

【点睛】本题考查实数的分类，解题的关键是掌握无理数一定不是分数.

2. 已知： $a \neq 0$ ，下列四个算式中，正确的是（ ）

A. $a^2 + a^3 = a^5$

B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

C. $(a^2)^3 = a^8$

D. $a^2 \div a^3 = a^{-1}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据整式合并同类项，同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方的运算法则进行计算，即可选出本题的正确选项.

【详解】A. $a^2 + a^3$ 不是同类项，不能合并，故原 A 选项 错误；

B. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故原 B 选项错误；

C. $(a^2)^3 = a^6$ ，故原 C 选项错误；

D. $a^2 \div a^3 = a^{-1}$ ，故 D 选项正确；

故选 D.

【点睛】本题主要考查整式的基本运算的知识，熟练掌握整式合并同类项，同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方的运算法则是正确作答本题的关键.

3. 下列四个函数解析式中，其函数图像经过原点的是（ ）

A. $y = \frac{1}{2}x + 1$

B. $y = -\frac{2}{x}$

C. $y = x^2 + 2x$

D. $y = (x - 1)^2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数与图像的知识，令 $x = 0$ ，函数值也等于 0，则图像过原点，据此对四个选项依次进行判断即可.

【详解】A、令 $x = 0$ ，则 $y = 1$ ，故不符合题意；

B、 $x = 0$ 无意义，故不符合题意；

C、 $x = 0$ ，则 $y = 0$ ，故符合题意；

D、令 $x = 0$ ，则 $y = 1$ ，故不符合题意.

故选 C.

【点睛】本题考查函数图象上的点的知识，掌握函数图象上的点的坐标适合函数解析式是解题的关键.

4. 下列各统计量中，表示一组数据波动程度的量是（ ）.

A. 平均数

B. 众数

C. 方差

D. 频率

【答案】C

【解析】

【详解】试题分析：平均数表示一组数据的平均程度，众数表示一组数据中出现次数最多的数，反映数据的聚散程度，而方差和标准差反映是一组数据的波动程度.

考点：基本统计量的意义.

5. 下列四个命题中，真命题是（ ）

A. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

B. 对角线互相垂直的四边形是菱形

C. 以一条对角线为对称轴的四边形是菱形

D. 对称轴互相垂直的四边形是矩形

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行四边形、菱形、矩形的判定定理即可判断.

【详解】解：对角线互相平分的四边形是平行四边形是平行四边形判定定理，是真命题，故 A 符合题意；
对角线互相垂直的四边形是菱形是假命题，故 B 不符合题意；
以一条对角线为对称轴的四边形可能是“筝”形，以一条对角线为对称轴的四边形是菱形是假命题，故 C 不符合题意；
对称轴互相垂直的四边形是矩形是假命题，故 D 不符合题意，
故选：A.

【点睛】本题考查平行四边形、菱形、矩形的判定，掌握平行四边形、菱形、矩形的判定定理是解题的关键.

6. 如果两圆的圆心距为 3，其中一个圆的半径长为 3，那么这两个圆的位置关系不可能是（ ）

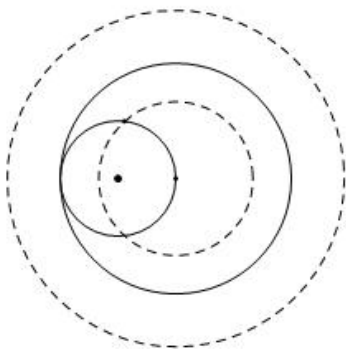
- A. 两圆内切 B. 两圆内含 C. 两圆外离 D. 两圆相交

【答案】C

【解析】

【分析】根据圆心距是 3，画出图，即可得出本题答案.

【详解】如图所示：



两个圆的位置关系可以是两圆内切，两圆内含，和两圆相交，故只有 C 项不符合题意；
故选 C.

【点睛】本题主要考查圆和圆的位置关系，依据题意作出符合题意的图即可.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. $|1-\sqrt{2}|$ = _____ .

【答案】 $\sqrt{2}-1$

【解析】

【分析】 根据绝对值的意义化简即可.

【详解】 解: $\because 1 - \sqrt{2} < 0$,

$$\therefore |1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1,$$

故答案为: $\sqrt{2} - 1$.

【点睛】 本题考查了无理数的估算, 解题关键是判断绝对值符合内的数是正是负, 再进行化简.

8. 计算: $(x+1)(x-2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x^2 - x - 2$

【解析】

【分析】

【详解】 解: $(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$.

故答案为: $x^2 - x - 2$

9. 如果点 $P(3, b)$ 在函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象上, 那么 b 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 将 $P(3, b)$ 代入 $y = \frac{1}{x+1}$, 解方程即得答案.

