

上海市浦东新区 2021 年中考数学一模试卷

一、单选题 (共 6 题; 共 24 分)

1. A、B 两地的实际距离 $AB=250$ 米, 如果画在地图上的距离 $A'B'=5$ 厘米, 那么地图上的距离与实际距离的比为 ()

- A. $1:500$ B. $1:5\,000$ C. $500:1$ D. $5\,000:1$

2. 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=\alpha$, $BC=2$, 那么 AB 的长等于 ()

- A. $\frac{2}{\sin\alpha}$ B. $2\sin\alpha$ C. $\frac{2}{\cos\alpha}$ D. $2\cos\alpha$

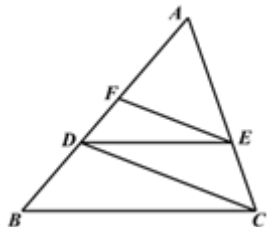
3. 下列 y 关于 x 的函数中, 一定是二次函数的是 ()

- A. $y=(k-1)x^2+3$ B. $y=\frac{1}{x^2}+1$ C. $y=(x+1)(x-2)-x^2$ D. $y=2x^2-7x$

4. 已知一个单位向量 $\vec{e}$, 设 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量, 那么下列等式中正确的是 () .

- A. $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\vec{e}$; B. $\frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}\vec{a}=\vec{a}$; C. $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\vec{e}=\vec{b}$; D. $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D、F 是边 AB 上的点, 点 E 是边 AC 上的点, 如果 $\angle ACD=\angle B$, $DE\parallel BC$, $EF\parallel CD$, 下列结论不成立的是 ()



- A. $AE^2=AF\cdot AD$ B. $AC^2=AD\cdot AB$ C. $AF^2=AE\cdot AC$ D. $AD^2=AF\cdot AB$

6. 已知点 A (1, 2)、B (2, 3)、C (2, 1), 那么抛物线 $y=ax^2+bx+1$ 可以经过的点是 ()

- A. 点 A、B、C B. 点 A、B C. 点 A、C D. 点 B、C

二、填空题 (共 12 题; 共 48 分)

7. 如果线段 a、b 满足 $\frac{a}{b}=\frac{5}{2}$, 那么 $\frac{a-b}{b}$ 的值等于_____.

8. 已知线段 MN 的长是 4cm, 点 P 是线段 MN 的黄金分割点, 则较长线段 MP 的长是_____cm.

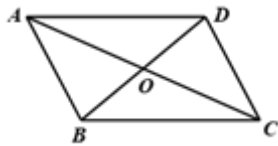
9. 计算: $2\sin 30^\circ - \tan 45^\circ =$ _____.

10. 如果从某一高处甲看低处乙的俯角为 36° , 那么从低处乙看高处甲的仰角是_____度.

11. 已知 AD、BE 是 $\triangle ABC$ 的中线, AD、BE 相交于点 F, 如果 $AD=3$, 那么 $AF=$ _____.

12. 如图, 已知平行四边形 ABCD 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O, 设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AB}$

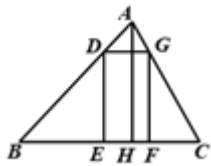
关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式为_____.



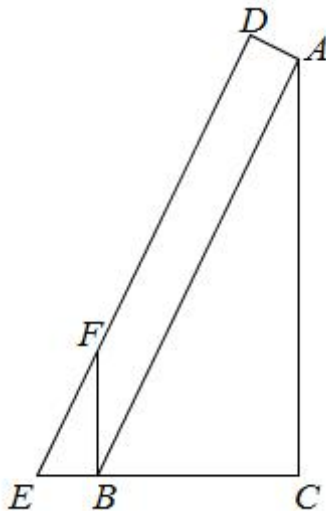
13. 如果抛物线 $y = (m + 4)x^2 + m$ 经过原点, 那么该抛物线的开口方向_____. (填“向上”或“向下”)

14. 如果 $(2, y_1)$ 、 $(3, y_2)$ 是抛物线 $y = (x + 1)^2$ 上两点, 那么 y_1 _____ y_2 . (填“>”或“<”)

15. 如图, 矩形 DEFG 的边 EF 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 顶点 D、G 分别在边 AB、AC 上, 已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 长 60 厘米, 高 AH 为 40 厘米, 如果 $DE = 2DG$, 那么 $DG =$ _____ 厘米.

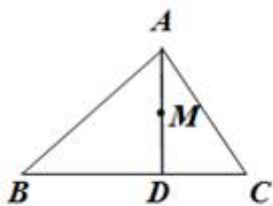


16. 秦九韶的《数书九章》中有一个“峻积验雪”的例子, 其原理为: 如图, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, $BC = 5$, $AD \perp AB$, $AD = 0.4$, 过点 D 作 $DE \parallel AB$ 交 CB 的延长线于点 E, 过点 B 作 $BF \perp CE$ 交 DE 于点 F, 那么 $BF =$ _____.



17. 如果将二次函数的图像平移, 有一个点既在平移前的函数图像上又在平移后的函数图像上, 那么称这个点为“平衡点”. 现将抛物线 $C_1: y = (x - 1)^2 - 1$ 向右平移得到新抛物线 C_2 , 如果“平衡点”为 $(3, 3)$, 那么新抛物线 C_2 的表达式为_____.

18. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 8$, 点 D 是边 BC 上一点, 且 $BD:CD = 2:1$, 联结 AD, 过 AD 中点 M 的直线将 $\triangle ABC$ 分成周长相等的两部分, 这条直线分别与边 BC、AC 相交于点 E、F, 那么线段 BE 的长为_____.

