

2021-2022 学年上海市松江区九年级（上）期末质量检测

数学试卷（中考一模）

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，那么锐角 α 的度数是（ ）

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 75°

【分析】根据 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 解答.

【解答】解： $\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \angle A = 60^\circ$,

故选：C.

2.（4 分）已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = c$ ， $AC = b$ ，那么下列结论一定成立的是（ ）

A. $b = c \tan A$

B. $b = c \cot A$

C. $b = c \sin A$

D. $b = c \cos A$

【分析】根据余弦的定义解答即可.

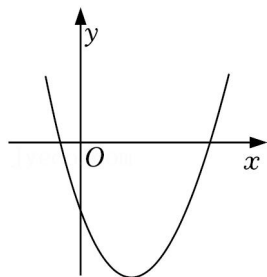
【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = c$ ， $AC = b$,

则 $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$,

$\therefore b = c \cos A$,

故选：D.

3.（4 分）已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ （ $a \neq 0$ ）的图象如图所示，那么下列判断正确的是（ ）



A. $b > 0$ ， $c > 0$

B. $b > 0$ ， $c < 0$

C. $b < 0$ ， $c > 0$

D. $b < 0$ ， $c < 0$.

【分析】通过函数图象开口方向，对称轴位置及抛物线与 y 轴交点位置可确定 a ， b ， c 的符号，进而求解.

【解答】解： $\because$ 抛物线开口向上，

$$\therefore a > 0,$$

$\therefore$ 抛物线对称轴在 y 轴右侧,

$$\therefore -\frac{b}{2a} > 0,$$

$$\therefore b < 0,$$

$\therefore$ 抛物线与 y 轴交点在 x 轴下方,

$$\therefore c < 0.$$

故选: D .

4. (4分) 已知 $\vec{a} = 2\vec{b}$, 那么下列判断错误的是 ()

A. $\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{0}$

B. $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$

C. $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$

D. $\vec{a} // \vec{b}$

【分析】 根据平行向量以及模的定义的知识求解即可求得答案.

【解答】 解: A 、由 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 知, $\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{0}$, 符合题意;

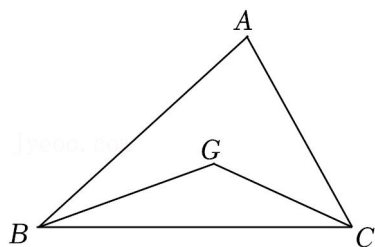
B 、由 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 知, $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$, 不符合题意;

C 、由 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 知, $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, 不符合题意;

D 、由 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 知, $\vec{a} // \vec{b}$, 不符合题意.

故选: A .

5. (4分) 如图, 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 那么 $S_{\triangle BCG} : S_{\triangle ABC}$ 等于 ()



A. 1: 2

B. 1: 3

C. 2: 3

D. 2: 5

【分析】 连接 AG 延长交 BC 于点 D , 由 G 是重心可得 D 是 BC 的中点, 所以 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$, $S_{\triangle BCG} = S_{\triangle CDG}$, 又由重心定理可 $AG = 2GD$, 则 $2S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABG}$, 进而得到 $3S_{\triangle BCG} = S_{\triangle ABC}$, 即可求解.

【解答】 解: 连接 AG 延长交 BC 于点 D ,

$\therefore G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore D$ 是 BC 的中点,

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}, S_{\triangle BCG} = S_{\triangle CDG},$$

$$\therefore AG = 2GD,$$

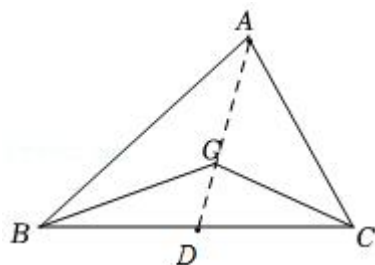
$$\therefore 2S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABG},$$

$$\therefore 3S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABD},$$

$$\therefore 3S_{\triangle BCG} = S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle BCG} : S_{\triangle ABC} = 1 : 3,$$

故选：B.