【详解】 解: 将 $P(3, b)$ 代入 $y = \frac{1}{x+1}$ 可得: $b = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$,

故答案为: $\frac{1}{4}$

【点睛】 本题考查函数图象上的点, 掌握函数图象上的点坐标适合函数解析式是解题的关键.

10. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 的值为_____.

【答案】 9

【解析】

【分析】 一元二次方程有两个相等的实根, 即根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 即可求 m 值.

【详解】 解: $\because$ 方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4m = 0,$$

解得 $m = 9$,

故答案为：9.

【点睛】此题主要考查的是一元二次方程的根判别式，根据根的个数得到和参数有关的式子是解题的关键.

11. 无理方程 $\sqrt{2x+3} = -x$ 的实数解是_____.

【答案】 -1.

【解析】

【分析】化为有理方程，再解出有理方程，最后检验即可得答案.

【详解】解：将 $\sqrt{2x+3} = -x$ 两边平方得： $2x+3=x^2$,

整理得 $x^2-2x-3=0$,

解得 $x_1=3$, $x_2=-1$,

当 $x_1=3$, 左边= $\sqrt{2 \times 3 + 3}=3$, 右边=-3,

$\therefore$ 左边 $\neq$ 右边,

$\therefore x_1=3$ 不是原方程的解, 舍去,

当 $x_2=-1$ 时, 左边= $\sqrt{-1 \times 2 + 3}=1$, 右边=1,

$\therefore$ 左边=右边,

$\therefore x_2=-1$ 是原方程的解,

$\therefore x=-1$,

故答案为：-1.

【点睛】本题考查解无理方程，利用两边平方将无理方程化为有理方程是解题的关键.

12. 从一副去掉大小王的扑克牌中随机抽取一张，抽到数字为“6”的扑克牌的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{13}$

【解析】

【分析】

将数字为6的扑克牌的张数除以没有大小王的扑克牌总张数即为所求的概率.

【详解】解： $\because$ 没有大小王的扑克牌共52张，其中数字为6的扑克牌4张，

$\therefore$ 随机抽取一张数字为6的扑克，其概率是 $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$,

故答案为 $\frac{1}{13}$.

【点睛】本题考查的是随机事件概率的求法，如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其

中事件 A 包含 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$, 因此解题的关键是牢记公式.

13. 如果点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图象上, 且 $0 < x_1 < x_2$, 那么 y_1 与 y_2 的大小关系为: y_1 _____ y_2 . (填 “ $<$ ” 或 “ $=$ ” 或 “ $>$ ”)

【答案】 $<$

【解析】

【分析】反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$), 根据在同一个象限内, y 随 x 的增大而增大即可得答案.

【详解】解: $\because$ 点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图象上, 且 $0 < x_1 < x_2$, 且在同一个象限内, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore y_1 < y_2$,

故答案为: $<$.

【点睛】本题考查反比例函数的增减性, 掌握 $k < 0$ 时, 在同一个象限内, y 随 x 的增大而增大是解题的关键.

14. 为了估计某个鱼塘里的鱼的数量, 养殖工人网住了 50 条鱼, 在每条鱼的尾巴上做个记号后, 又将鱼放回鱼塘. 等鱼游散后再随机撒网, 网住 60 条鱼, 发现其中有 2 条鱼的尾巴上有记号. 设该鱼塘里有 x 条鱼, 依据题意, 可以列出方程: _____.

【答案】 $\frac{50}{x} = \frac{2}{60}$

【解析】

【分析】

分别求出鱼塘中尾巴上有记号的鱼占的比例和随机网住的 60 条鱼中有记号的鱼占的比例, 即可建立方程.

【详解】解: 由题可知, 鱼塘中尾巴上有记号的鱼占的比例为 $\frac{50}{x}$, 随机网住的 60 条鱼中, 有记号的鱼占的比例为 $\frac{2}{60}$,

$\therefore \frac{50}{x} = \frac{2}{60}$,

故答案为: $\frac{50}{x} = \frac{2}{60}$.

【点睛】本题考察了用样本估计总体的知识点的相关应用, 要求学生在理解题意的基础上牢记相关概念, 对学生的概念理解与应用等方面都进行了一定的考查.

15. 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 设向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 向量 $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AC} =$ _____ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的

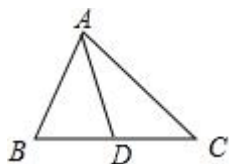
线性组合表示).

【答案】 $2\vec{b}-\vec{a}$

【解析】

【分析】 利用三角形法则求出 $\overrightarrow{BC}$ ，可得结论.