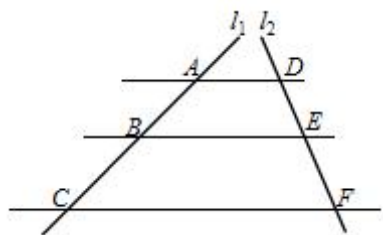


三、解答题 (共 7 题; 共 78 分)

19. 已知向量关系式 $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{x}) = \vec{b} + 3\vec{x}$ ，试用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\vec{x}$ 。

20. 已知抛物线 $y = x^2 + 2x + m - 3$ 的顶点在第二象限，求 m 的取值范围。

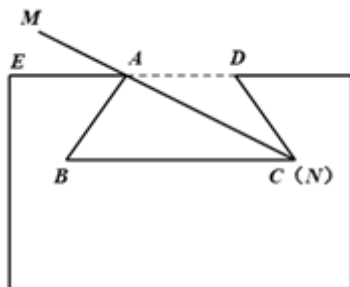
21. 如图，已知 $AD \parallel BE \parallel CF$ ，它们依次交直线 l_1 、 l_2 于点 A、B、C 和点 D、E、F，且 $AB=6$ ， $BC=8$ 。



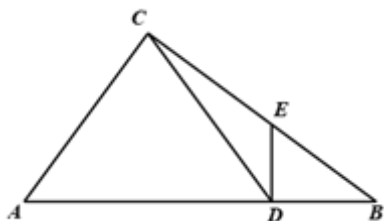
(1) 求 $\frac{DE}{DF}$ 的值；

(2) 当 $AD=5$ ， $CF=19$ 时，求 BE 的长。

22. 如图，燕尾槽的横断面是等腰梯形 $ABCD$ ，现将一根木棒 MN 放置在该燕尾槽中，木棒与横断面在同一平面内，厚度等不计，它的底端 N 与点 C 重合，且经过点 A 。已知燕尾角 $\angle B=54.5^\circ$ ，外口宽 $AD=180$ 毫米，木棒与外口的夹角 $\angle MAE=26.5^\circ$ ，求燕尾槽的里口宽 BC (精确到 1 毫米)。(参考数据: $\sin 54.5^\circ \approx 0.81$ ， $\cos 54.5^\circ \approx 0.58$ ， $\tan 54.5^\circ \approx 1.40$ ， $\sin 26.5^\circ \approx 0.45$ ， $\cos 26.5^\circ \approx 0.89$ ， $\tan 26.5^\circ \approx 0.50$)



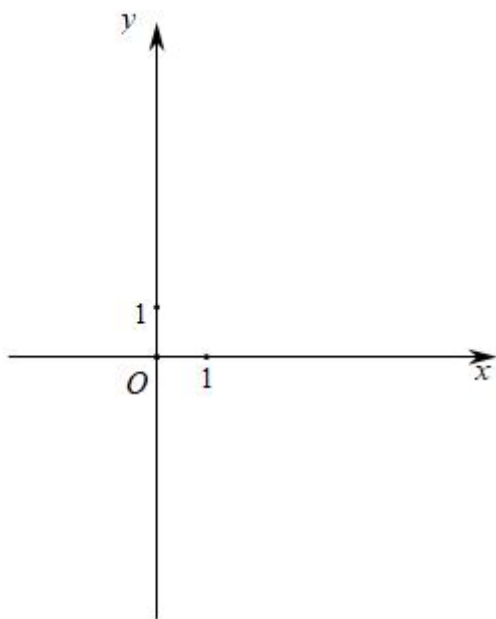
23. Rt $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，点 D、E 分别为边 AB、BC 上的点，且 $CD=CA$ ， $DE \perp AB$ 。



(1) 求证: $CA^2 = CE \cdot CB$ 。

(2) 联结 AE，取 AE 的中点 M，联结 CM 并延长与 AB 交于点 H。求证: $CH \perp AB$ 。

24. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像经过点 A (2, 4)、B (5, 0) 和 O (0, 0)。



- (1) 求二次函数的解析式；
- (2) 联结 AO ，过点 B 作 $BC \perp AO$ 于点 C ，与该二次函数图像的对称轴交于点 P ，联结 AP ，求 $\angle BAP$ 的余切值；
- (3) 在 (2) 的条件下，点 M 在经过点 A 且与 x 轴垂直的直线上，当 $\triangle AMO$ 与 $\triangle ABP$ 相似时，求点 M 的坐标。

25. 四边形 $ABCD$ 是菱形， $\angle B \leq 90^\circ$ ，点 E 为边 BC 上一点，联结 AE ，过点 E 作 $EF \perp AE$ ， EF 与边 CD 交于点 F ，且 $EC = 3CF$ 。

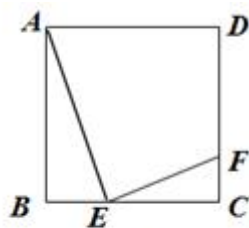


图1

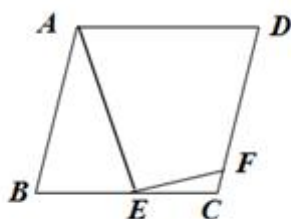


图2

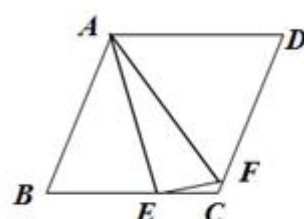


图3

- (1) 如图 1，当 $\angle B = 90^\circ$ 时，求 $S_{\triangle ABE}$ 与 $S_{\triangle ECF}$ 的比值；
- (2) 如图 2，当点 E 是边 BC 的中点时，求 $\cos B$ 的值；
- (3) 如图 3，联结 AF ，当 $\angle AFE = \angle B$ 且 $CF = 2$ 时，求菱形的边长。

答案解析部分

一、单选题

1. 【答案】 B

【考点】 图上距离与实际距离的换算（比例尺的应用）

【解析】 【解答】 解： $\because 250 \text{ 米} = 25000 \text{ cm}$ ，

$$\therefore A'B' : AB = 5 : 25000 = 1 : 5000.$$

故答案为：B.