6. (4分) 下列四个命题中，真命题的个数是 ()

- (1) 底边和腰对应成比例的两个等腰三角形相似；
- (2) 底边和底边上的高对应成比例的两个等腰三角形相似；
- (3) 底边和一腰上的高对应成比例的两个等腰三角形相似；
- (4) 腰和腰上的高对应成比例的两个等腰三角形相似。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【分析】 根据等腰三角形的性质、相似三角形的判定定理判断即可。

【解答】 解：(1) $\because$ 两个等腰三角形的底角不一定相等，

$\therefore$ 底边和腰对应成比例的两个等腰三角形不一定相似，本小题说法是假命题；

(2) 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是等腰三角形， $AD \perp BC$ ， $A'D' \perp B'C'$ ，

$$\text{则 } BD = \frac{1}{2}BC, B'D' = \frac{1}{2}B'C',$$

$$\therefore \frac{AD}{A'D'} = \frac{BC}{B'C'},$$

$$\therefore \frac{AD}{A'D'} = \frac{BD}{B'D'},$$

$$\therefore \angle ADC = \angle A'D'C' = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle A'D'B',$$

$$\therefore \angle B = \angle B',$$

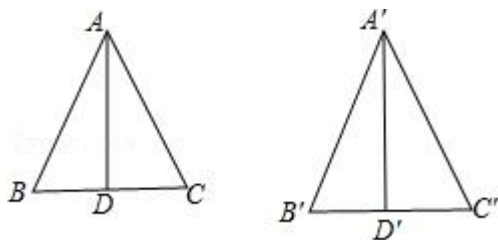
$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle A'C'B',$$

$\therefore$ 底边和底边上的高对应成比例的两个等腰三角形相似，本小题说法是真命题；

(3) 同理，底边和一腰上的高对应成比例的两个等腰三角形相似，本小题说法是真命题；

(4) 腰和腰上的高对应成比例的两个等腰三角形相似，本小题说法是真命题；

故选：C.



二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7.（4 分）已知 $\frac{x}{y} = 2$ ，那么 $\frac{2x-y}{x+2y} = -\frac{3}{4}$ 。

【分析】根据比例的性质求出 $x = 2y$ ，再把 $x = 2y$ 代入 $\frac{2x-y}{x+2y}$ ，即可求出答案。

【解答】解：∵ $\frac{x}{y} = 2$ ，

$$\therefore x = 2y,$$

$$\therefore \frac{2x-y}{x+2y}$$

$$= \frac{4y-y}{2y+2y}$$

$$= \frac{3y}{4y}$$

$$= \frac{3}{4},$$

故答案为： $\frac{3}{4}$ 。

8.（4 分）把抛物线 $y = x^2 + 1$ 向右平移 1 个单位，所得新抛物线的表达式是 $y = x^2 - 2x + 2$ 。

【分析】根据平移规律得到新抛物线顶点坐标，即可得的新抛物线的表达式。

【解答】解：∵ 抛物线 $y = x^2 + 1$ 的顶点坐标为 $(0, 1)$ ，

∴ 抛物线向右平移 1 个单位后，所得新抛物线的表达式为 $y = (x - 1)^2 + 1$ ，即 $y = x^2 - 2x + 2$ 。

故答案为： $y = x^2 - 2x + 2$ 。

9.（4 分）已知两个相似三角形面积的比是 4：9，那么这两个三角形周长的比是 $2:3$ 。

【分析】根据相似三角形的性质求出相似比，再求出周长比。

【解答】解：∵ 两个相似三角形面积的比是 4：9，

∴ 两个相似三角形相似比是 2：3，

∴ 这两个三角形周长的比是 2：3，

故答案为： $2:3$ 。

10.（4 分）已知， $AB = 8$ ， P 是 AB 黄金分割点， $PA > PB$ ，则 PA 的长为 $4\sqrt{5} - 4$ 。

【分析】根据黄金分割点的定义，知 PA 是较长线段；则 $PA = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$ ，代入数据即可。

【解答】解：由于 P 为线段 $AB = 8$ 的黄金分割点，

且 $PA > PB$ ，

$$\text{则 } PA = 8 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 4\sqrt{5} - 4.$$

故本题答案为： $4\sqrt{5} - 4$.