【详解】 解：如图，



$$\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{b},$$

$\because AD$ 是中线，

$$\therefore BC = 2BD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\vec{b} - 2\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{a} = 2\vec{b} - \vec{a},$$

故答案为： $2\vec{b}-\vec{a}$

【点睛】 本题考查平面向量，三角形法则等知识，解题的关键是熟练掌握三角形法则.

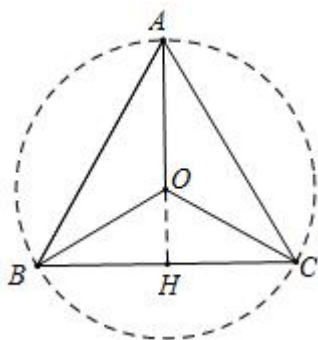
16. 如果一个正三角形的半径长为 2，那么这个三角形的边长为_____.

【答案】 $2\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】 画出图形，构造直角三角形可以求解.

【详解】 解：如图：



正三角形 ABC ，半径 $OA = OB = OC = 2$ ，延长 AO 交 BC 于 H ，

$\therefore \angle BOC = 360^\circ \div 3 = 120^\circ$, O 为正三角形中心,

$\angle BHO = 90^\circ$, $\angle BOH = 60^\circ$, $BC = 2BH$,

$BH = OB \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$,

$\therefore BC = 2\sqrt{3}$.

故答案为: $2\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查正三角形半径与边长的关系, 解题的关键是画出图形, 构造直角三角形.

17. 已知直角三角形的直角边长为 a 、 b , 斜边长为 c , 将满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 的一组正整数称为“勾股数组”, 记为 (a, b, c) , 其中 $a \leq b < c$. 事实上, 早在公元前十一世纪, 中国古代数学家商高就发现了“勾三、股四、弦五”, 我们将其简记为 $(3, 4, 5)$. 类似的勾股数组还有很多... 例如: $(5, 12, 13)$, $(7, 24, 25)$, $(9, 40, 41)$, $(11, 60, 61)$, $(13, 84, 85)$, ... 如果 $a = 2n+1$ (n 为正整数), 那么 $b+c =$ _____. (用含 n 的代数式表示)

【答案】 $4n^2 + 4n + 1$.

【解析】

【分析】 “勾股数组” (a, b, c) , 当 a 为奇数时, $c=b+1$, 列方程即可得到答案.

【详解】 解: 观察“勾股数组” (a, b, c) , 当 a 为奇数时, $c=b+1$,

又 $a=2n+1$ (n 为正整数),

由勾股定理可得: $c^2 - b^2 = (2n+1)^2$, 即 $(b+1)^2 - b^2 = (2n+1)^2$,

解得 $b=2n^2+2n$,

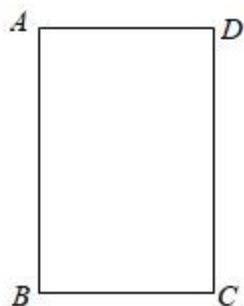
$\therefore c=2n^2+2n+1$,

$\therefore b+c=4n^2+4n+1$,

故答案为: $4n^2+4n+1$.

【点睛】 本题考查“勾股数组”, 观察“勾股数组”特点得到 $c=b+1$ 是解题的关键.

18. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $BC=4$ (如图), 点 E 是边 AB 的中点, 联结 DE . 将 $\triangle DAE$ 沿直线 DE 翻折, 点 A 的对应点为 A' , 那么点 A' 到直线 BC 的距离为_____.

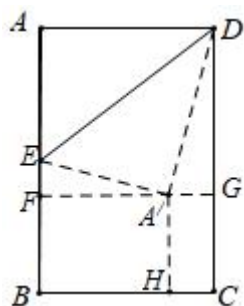


【答案】 $\frac{54}{25}$

【解析】

【分析】过 A' 作 $FG \parallel BC$ 交 AB 于 F ，交 CD 于 G ，过 A' 作 $A'H \perp BC$ 于 H ，先证明 $\triangle EFA \sim \triangle A'GD$ 得它们对应边的比为 $\frac{3}{4}$ ，再设 $EF = 3m$ ， $FA' = 3n$ ，则 $A'G = 4m$ ， $DG = 4n$ ，根据 $FA' + A'G = BC = 4$ ， $AE + EF = DG$ ，列方程即可得到答案.