【分析】地图上距离与实际距离的比就是在地图上的距离 $A'B'$ 与实际距离 AB 的比值.

2. 【答案】 A

【考点】锐角三角函数的定义，直角三角形的性质

【解析】 【解答】解： $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = \alpha$ ， $BC = 2$ ，

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB},$$

$$\therefore AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{2}{\sin \alpha},$$

故答案为：A.

【分析】在直角三角形 ACB 中，根据锐角三角函数的定义，求出答案即可。

3. 【答案】 D

【考点】二次函数的定义

【解析】 【解答】解： $y = (k - 1)x^2 + 3$ ，当 $k = 1$ 时， y 不是 x 的二次函数，故 A 不符合题意；

$y = \frac{1}{x^2} + 1$ ， y 不是 x 的二次函数，故 B 不符合题意；

$y = (x + 1)(x - 2) - x^2 = x^2 - 2x + x - 2 - x^2 = -x - 2$ ， y 不是 x 的二次函数，故 C 不符合题意；

$y = 2x^2 - 7x$ ，符合 y 是 x 的二次函数的定义，故 D 符合题意；

故答案为：D.

【分析】形如： $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 这样的函数，则 y 是 x 的二次函数，根据定义逐一判断即可得到答案.

4. 【答案】 B

【考点】平面向量

【解析】 【解答】解： A 、左边得出的是 a 的方向不是单位向量，故不符合题意；

B 、符合向量的长度及方向，符合题意；

C 、由于单位向量只限制长度，不确定方向，故不符合题意；

D 、左边得出的是 a 的方向，右边得出的是 b 的方向，两者方向不一定相同，故不符合题意.

故答案为：B.

【分析】长度不为 0 的向量叫做非零向量，向量包括长度及方向，而长度等于 1 个单位长度的向量叫做单位向量，注意单位向量只规定大小没规定方向，则可分析求解.

5. 【答案】 C

【考点】平行线分线段成比例

【解析】 【解答】解： $\because DE \parallel BC$ ， $EF \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle ADE = \angle B, \angle ACD = \angle AEF,$$

$$\text{又} \because \angle ACD = \angle B,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AEF,$$

$$\because \angle ADE = \angle AEF, \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{AD}{AE},$$

$\therefore AE^2 = AF \cdot AD$, A 不符合题意;

$\because \angle ACD = \angle B, \angle A = \angle A,$

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$\therefore AC^2 = AD \cdot AB$, B 不符合题意;

$\because DE \parallel BC,$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB},$$

$\because EF \parallel CD,$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AD},$$

$$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AB},$$

$\therefore AD^2 = AF \cdot AB$, D 不符合题意;

$\because EF \parallel CD,$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AD},$$

$\therefore AF \cdot AC = AE \cdot AD$, C 符合题意,

故答案为: C.

【分析】根据相似三角形的判定及性质以及平行线分线段成比例对每个选项逐个证明即可.

6. 【答案】 C

【考点】二次函数图象上点的坐标特征

【解析】 【解答】解: 把 $A(1, 2)$, $C(2, 1)$ 代入抛物线的解析式,

$$\therefore \begin{cases} a + b + 1 = 2 \\ 4a + 2b + 1 = 1 \end{cases} \quad \text{即:} \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得:} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线为: $y = -x^2 + 2x + 1,$

当 $x = 2$ 时, $y = -4 + 4 + 1 = 1 \neq 3,$

$\therefore B(2, 3)$ 不在抛物线 $y = -x^2 + 2x + 1$ 上,

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 可以经过的点是 A, C

故答案为: C.

【分析】先把 $A(1, 2)$, $C(2, 1)$ 代入抛物线的解析式, 求解抛物线的解析式为: $y = -x^2 + 2x + 1$, 再判断 B 不在抛物线上, 从而可得答案.

二、填空题

7. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【考点】比例的性质

【解析】 【解答】 解： $\because \frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ ，

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1$$

$$= \frac{5}{2} - 1$$

$$= \frac{3}{2},$$

故答案为： $\frac{3}{2}$.

【分析】 根据 $\frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1$ ，再将 $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ 代入计算即可.

8. 【答案】 $2\sqrt{5}-2$

【考点】 黄金分割

【解析】 【解答】 较长的线段 MP 的长为 xcm，则较短的线段长是(4-x)cm.

则 $x^2=4(4-x)$,

解得 $x=2\sqrt{5}-2$ 或 $-2\sqrt{5}-2$ (舍去).

故答案为： $2\sqrt{5}-2$.

【分析】 设较长的线段 MP 的长为 xcm，则较短的线段长是(4-x)cm.根据黄金分割的意义可得 $x^2=4(4-x)$,

解得 $x=2\sqrt{5}-2$ 或 $-2\sqrt{5}-2<0$ ， (舍去).