11. (4分) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A 的坐标为 $(2, 3)$ ，那么直线 OA 与 x 轴夹角的正切值是 $-\frac{3}{2}$.

【分析】由 A 坐标知，直线 OA 与 x 轴夹角的正切值 $= \frac{y_A}{x_A} = \frac{3}{2}$.

【解答】解：由 A 坐标知，直线 OA 与 x 轴夹角的正切值 $= \frac{y_A}{x_A} = \frac{3}{2}$,

故答案为： $\frac{3}{2}$.

12. (4分) 如果一个二次函数图象的对称轴是直线 $x = 2$ ，且沿着 x 轴正方向看，图象在对称轴左侧部分是上升的，请写出一个符合条件的函数解析式 $y = -x^2 + 4x + 5$ ，答案不唯一 .

【分析】由于二次函数的图象在对称轴 $x = 2$ 的左侧部分是上升的，由此可以确定二次函数的二次项系数为负数，由此可以确定函数解析式不唯一 .

【解答】解： $\because$ 二次函数的图象在对称轴 $x = 2$ 的左侧部分是上升的，

$\therefore$ 这个二次函数的二次项系数为负数，

$\therefore$ 符合条件的函数有 $y = -x^2 + 4x + 5$ ，答案不唯一 .

答案为： $y = -x^2 + 4x + 5$ ，答案不唯一 .

13. (4分) 一位运动员投掷铅球，如果铅球运行时离地面的高度为 y (米) 关于水平距离 x (米) 的函数解析式为 $y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ ，那么铅球运动过程中最高点离地面的距离为 3 米 .

【分析】直接利用配方法求出二次函数最值即可 .

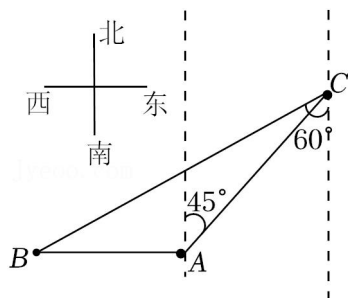
【解答】解：由题意可得：

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \\ &= -\frac{1}{12}(x^2 - 8x) + \frac{5}{3} \\ &= -\frac{1}{12}(x - 4)^2 + 3, \end{aligned}$$

故铅球运动过程中最高点离地面的距离为：3m.

故答案为：3.

14. (4分) 如图，码头A在码头B的正东方向，它们之间的距离为10海里. 一货船由码头A出发，沿北偏东 45° 方向航行到达小岛C处，此时测得码头B在南偏西 60° 方向，那么码头A与小岛C的距离是 $(5\sqrt{6}+5\sqrt{2})$ 海里 (结果保留根号).



【分析】过C作 $CD \perp BA$ 于D，证 $\triangle ACD$ 是等腰直角三角形，得 $CD = AD$ ， $AC = \sqrt{2}CD$ ，设 $CD = AD = x$ 海里，则 $AC = \sqrt{2}x$ 海里，再由锐角三角函数定义得 $BD = \sqrt{3}CD = \sqrt{3}x$ (海里)，然后由 $BD = AD + AB$ 得 $\sqrt{3}x = x + 10$ ，解得： $x = 5\sqrt{3} + 5$ ，即可解决问题.