【详解】解：过 A' 作 $FG \parallel BC$ 交 AB 于 F ，交 CD 于 G ，过 A' 作 $A'H \perp BC$ 于 H ，如图：



在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 4$ ， E 是边 AB 的中点

$$\therefore \angle A = 90^\circ, \quad AD = BC = 4, \quad CD = AB = 6, \quad AE = 3,$$

$\therefore \triangle DAE$ 沿直线 DE 翻折，点 A 的对应点为 A' ，

$$\therefore \angle DA'E = \angle A = 90^\circ, \quad A'D = AD = 4, \quad A'E = AE = 3,$$

又 $FG \parallel BC$,

$$\therefore \angle A'DG = 90^\circ - \angle DA'G = \angle EA'F,$$

而 $\angle EFA' = \angle A'GD = 90^\circ$,

$$\therefore \triangle EFA' \sim \triangle A'GD,$$

$$\therefore \frac{EF}{A'G} = \frac{FA'}{DG} = \frac{EA'}{A'D} = \frac{3}{4}.$$

设 $EF = 3m$ ， $FA' = 3n$ ，则 $A'G = 4m$ ， $DG = 4n$ ，

$$\therefore FA' + A'G = BC = 4, \quad AE + EF = DG,$$

$$\therefore \begin{cases} 3n + 4m = 4 \\ 3 + 3m = 4n \end{cases}, \quad \text{解得 } n = \frac{24}{25},$$

$$\therefore DG = 4n = \frac{96}{25},$$

$$\therefore CG = CD - DG = \frac{54}{25},$$

$$\therefore A'H = \frac{54}{25};$$

故答案为 $\frac{54}{25}$.

【点睛】 本题考查矩形中的翻折问题，构造相似三角形列方程是解题的关键.

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 先化简，再求值： $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ，其中， $x = \sqrt{2}$.

【答案】 $-\frac{x-1}{x+1}$ ， $-3+2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据分式的加减法可以化简题目中的式子，然后将 x 的值代入化简后的式子即可解答本题.

【详解】 解： 原式 $= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$

$$= \frac{x-1+x+1-x^2-1}{(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{-(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}$$
$$= -\frac{x-1}{x+1}$$

当 $x = \sqrt{2}$ 时， 原式 $= -\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = -(\sqrt{2}-1)^2 = -2+2\sqrt{2}-1 = -3+2\sqrt{2}$

【点睛】 本题考查分式的化简求值，解答本题的关键是明确分式化简求值的方法.

20. 解方程组： $\begin{cases} x^2 - 5xy - 6y^2 = 0 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 = 1 \end{cases}$.

【答案】 $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

【解析】

【分析】 将每个方程因式分解，降次化为两个一次方程，解出重新组合的方程组即可得到答案.

【详解】 解： $x^2-5xy-6y^2=0$ 可化为 $(x-6y)(x+y)=0$,

$\therefore x-6y=0$ 或 $x+y=0$,

$x^2-4xy+4y^2=1$ 可化为 $(x-2y+1)(x-2y-1)=0$,

$\therefore x-2y+1=0$ 或 $x-2y-1=0$,

原方程组相当于以下四个方程组：

$$\begin{cases} x-6y=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \textcircled{1}, \begin{cases} x-6y=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \textcircled{2}, \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \textcircled{3}, \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \textcircled{4}$$

解得①②③④分别得：

$$\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}, \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases},$$

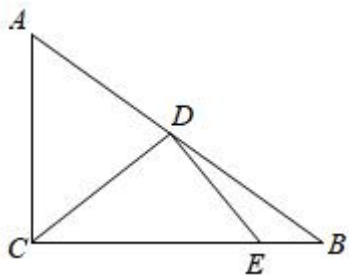
∴ 原方程组的解是：

$$\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

【点睛】 本题考查解二元二次方程组，将每个二次方程因式分解，降次化为两个一次方程是解题的关键.

21. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=6$ ， $\cos A=\frac{3}{5}$. D 是 AB 边的中点，过点 D 作直线 CD 的垂线，与边 BC 相交于点 E .

- (1) 求线段 CE 的长；
- (2) 求 $\sin \angle BDE$ 的值.