9. 【答案】 0

【考点】 特殊角的三角函数值

【解析】 【解答】 解： $2\sin 30^\circ - \tan 45^\circ = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$,

故答案为： 0

【分析】 把特殊角的三角函数值代入计算即可得到答案.

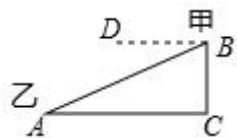
10. 【答案】 36

【考点】 解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题

【解析】 【解答】 解： 如图所示：

$\because$ 甲处看乙处为俯角 $\angle DBA=36^\circ$ ， $AC \parallel BD$ ，

$\therefore$ 乙处看甲处为： 仰角 $\angle CAB = \angle DBA = 36^\circ$.



故答案为： 36.

【分析】 根据仰角以及俯角的定义，画出图形进而求出即可.

11. 【答案】 2

【考点】 三角形的重心及应用

【解析】 【解答】 $\because$ AD、BE 是 $\triangle ABC$ 的中线，AD、BE 相交于点 F，

$\therefore$ F 点是三角形 ABC 的重心，

$$\therefore AF = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

故答案为：2.

【分析】由三角形的重心的概念和性质，由 AD、BE 为 $\triangle ABC$ 的中线，且 AD 与 BE 相交于点 F，可知 F 点是三角形 ABC 的重心，根据重心的特点即可求解.

12. 【答案】 $\vec{b} - \vec{a}$

【考点】平面向量

【解析】 【解答】解： $\because \vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b},$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AB} &= \vec{AO} + \vec{OB} \\ &= -\vec{OA} + \vec{OB} \\ &= -\vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

$$= \vec{b} - \vec{a},$$

故答案为： $\vec{b} - \vec{a}$.

【分析】根据 $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$ 计算即可.

13. 【答案】 向上

【考点】二次函数图象与系数的关系

【解析】 【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = (m + 4)x^2 + m$ 经过原点，
 $\therefore (0, 0)$ 在抛物线上，

$$\therefore m = 0,$$

$$\therefore \text{抛物线为： } y = 4x^2.$$

$$\text{由 } a = 4 > 0,$$

$\therefore$ 抛物线的开口向上.

故答案为：向上.

【分析】把原点 $(0, 0)$ 代入函数解析式，先求解抛物线的解析式 $y = 4x^2$ ，再根据 a 的值判断开口方向即可得到答案.

14. 【答案】 $<$

【考点】二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的性质

【解析】 【解答】解：当 $x = 2$ 时， $y_1 = (2 + 1)^2 = 3^2 = 9$ ，
 当 $x = 3$ 时， $y_2 = (3 + 1)^2 = 4^2 = 16$ ，

$$\therefore y_2 > y_1,$$

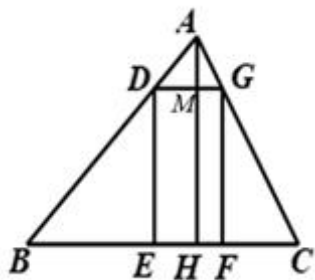
故答案为： $<$.

【分析】根据自变量的值先求解二次函数值，再比较大小即可得到答案.

15. 【答案】 15

【考点】相似三角形的应用

【解析】 【解答】解：如图，记 AH, DG 的交点为 M ， 设 $DG = x, DE = 2DG$,



$$\therefore DE = 2x,$$

$$\because AH \perp BC, \text{ 四边形 } DEFG \text{ 为矩形, } AH = 40,$$

$$\therefore MH = DE = 2x, AM = 40 - 2x, AH \perp DG, DG \parallel EF,$$

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DG}{BC} = \frac{AM}{AH},$$

$$\because BC = 60,$$

$$\therefore \frac{x}{60} = \frac{40-2x}{40},$$

$$\therefore 40x = 2400 - 120x,$$

$$\therefore 160x = 2400,$$

$$\therefore x = 15,$$

$$\therefore DG = 15.$$

故答案为： 15

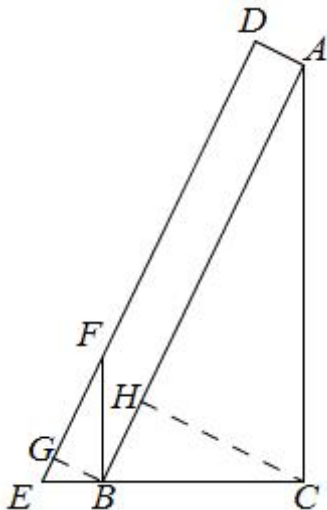
【分析】如图，记 AH, DG 的交点为 M ， 设 $DG = x, DE = 2x, AM = 40 - 2x$ ，再证明：

$\triangle ADG \sim \triangle ABC$ ，利用相似三角形的性质可得： $\frac{DG}{BC} = \frac{AM}{AH}$ ，再列方程，解方程可得答案.

16. 【答案】 $\frac{26}{25}$

【考点】相似三角形的判定与性质

【解析】 【解答】解：如图，分别过点 $C、B$ 作 $CH \perp AB, BG \perp EF$ ，垂足分别为点 $H、G$ ，



$\because \angle ACB=90^\circ$, $AC=12$, $BC=5$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13,$$

$\therefore CH \perp AB$,

$$\therefore CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{60}{13},$$

$\because DE \parallel AB$, $BG \perp DE$, $AD \perp AB$, $AD=0.4$,

$\therefore BG=AD=0.4$, $\angle FEB=\angle ABC$,

$\because BF \perp CE$, $\angle ACB=90^\circ$,

$\therefore \angle ACB=\angle FBE=90^\circ$,

$\because \angle FEB=\angle ABC$, $\angle ACB=\angle FBE=90^\circ$,

$\therefore \triangle FBE \sim \triangle ACB$,

又 $\because CH \perp AB$, $BG \perp EF$,

$$\therefore \frac{BF}{AC} = \frac{BG}{CH},$$

$$\therefore \frac{BF}{12} = \frac{0.4}{\frac{60}{13}},$$

$$\text{解得: } BF = \frac{26}{25},$$

故答案为: $\frac{26}{25}$.