【解答】解：过C作 $CD \perp BA$ 于D，如图：

则 $\angle CDB = 90^\circ$ ，

由题意得： $\angle BCD = 60^\circ$ ， $\angle CAD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle ACD$ 是等腰直角三角形，

$\therefore CD = AD$ ， $AC = \sqrt{2}CD$ ，

设 $CD = AD = x$ 海里，则 $AC = \sqrt{2}x$ 海里，

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中， $\tan \angle BCD = \frac{BD}{CD} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ，

$\therefore BD = \sqrt{3}CD = \sqrt{3}x$ (海里)，

$\therefore BD = AD + AB$ ，

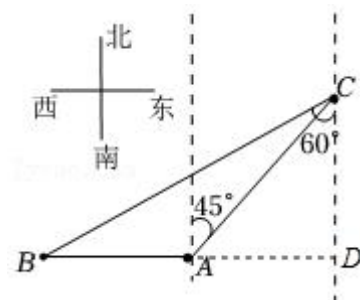
$\therefore \sqrt{3}x = x + 10$ ，

解得： $x = 5\sqrt{3} + 5$ ，

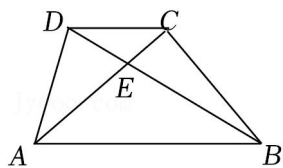
$\therefore \sqrt{2}x = \sqrt{2} \times (5\sqrt{3} + 5) = 5\sqrt{6} + 5\sqrt{2}$ ，

即 $AC = (5\sqrt{6} + 5\sqrt{2})$ 海里，

故答案为： $(5\sqrt{6} + 5\sqrt{2})$.



15. (4分) 如图, 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AE}$ 可以用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示为 $-\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$.

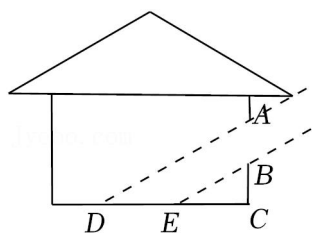


【分析】 由 $AB \parallel CD$, 即可证得 $\triangle PCD \sim \triangle PAB$, 又由 $AB = 2CD$, 即可求得 $\overrightarrow{BE}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 的关系, 利用三角形法则, 求得 $\overrightarrow{BD}$, 即可求得 $\overrightarrow{AE}$.

【解答】 解: $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$,
 $\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.
 $\because AB \parallel CD$, $AB = 2CD$,
 $\therefore \triangle ECD \sim \triangle EAB$,
 $\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{DE}{BE} = \frac{1}{2}$,
 $\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a})$,
 $\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$.

故答案为: $\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$.

16. (4分) 如图, 某时刻阳光通过窗口 AB 照射到室内, 在地面上留下 4 米宽的“亮区” DE , 光线与地面所成的角 (如 $\angle BEC$) 的正切值是 $\frac{1}{2}$, 那么窗口的高 AB 等于 2 米.



【分析】 由题意知 $CE = 2BC$, $CD = 2AC$, 进而得到 $CD = DE + CE = 4 + 2BC$, 由 $BE \parallel AD$ 得到 $\triangle BCE \sim \triangle ACD$, 根据相似三角形的性质得到 $\frac{BC}{BC+AB} = \frac{2BC}{4+2BC} = \frac{BC}{2+BC}$, 化简即可求出 AB .

【解答】 解: 由题意知 $\tan \angle BEC = \frac{BC}{CE} = \frac{AC}{CD} = \frac{1}{2}$, $DE = 4$,
 $\therefore CE = 2BC$, $CD = 2AC$,
 $\therefore CD = DE + CE = 4 + 2BC$,
 $\therefore AD \parallel BE$,

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CE}{CD},$$

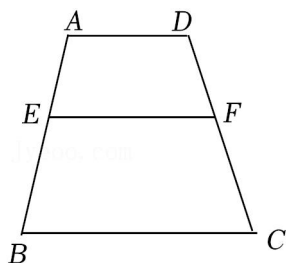
$$\therefore \frac{BC}{BC+AB} = \frac{2BC}{4+2BC} = \frac{BC}{2+BC},$$

$$\therefore BC+AB = 2+BC,$$

$$\therefore AB = 2,$$

故答案为：2.