【答案】 (1) $CE=\frac{25}{4}$ (2) $\sin \angle BDE=\frac{7}{25}$

【解析】

【分析】 (1)由勾股定理求出 BC ，再根据斜边上的中线求出 AD ， $\angle DCB=\angle B$ ，由余弦定理求出 CE ；

(2)作 $EF \perp AB$ 交 AB 于 F ，在直角三角形中由勾股定理列出关于 BF 的关系式，从而求出 $\angle BDE$ 的正弦值。

【详解】 解：(1) $\because \angle ACB=90^\circ$ ， $AC=6$ ，

$$\cos A=\frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$$

$$\therefore AB=10$$

$$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$$

又 $\because D$ 为 AB 中点，

$$\therefore AD=BD=CD=\frac{1}{2} AB=5,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle B,$$

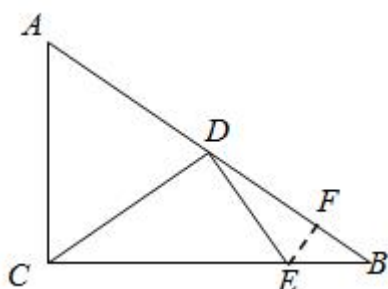
$$\therefore \cos \angle DCB = \frac{CD}{CE}$$

$$\therefore \cos \angle B = \frac{BC}{AB}$$

$$\therefore \frac{5}{CE} = \frac{8}{10}$$

$$\therefore CE = \frac{25}{4}$$

(2) 作 $EF \perp AB$ 交 AB 于 F ,



由 (1) 知 $CE = \frac{25}{4}$

则 $BE = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4}$

$$DE = \sqrt{CE^2 - CD^2} = \frac{15}{4}$$

设 $BF = x$, 则

$$DF = BD - BF = 5 - x,$$

在 $Rt \triangle DEF$ 中,

$$EF^2 = DE^2 - DF^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 - (5-x)^2$$

在 $Rt \triangle BEF$ 中,

$$EF^2 = BE^2 - BF^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - x^2$$

$$\therefore \frac{225}{16} - (5-x)^2 = \frac{49}{16} - x^2$$

解得 $x = \frac{7}{5}$

$$\therefore \sin \angle BDE = \frac{EF}{DE} = \frac{7}{25}$$

【点睛】 本题考查锐角三角函数、勾股定理，利用同角的锐角三角函数值相等是关键．方程思想是常用的

数学思想.

22. 张先生准备租一处房屋开一家公司. 现有甲、乙两家房屋出租, 甲家房屋已装修好, 每月租金 3000 元; 乙家房屋没有装修, 每月租金 2000 元, 但要装修成甲家房屋的模样, 需要花费 40000 元.

请你自行定义变量, 建立函数, 并利用与函数有关的知识帮助张先生设计一个租房方案 (备注: 只从最省钱的角度设计租房方案, 写出具体的解题过程).

【答案】

①当租期超过 40 个月时, 租乙家合适; ②当租期等过 40 个月时, 租家、乙家都可以; ③当租期低于 40 个月, 租甲家合适.

【解析】

【分析】由租金随租期的变化而变化, 所以租期是自变量, 租金是函数值, 列出 y 与 x 的关系式, 再根据两家租金的多少分类讨论分类讨论即可.

【详解】解: 设张先生租的时间为自变量 x , 租金为函数值 y ,

$\therefore$ 租甲家房屋 y 与 x 的关系为: $y=3000x$,

租乙家房屋 y 与 x 的关系为: $y=40000+2000x$,

①当甲家费用高于乙家费用时 $3000x > 40000+2000x$,

解得: $x > 40$;

②当甲家费用等于乙家费用时 $3000x=40000+2000x$,

解得: $x=40$;

③当甲家费用低于乙家费用时 $3000x < 40000+2000x$,

解得: $x < 40$,

综上所述, ①当租期超过 40 个月时, 租乙家合适; ②当租期等过 40 个月时, 租家、乙家都可以; ③当租期低于 40 个月, 租甲家合适.

【点睛】此题是一次函数的应用, 一元一次不等式的应用, 关键是根据租金的多少进行分类讨论.

23. 已知: 四边形 $ABCD$ 是正方形, 点 E 是 BC 边的中点, 点 F 在边 AB 上, 联结 DE 、 EF .

(1) 如图 1, 如果 $\tan \angle BEF = \frac{1}{2}$, 求证: $EF \perp DE$;

(2) 如图 2, 如果 $\tan \angle BEF = \frac{3}{4}$, 求证: $\angle DEF = 3\angle CDE$.

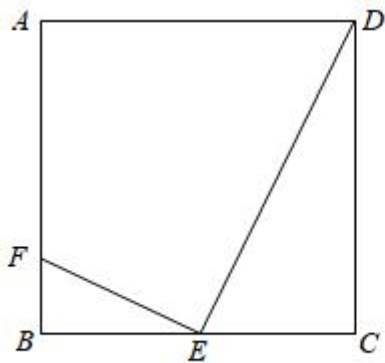


图 1

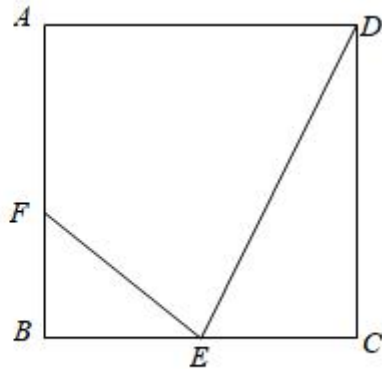


图 2

【答案】

(1) 证明见解答过程;

(2) 证明见解答过程.