【分析】分别过点 C、B 作 $CH \perp AB$, $BG \perp EF$, 垂足分别为点 H、G, 先根据勾股定理得到 $AB=13$, 进而可求得 $CH=\frac{60}{13}$, 再证明 $\triangle FBE \sim \triangle ACB$, 根据相似三角形的性质可得 $\frac{BF}{AC} = \frac{BG}{CH}$, 由此计算即可.

17. 【答案】 $y = (x - 5)^2 - 1$.

【考点】二次函数图象的几何变换

【解析】【解答】解: 抛物线 $C_1: y = (x - 1)^2 - 1$ 向右平移 k ($k > 0$) 个单位可得:

$$C_2: y = (x - 1 - k)^2 - 1,$$

把 $(3, 3)$ 代入 $y = (x - 1 - k)^2 - 1$,

$$\therefore 3 = (3 - 1 - k)^2 - 1,$$

$$\therefore (2 - k)^2 = 4,$$

$$\therefore 2 - k = 2 \text{ 或 } 2 - k = -2,$$

$$\therefore k = 0 \text{ 或 } k = 4,$$

经检验: $k = 0$ 不合题意, 取 $k = 4$.

$$\therefore C_2: y = (x - 5)^2 - 1.$$

故答案为: $y = (x - 5)^2 - 1$.

【分析】先求抛物线 $C_1: y = (x - 1)^2 - 1$ 向右平移 k ($k > 0$) 个单位的函数解析式, 再把 $(3, 3)$ 代入平移后的解析式, 求解 k 即可得到答案.

18. 【答案】 2

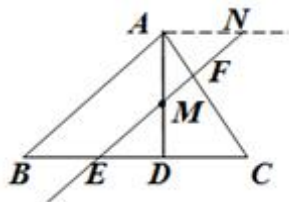
【考点】相似三角形的判定与性质

【解析】 【解答】 解：如图，过 A 作 $AN \parallel BC$ 交 EF 于 N ，
 设 $BE = a, AF = b$,

$$\therefore AB + BE + AF = \frac{1}{2}(AB + BC + AC),$$

$$\therefore 10 + a + b = \frac{1}{2}(10 + 12 + 8) = 15,$$

$$\therefore a + b = 5,$$



$$\because BD:CD = 2:1, BC = 12,$$

$$\therefore BD = 8, CD = 4,$$

$$\therefore DE = 8 - a,$$

$\because M$ 为 AD 的中点,

$$\therefore AM = MD,$$

$$\because AN \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ANM \sim \triangle DEM,$$

$$\therefore \frac{AN}{DE} = \frac{AM}{DM} = 1,$$

$$\therefore AN = 8 - a,$$

$$\because AN \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ANF \sim \triangle CEF,$$

$$\therefore \frac{AN}{CE} = \frac{AF}{CF}, \text{ 即: } \frac{8-a}{8-a+4} = \frac{b}{8-b},$$

$$\therefore 10b + 4a - ab = 32,$$

$$\therefore \begin{cases} a + b = 5 \\ 10b + 4a - ab = 32 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 9 \\ b = -4 \end{cases},$$

$$\text{经检验: } \begin{cases} a = 9 \\ b = -4 \end{cases} \text{ 不合题意, 舍去,}$$

$$\therefore BE = 2.$$

故答案为: 2.

【分析】 如图，过 A 作 $AN \parallel BC$ 交 EF 于 N ，设 $BE = a, AF = b$ ，由三角形的周长关系可得：
 $a + b = 5$ ，再证明： $\triangle ANM \sim \triangle DEM$ ，利用相似三角形的性质求解 $AN = 8 - a$ ，再证明：
 $\triangle ANF \sim \triangle CEF$ ，可得： $10b + 4a - ab = 32$ ，再解方程组可得答案.

三、解答题

$$19. \text{【答案】 解: } \because \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{x}) = \vec{b} + 3\vec{x},$$

$$\therefore \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{b} + 3\vec{x},$$

$$\therefore \frac{7}{2}\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{1}{7}\vec{a} - \frac{2}{7}\vec{b}.$$

【考点】平面向量

【解析】【分析】根据平面向量的定义，既有方向，又有大小计算即可.

20. 【答案】解： $\because y = x^2 + 2x + m = (x+1)^2 + m - 1$,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(-1, m-1)$,

$\therefore$ 抛物线 $y = x^2 + 2x + m$ 顶点在第二象限,

$\therefore m-1 > 0$,

$\therefore m > 1$.

故答案为 $m > 1$.

【考点】点的坐标与象限的关系，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的转化

【解析】【分析】先利用配方法得到抛物线的顶点坐标为 $(-1, m-1)$ ，再利用第二象限点的坐标特征得到 $m-1 > 0$ ，然后解不等式即可.