17. (4分) 我们知道：四个角对应相等，四条边对应成比例的两个四边形是相似四边形．如图，已知梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD = 1$ ， $BC = 2$ ， E 、 F 分别是边 AB 、 CD 上的点，且 $EF \parallel BC$ ，如果四边 $AEFD$ 与四边形 $EBCF$ 相似，那么 $\frac{AE}{EB}$ 的值是 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ．



【分析】 根据相似多边形的性质得出 $\frac{AD}{EF} = \frac{EF}{BC}$ ，把 $AD = 1$ 和 $BC = 2$ 代入求出 EF ，再根据相似多边形的性质得出 $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{EF}$ ，再求出答案即可．

【解答】 解： $\because$ 四边 $AEFD$ 与四边形 $EBCF$ 相似，

$$\therefore \frac{AD}{EF} = \frac{EF}{BC},$$

$$\because AD = 1, BC = 2,$$

$$\therefore \frac{1}{EF} = \frac{EF}{2},$$

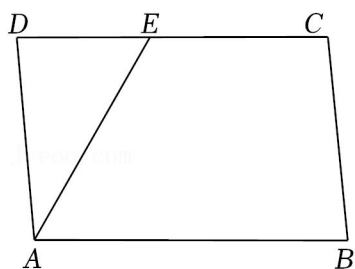
$$\text{解得：} EF = \sqrt{2},$$

$\because$ 四边 $AEFD$ 与四边形 $EBCF$ 相似，

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{EF} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{故答案为：} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

18. (4分) 如图，已知矩形 $ABCD$ 中， $AD = 3$ ， $AB = 5$ ， E 是边 DC 上一点，将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转得到 $\triangle AD'E'$ ，使得点 D 的对应点 D' 落在 AE 上，如果 $D'E'$ 的延长线恰好经过点 B ，那么 DE 的长度等于 $-\frac{9}{4}$ ．



【分析】如图，连接 BE 、 BE' ，根据矩形的性质和旋转变换的性质可得： $AD' = AD = 3$ ， $\angle AD'E = \angle D = 90^\circ$ ，利用勾股定理可得 $BD' = 4$ ，再运用面积法可得： $AB \cdot AD = AE \cdot BD'$ ，求出 $AE = \frac{15}{4}$ ，再运用勾股定理即可求得答案．

【解答】解：如图，连接 BE 、 BE' ，

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中， $AD = 3$ ， $AB = 5$ ，

$\therefore \angle D = 90^\circ$ ，

由旋转知， $\triangle AD'E' \cong \triangle ADE$ ，

$\therefore AD' = AD = 3$ ， $\angle AD'E = \angle D = 90^\circ$ ，

$\because D'E'$ 的延长线恰好经过点 B ，

$\therefore \angle AD'B = 90^\circ$ ，

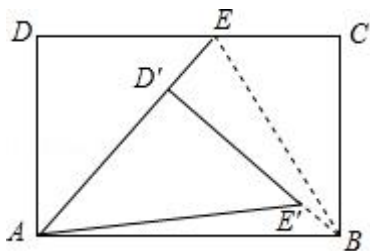
在 $\text{Rt}\triangle ABD'$ 中， $BD' = \sqrt{AB^2 - AD'^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ，

$\because AB \cdot AD = AE \cdot BD'$ ，

$\therefore AE = \frac{AB \cdot AD}{BD'} = \frac{5 \times 3}{4} = \frac{15}{4}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中， $DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - 3^2} = \frac{9}{4}$ ，

故答案为： $\frac{9}{4}$ ．

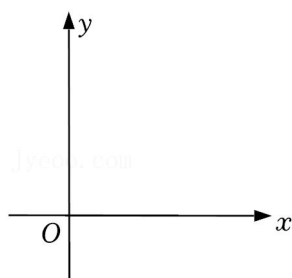


三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（10 分）已知一个二次函数图象的顶点为 $(1, 0)$ ，与 y 轴的交点为 $(0, 1)$ ．