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle FBE \sim \triangle ECD$ 可得 $\angle FEB = \angle EDC$, 从而可得 $\angle FED = 90^\circ$, 即可得证;

(2) 过 E 作 $EH \perp AD$ 于 H , 连接 AE , 证明 $\angle CDE = \angle DEH = \angle AEH = \angle FEA$ 即可得到 $\angle DEF = 3\angle CDE$.

【详解】解: (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ, \quad BC = CD,$$

设正方形 $ABCD$ 边长为 m , 则 $BC = CD = m$,

$\because$ 点 E 是 BC 边的中点,

$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}m,$$

$$\therefore \tan \angle BEF = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{BF}{BE} = \frac{1}{2}, \quad \text{而} \quad \frac{CE}{CD} = \frac{\frac{1}{2}m}{m} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{BF}{BE} = \frac{CE}{CD},$$

$$\therefore \triangle FBE \sim \triangle ECD,$$

$$\therefore \angle FEB = \angle EDC,$$

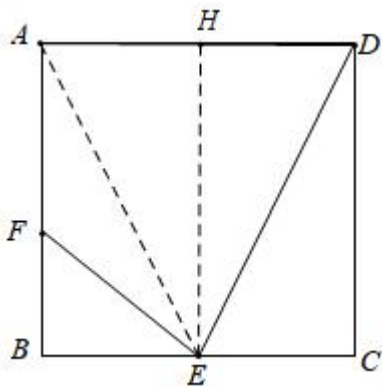
$$\because \angle EDC + \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEB + \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FED = 90^\circ,$$

$$\therefore EF \perp DE;$$

(2) 过 E 作 $EH \perp AD$ 于 H , 连接 AE , 如图:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $EH \perp AD$ 于 H ,

$\therefore AB \parallel EH \parallel CD$,

$\therefore \angle CDE = \angle DEH$,

$\because E$ 是 BC 中点,

$\therefore AH = DH$,

$\therefore EH$ 垂直平分 AD ,

$\therefore \angle AEH = \angle DEH$,

$\therefore \angle CDE = \angle DEH = \angle AEH$,

Rt $\triangle BEF$ 中, $\tan \angle BEF = \frac{3}{4}$, 即 $\frac{BE}{BF} = \frac{3}{4}$,

设 $BF = 3m$, 则 $BE = 4m$,

$\therefore BC = 2BE = 8m$, $EF = 5m$,

$\therefore AB = BC = 8m$, $AF = AB - BF = 5m$,

$\therefore EF = AF$,

$\therefore \angle FAE = \angle FEA$,

而 $\angle FAE = \angle AEH$,

$\therefore \angle FEA = \angle AEH$,

$\therefore \angle CDE = \angle DEH = \angle AEH = \angle FEA$,

$\therefore \angle DEF = 3 \angle CDE$.

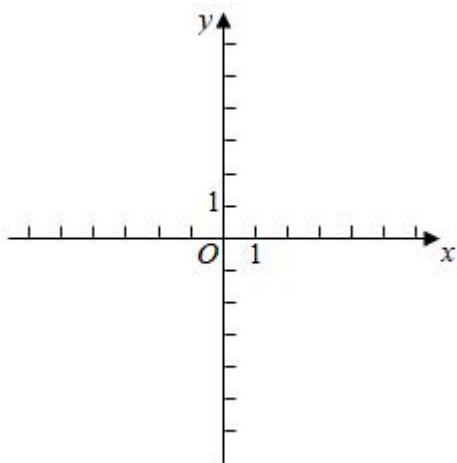
【点睛】 本题考查正方形性质、相似三角形性质与判断、三角函数等综合知识, 解题的关键是把三角函数转化为线段比.

24. 在平面直角坐标系 xOy (如图) 中, 二次函数 $f(x) = ax^2 - 2ax + a - 1$ (其中 a 是常数, 且 $a \neq 0$) 的图象是开口向上的抛物线.