21. 【答案】 (1) 解： $\because AD \parallel BE \parallel CF$,

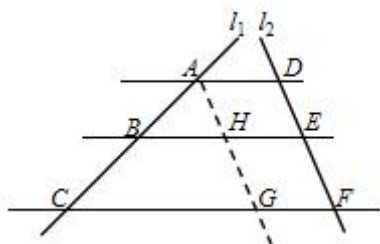
$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC},$$

$\because AB = 6, BC = 8$,

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{6}{6+8} = \frac{3}{7},$$

故 $\frac{DE}{DF}$ 的值为 $\frac{3}{7}$

(2) 解：如图，过点 A 作 $AG \parallel DF$ 交 BE 于点 H，交 CF 于点 G,



$\because AG \parallel DF, AD \parallel BE \parallel CF$,

$\therefore AD = HE = GF = 5$,

$\because CF = 19$,

$\therefore CG = CF - GF = 14$,

$\because BE \parallel CF$,

$$\therefore \frac{BH}{CG} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore \frac{BH}{14} = \frac{3}{7},$$

解得 $BH=6$,

$$\therefore BE=BH+HE=11.$$

【考点】平行线分线段成比例

【解析】 【分析】 (1) 根据 $AD \parallel BE \parallel CF$ 可得 $\frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC}$, 由此计算即可;

(2) 过点 A 作 $AG \parallel DF$ 交 BE 于点 H, 交 CF 于点 G, 得出 $AD=HE=GF=5$, 由平行线分线段成比例定理得出比例式求出 $BH=6$, 即可得出结果.

22. 【答案】 解: 过 B 作 $BH \perp AD$ 于 H, 过 C 作 $CQ \perp AD$ 于 Q,

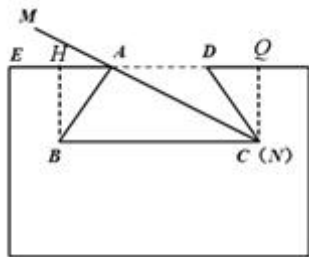
$$\therefore \angle BHA = \angle CQD = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 ABCD 为等腰梯形,

$$\therefore AB = DC, \angle BAD = \angle CDA,$$

$$\therefore \angle BAH = \angle CDQ,$$

$$\therefore \triangle BHA \cong \triangle CQD (AAS),$$



$$\therefore AH = DQ, \quad BH = CQ,$$

$$\text{设 } AH = DQ = x, CQ = BH = y,$$

$$\because \angle MAE = 26.5^\circ,$$

$$\therefore \angle QAC = 26.5^\circ,$$

$$\therefore \tan 26.5^\circ = \frac{CQ}{AQ} = \frac{y}{x+180},$$

$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 为等腰梯形, } \angle ABC = 54.5^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BAH = 54.5^\circ,$$

$$\therefore \tan 54.5^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{y}{x},$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{y}{180+x} = 0.50 \\ \frac{y}{x} = 1.40 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 100 \\ y = 140 \end{cases}$$

经检验: $\begin{cases} x = 100 \\ y = 140 \end{cases}$ 是原方程的解, 且符合题意,

$$\therefore BC = HA + AD + DQ = 100 + 180 + 100 = 380.$$

$\therefore$ 燕尾槽的里口宽 BC 为 380 毫米.

【考点】解直角三角形的应用

【解析】【分析】过 B 作 $BH \perp AD$ 于 H ，过 C 作 $CQ \perp AD$ 于 Q ，先证明： $\triangle BHA \cong \triangle CQD$ ，可得 $AH = DQ$, $BH = CQ$ ，设 $AH = DQ = x$, $CQ = BH = y$ ，再利用锐角三角函数建立方程组，解方程组求解 x, y ，从而可得答案.

23. 【答案】 (1) 解: $\because CA=CD$,

$$\therefore \angle A = \angle CDA.$$

$$\because \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ.$$

$$\because DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle CDA + \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle CDE.$$

$$\because \angle DCE = \angle BCD,$$

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{CD}{CE} = \frac{CB}{CD}.$$

$$\because CD = CA,$$

$$\therefore \frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CA},$$

$$\therefore CA^2 = CB \cdot CE$$

$$(2) \text{ 解: } \because \frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CA}, \angle ACE = \angle BCA,$$

$$\therefore \triangle CAE \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \angle CEA = \angle CAB.$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEA + \angle CAE = 90^\circ.$$

$$\because M \text{ 为 } AE \text{ 的中点, } \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\therefore CM = AM,$$

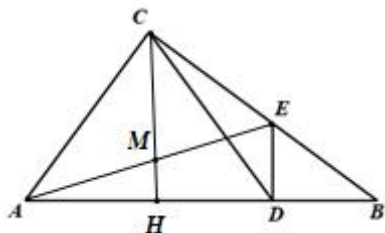
$$\therefore \angle CAE = \angle ACM.$$

$$\because \angle CEA = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle CAB + \angle ACM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AHC = 90^\circ,$$

$$\therefore CH \perp AB.$$



【考点】相似三角形的判定与性质

【解析】【分析】(1) 证明 $\triangle DCE \sim \triangle BCD$ ，根据相似三角形的对应边成比例即可得证;

(2) 证明 $\triangle CAE \sim \triangle CBA$, 可得 $\angle CEA = \angle CAB$, 由直角三角形的性质可证 $CM = AM$, 从而 $\angle CAE = \angle ACM$, 然后由等量代换可证 $\angle CAB + \angle ACM = 90^\circ$, 进而可证结论成立.

24. 【答案】 (1) 解: 由题意设: $y = ax(x - 5)$,

把 $A(2, 4)$ 代入 $y = ax(x - 5)$,

$$\therefore 2a \times (2 - 5) = 4,$$

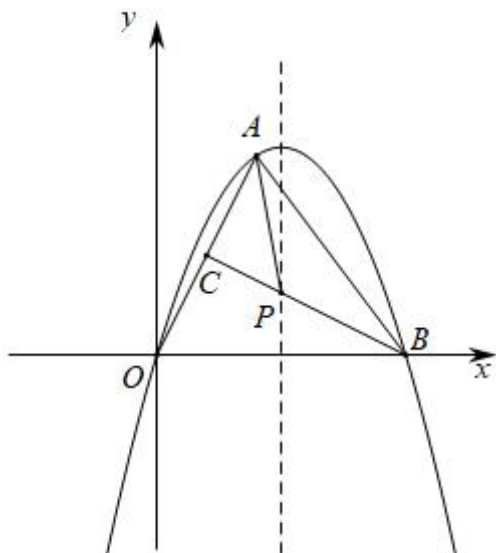
$$\therefore -6a = 4,$$

$$\therefore a = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{抛物线为: } y = -\frac{2}{3}x(x - 5) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x$$

$$(2) \text{ 解: 由抛物线: } y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x,$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴方程为: } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{10}{3}}{2 \times (-\frac{2}{3})} = \frac{5}{2},$$



$$\therefore A(2, 4), O(0, 0), B(5, 0),$$

$$\therefore AO = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, AB = \sqrt{(5-2)^2 + (0-4)^2} = 5, BO = 5,$$

$$\therefore BA = BO, BC \perp AO,$$

$\therefore C$ 为 AO 的中点,

$$\therefore C(1, 2), AC = CO = \sqrt{5},$$

设 BC 为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} k + b = 2 \\ 5k + b = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$$

$$\text{当 } x = \frac{5}{2} \text{ 时, } y = \frac{5}{4},$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right),$$

$$\therefore PA = \sqrt{\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}\sqrt{5},$$

$$PB = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 5\right)^2 + \left(\frac{5}{4} - 0\right)^2} = \frac{5}{4}\sqrt{5},$$

$$\therefore PA = PB,$$

$$\therefore \angle PAB = \angle PBA,$$

$$\therefore B(5, 0), C(1, 2),$$

$$\therefore BC = \sqrt{(5-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \cot \angle PAB = \cot \angle PBA = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$$

(3) 解: 如图, 当 $\triangle ABP \sim \triangle AOM$ 时,

$$\text{则 } \frac{AB}{AO} = \frac{AP}{AM},$$

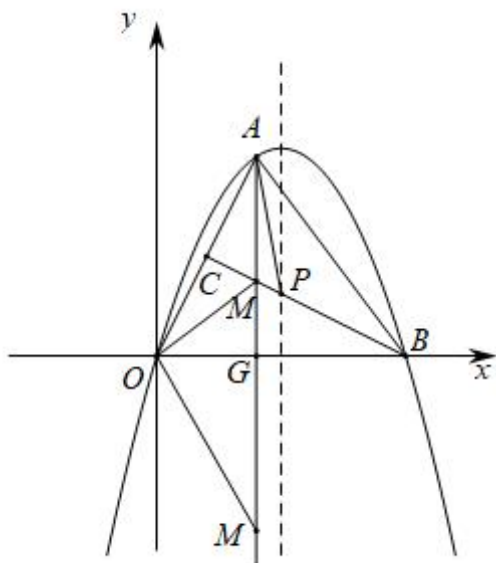
$$\therefore AP = PB = \frac{5\sqrt{5}}{4}, OA = 2\sqrt{5}, AB = 5,$$

$$\therefore \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{4}}{AM},$$

$$\therefore AM = \frac{5}{2}, \quad \text{经检验符合题意,}$$

$$\therefore 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore M\left(2, \frac{3}{2}\right).$$



当 $\triangle ABP \sim \triangle AMO$ 时, 又 $\triangle ABP$ 是等腰三角形,

$\therefore \triangle AMO$ 为等腰三角形, 且 $AO = MO$,

$\therefore AM \perp x$ 轴, 且与 x 轴交于 G ,

$\therefore AG = MG = 4$,

$\therefore M(2, -4)$.

所以: $M(2, -4)$ 或 $M(2, \frac{3}{2})$.

【考点】 待定系数法求二次函数解析式, 相似三角形的判定与性质

【解析】【分析】(1) 由 $B(5, 0)$ 和 $O(0, 0)$ 在抛物线上, 可设抛物线为: $y = ax(x - 5)$, 再把 $A(2, 4)$ 代入可得答案;

(2) 先求解 AO, AB, OB 的长度, 可得 $AB = OB$, 利用等腰三角形的性质证明 $AC = OC$, 求解 C 的坐标, 再求解 BC 的解析式及抛物线的对称轴方程, 求解 P 的坐标, 求解 PA, PB , 可得:

$\angle PAB = \angle PBA$, 再求 BC 的长及 $\cot \angle PBA$ 即可得到答案;

(3) 分两种情况讨论, 如图, 当 $\triangle ABP \sim \triangle AOM$ 时, 当 $\triangle ABP \sim \triangle AMO$ 时, 再利用相似三角形的性质可得答案.