(1) 求该抛物线的顶点 P 的坐标;

(2) 我们将横、纵坐标都是整数的点叫做“整点”，将抛物线 $f(x) = ax^2 - 2ax + a - 1$ 与 y 轴的交点记为 A ，如果线段 OA 上的“整点”的个数小于 4，试求 a 的取值范围；

(3) 如果 $f(-1)$ 、 $f(0)$ 、 $f(3)$ 、 $f(4)$ 这四个函数值中有且只有一个值大于 0，试写出符合题意的一个函数解析式；结合函数图象，求 a 的取值范围。



【答案】(1) $P(1, -1)$ (2) $0 < a < 5$ (3) $\frac{1}{9} < a \leq \frac{1}{4}$

【解析】

【分析】(1) 把抛物线代入顶点式为 $f(x) = ax^2 - 2ax + a - 1 = a(x - 1)^2 - 1$ ，即可求顶点坐标；

(2) 抛物线与 y 轴的交点，横坐标为 0，即 A 坐标为 $(0, a - 1)$ ，根据已知条件 $a - 1 < 4$ ，即可求 a 的取值范围为 $0 < a < 5$ ；

(3) 根据已知 $f(-1)$ 、 $f(0)$ 、 $f(3)$ 、 $f(4)$ 有且只有一个大于 0，即其余的小于或等于 0，由对称轴为 $x = 1$ 开口向上，可以得出 $f(4) > f(3) = f(-1) > f(0)$ ，根据 $f(4) > 0$ ， $f(3) \leq 0$ ，可以求出 a 的范围。即可以写出符合条件的函数解

【详解】解：(1) $\because$ 抛物线的方程为 $f(x) = ax^2 - 2ax + a - 1 = a(x - 1)^2 - 1$

$\therefore$ 抛物线的顶点 P 坐标为 $(1, -1)$ ；

(2) $\because A$ 为抛物线与 y 轴的交点，

$\therefore A$ 点坐标为 $(0, a - 1)$ ，

由线段 OA 上的整点个数小于 4，

则可知 $a - 1 < 4$ ， $a < 5$ ，

$\because$ 抛物线的开口向上，

故 a 的取值范围为 $0 < a < 5$ ；

(3) 已知 $f(-1)$ 、 $f(0)$ 、 $f(3)$ 、 $f(4)$ 有且只有一个大于 0, (即其余的小于或等于 0)

由题可知该函数对称轴为 $x=1$, 开口方向向上,

故有 $f(4) > f(3) = f(-1) > f(0)$,

$$\therefore f(4) > 0,$$

$$\therefore \text{得 } 16a - 8a + a - 1 > 0,$$

$$\therefore a > \frac{1}{9},$$

$$\therefore a > \frac{1}{9},$$

$$\therefore f(3) \leq 0;$$

$$\therefore 9a - 6a + a - 1 \leq 0,$$

$$\text{得 } a \leq \frac{1}{4},$$

$$\text{取 } a = \frac{1}{6};$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{6}$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围为 } \frac{1}{9} < a \leq \frac{1}{4}.$$

【点睛】 本题考查二次函数的应用, 解本题关键熟练掌握二次函数由一般式转为顶点式, 抛物线的性质解不等式等.

25. 已知: $\odot O$ 的半径长是 5, AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 是 $\odot O$ 的弦. 分别过点 A 、 B 向直线 CD 作垂线, 垂足分别为 E 、 F .

(1) 如图 1, 当点 A 、 B 位于直线 CD 同侧, 求证: $CF = DE$;

(2) 如图 2, 当点 A 、 B 位于直线 CD 两侧, $\angle BAE = 30^\circ$, 且 $AE = 2BF$, 求弦 CD 的长;

(3) 设弦 CD 的长为 l , 线段 AE 的长为 m , 线段 BF 的长为 n , 探究 l 与 m 、 n 之间的数量关系, 并用含 m 、 n 的代数式表示 l .

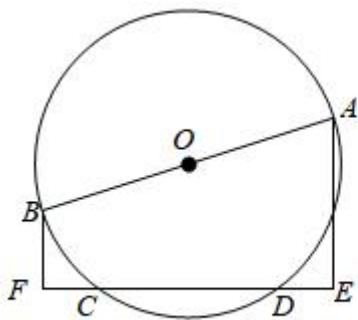


图1

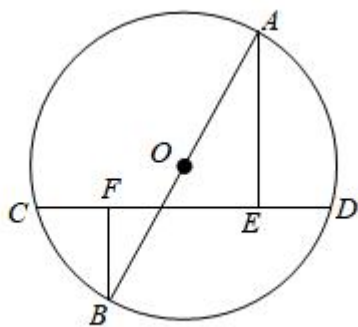
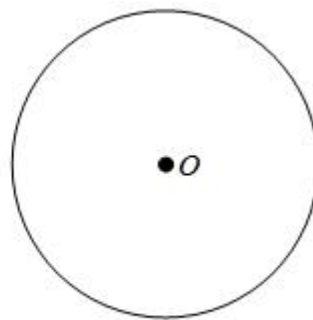


图2



备用图

【答案】(1) 证明见解析部分；

$$(2) CD = \frac{5\sqrt{33}}{3};$$

$$(3) l = \sqrt{100 - (m+n)^2} \text{ 或 } l = \sqrt{100 - (m-n)^2}.$$

【解析】

【分析】(1) 如图1中，连接 OD ，过点 O 作 $OH \perp EF$ 于 H 。证明 $HF=HE$ ， $HD=HC$ ，即可解决问题。

(2) 连接 OD ，过点 O 作 $OH \perp CD$ 于 H ，设 AB 交 CD 于 J 。利用相似三角形的性质求出 BJ ， OJ ， OH ，再利用勾股定理，可得结论。

(3) 分两种情形：如图1，当点 A 、 B 位于直线 CD 同侧时，如图2中，如图2，当点 A 、 B 位于直线 CD 两侧时，利用勾股定理分别求解即可。

【详解】(1) 证明：如图1中，连接 OD ，过点 O 作 $OH \perp EF$ 于 H 。

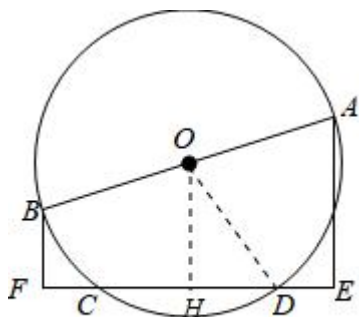


图1

$$\because BF \perp EF, AE \perp EF, OH \perp EF,$$

$$\therefore BF \parallel OH \parallel AE,$$

$$\because OA = OB,$$

$$\therefore HF = HE,$$

$$\because OH \perp CD,$$

$$\therefore CH = DH,$$

$$\therefore CF = DE;$$

(2) 连接 OD , 过点 O 作 $OH \perp CD$ 于 H , 设 AB 交 CD 于 J .

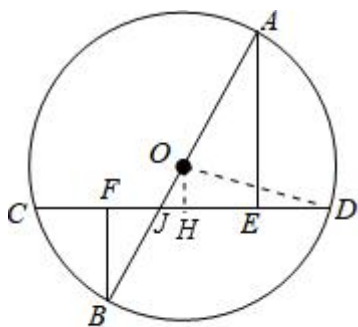


图 2

$$\because BF \perp CD, AE \perp CD,$$

$$\therefore \angle BFJ = \angle AEJ = 90^\circ,$$

$$\because \angle BJF = \angle AJE,$$

$$\therefore \triangle BFJ \sim \triangle AEJ,$$

$$\therefore \frac{BJ}{AJ} = \frac{BF}{AE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BJ = \frac{1}{3} AB = \frac{10}{3},$$

$$\therefore OJ = OB - BJ = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3},$$

$$\because OH \parallel AE,$$

$$\therefore \angle JOH = \angle BAE = 30^\circ,$$

$$\therefore OH = OJ \cdot \cos 30^\circ = \frac{5}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{6},$$

$$\because OH \perp CD,$$

$$\therefore DH = CH = \sqrt{OD^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{5\sqrt{33}}{6}$$

$$\therefore CH = 2DH = \frac{5\sqrt{33}}{3};$$

(3) 如图 1, 当点 A 、 B 位于直线 CD 同侧时,

$$\because OH = \frac{1}{2} (BF + AE) = \frac{1}{2} (m + n),$$

在 $\text{Rt} \triangle ODH$ 中, $OD^2 = OH^2 + DH^2$,

$$\therefore 5^2 = \frac{1}{4} (m + n)^2 + \frac{1}{4} l^2,$$

$$\therefore (m + n)^2 + l^2 = 100,$$

$$\therefore l = \sqrt{100 - (m + n)^2},$$

如图 2 中, 当点 A 、 B 位于直线 CD 两侧时, $OH = \frac{1}{2} |m-n|$,

在 $\text{Rt}\triangle ODH$ 中, $OD^2 = OH^2 + DH^2$,

$$\therefore 5^2 = \frac{1}{4} (m-n)^2 + \frac{1}{4} l^2,$$

$$\therefore (m-n)^2 + l^2 = 100,$$

$$\therefore l = \sqrt{100 - (m-n)^2},$$

综上所述, $l = \sqrt{100 - (m+n)^2}$ 或 $l = \sqrt{100 - (m-n)^2}$.

【点睛】 本题属于圆综合题, 考查了垂径定理, 平行线等分线段定理, 勾股定理, 梯形的中位线定理等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识并能够灵活应用.