25. **【答案】** (1) 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle B = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAE + \angle BEA = 90^\circ$,

$\because EF \perp AE$,

$\therefore \angle BEA + \angle CEF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAE = \angle CEF$,

$\therefore \triangle BEA \sim \triangle CFE$,

$\therefore \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{CE}$,

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{CF}{CE},$$

$$\therefore EC = 3CF,$$

$$\therefore AB = 3BE,$$

$$\text{设 } CF = a, BE = b,$$

$$\therefore CE = 3a,$$

$$\therefore AB = BC = b + 3a,$$

$$\text{而 } AB = 3BE = 3b,$$

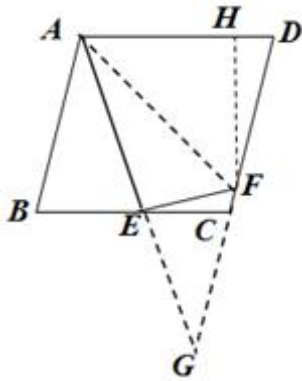
$$\therefore b + 3a = 3b,$$

$$\therefore b = \frac{3}{2}a,$$

$$\therefore AB = \frac{9}{2}a,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle CEF}} = \left(\frac{AB}{CE}\right)^2 = \left(\frac{\frac{9}{2}a}{3a}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

(2) 解: 延长 AE, DC 相交于 G , 过 F 作 $FH \perp AD$ 于 H , 连接 AF ,



$\therefore$ 菱形 $ABCD$,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle G,$$

$\therefore E$ 为 BC 的中点,

$$\therefore BE = CE,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CEG,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle GCE (AAS),$$

$$\therefore AB = CG, AE = GE,$$

$$\therefore AE \perp EF,$$

$$\therefore AF = FG,$$

$$\text{设 } CF = a, \text{ 则 } CE = BE = 3a, \quad AB = BC = DC = CG = AD = 6a,$$

$$\therefore FG = AF = 7a, \quad DF = 5a,$$

$$\text{设 } DH = x,$$

$$\therefore AF^2 - AH^2 = FH^2 = DF^2 - DH^2,$$

$$\therefore (7a)^2 - (6a - x)^2 = (5a)^2 - x^2,$$

$$\therefore x = a,$$

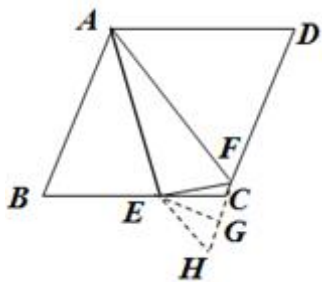
$$\therefore DH = a,$$

$$\therefore \cos D = \frac{DH}{DF} = \frac{a}{5a} = \frac{1}{5},$$

由菱形 $ABCD$ 可得: $\angle B = \angle D$,

$$\therefore \cos B = \frac{1}{5}.$$

(3) 解: 如图, 过 E 作 $EG \perp DC$ 交 DC 的延长线于 G , 延长 CG 至 H , 使 $CG = HG$,



$$\therefore EC = EH, \angle H = \angle ECH,$$

$$\because CF = 2, CE = 3CF,$$

$$\therefore CE = EH = 6,$$

$$\text{设 } DF = x, \quad HG = GC = y,$$

$$\text{则 } DC = AD = x + 2,$$

$$\therefore \cos \angle H = \frac{HG}{EH} = \frac{y}{6},$$

$$\because \text{菱形 } ABCD,$$

$$\therefore \angle B = \angle D, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle B = \angle ECH,$$

$$\because \angle AFE = \angle B,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle B = \angle D = \angle ECH = \angle H,$$

$$\therefore \cos \angle AFE = \frac{EF}{AF} = \cos \angle H = \frac{y}{6},$$

$$\because \angle AFH = \angle AFE + \angle EFH = \angle D + \angle DAF,$$

$$\therefore \angle EFH = \angle DAF,$$

$$\therefore \triangle FEH \sim \triangle AFD,$$

$$\therefore \frac{EH}{DF} = \frac{HF}{AD} = \frac{EF}{AF},$$

$$\therefore \frac{6}{x} = \frac{2y+2}{x+2} = \frac{y}{6},$$

$$\therefore \begin{cases} xy = 36 \\ xy = 10y + 12 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 15 \\ y = 2.4 \end{cases}$$

经检验: $\begin{cases} x = 15 \\ y = 2.4 \end{cases}$ 是原方程组的解,

$$\therefore CD = x + 2 = 17,$$

即菱形 $ABCD$ 的边长为: 17.

【考点】相似三角形的判定与性质, 四边形-动点问题

【解析】【分析】(1) 先证明: $\triangle BEA \sim \triangle CFE$, 可得: $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{CE}$, 结合: $EC = 3CF$, 可得: $AB = 3BE$, 再设 $CF = a, BE = b$, 可得 $AB = BC = b + 3a$, 而 $AB = 3b$, 建立方程: $b + 3a = 3b$, 可得: $b = \frac{3}{2}a$, 再利用相似三角形的性质可得答案.

(2) 延长 AE, DC 相交于 G , 过 F 作 $FH \perp AD$ 于 H , 连接 AF , 先证明: $\triangle ABE \cong \triangle GCE$, 可得: $AB = CG, AE = GE$, 证明: $AF = FG$, 设 $CF = a$, 再设 $DH = x$, 利用 $AF^2 - AH^2 = FH^2 = DF^2 - DH^2$, 求解 x , 可得 $\cos D$, 从而可得答案;

(3) 如图, 过 E 作 $EG \perp DC$ 交 DC 的延长线于 G , 延长 CG 至 H , 使 $CG = HG$, 证明: $EH = EC = 6$, 设 $DF = x, HG = GC = y$, 证明: $\angle AFE = \angle B = \angle D = \angle ECH = \angle H$, 可得: $\cos \angle AFE = \frac{EF}{AF} = \cos \angle H = \frac{y}{6}$, 再证明: $\triangle FEH \sim \triangle AFD$, 利用相似三角形的性质列方程组, 解方程组可得答案.