（1）求这个二次函数的解析式；

（2）在所给的平面直角坐标系 xOy 中，画出这个二次函数的图象．



【分析】(1) 设抛物线解析式为 $y = a(x - 1)^2$ ，将 $(0, 1)$ 代入解析式求解。

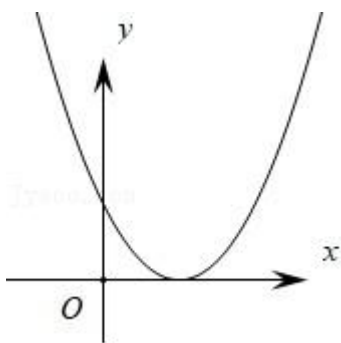
(2) 根据二次函数解析式作图。

【解答】解：(1) 设抛物线解析式为 $y = a(x - 1)^2$ ，

将 $(0, 1)$ 代入 $y = a(x - 1)^2$ 得 $1 = a$ ，

$$\therefore y = (x - 1)^2.$$

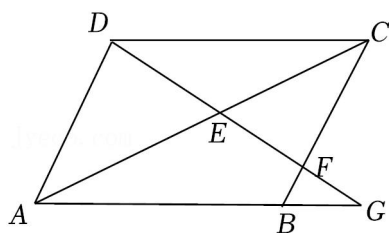
(2) 如图，



20. (10分) 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中， G 是 AB 延长线上一点，联结 DG ，分别交 AC 、 BC 于点 E 、 F ，且 $AE:EC = 3:2$ 。

(1) 如果 $AB = 10$ ，求 BG 的长；

(2) 求 $\frac{EF}{FG}$ 的值。



【分析】(1) 由平行四边形的性质证明 $\triangle AGE \sim \triangle CDE$ ，再根据 $AE:EC = 3:2$ 求出 $BG = 15$ ，从而得出结论；

(2) 利用 $\triangle ADE \sim \triangle CFE$ 和 $\triangle AGE \sim \triangle CDE$ 得出 $\frac{DE}{EF} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$ 和 $\frac{DE}{GE} = \frac{EC}{AE} = \frac{2}{3}$ ，从而得出结论。

【解答】解：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle CDE, \angle AGE = \angle CDE,$$

$$\therefore \triangle AGE \sim \triangle CDE,$$

$$\therefore \frac{AG}{CD} = \frac{AE}{CE} = \frac{3}{2},$$

$$\text{又} \because AB = CD = 10,$$

$$\therefore AG = \frac{3}{2}CD = \frac{3}{2} \times 10 = 15,$$

$$\therefore BG = AG - AB = 15 - 10 = 5;$$

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, \text{ 即 } AD \parallel CF,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CFE, \angle DAE = \angle FCE,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CFE,$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2},$$

$$\text{又} \because \triangle AGE \sim \triangle CDE,$$

$$\therefore \frac{DE}{GE} = \frac{EC}{AE} = \frac{2}{3},$$

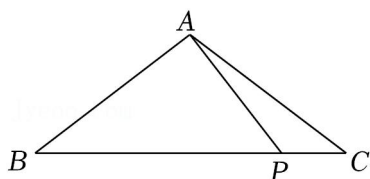
$$\therefore \frac{EF}{GE} = \frac{EF}{DE} \times \frac{DE}{GE} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

$$\therefore \frac{EF}{FG} = \frac{EF}{GE - EF} = \frac{4}{5}.$$

21. (10分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 12$, $\cos B = \frac{3}{4}$, $AP \perp AB$, 交 BC 于点 P .

(1) 求 CP 的长;

(2) 求 $\angle PAC$ 的正弦值.



【分析】(1) 通过作底边上的高 AD , 在直角三角形 ABD 和直角三角形 ABP 中分别求出 BD 、 BP , 由等腰三角形的性质求出 BC , 进而求出 PC 的长;

(2) 作高构造直角三角形, 求出 AE 、 PE 后, 由锐角三角函数的定义进行计算即可.

【解答】解: (1) 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ,

$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, } AB = 12, \cos B = \frac{3}{4},$$

$$\therefore BD = \cos B \cdot AB = 9,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore BD = CD = 9, \angle B = \angle C,$$

$$\because AP \perp AB,$$

$$\therefore \angle PAB = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABP \text{ 中, } AB = 12, \cos B = \frac{3}{4},$$

$$\therefore BP = \frac{AB}{\cos B} = 16,$$

$$\therefore PC = BC - BP$$

$$= 9 \times 2 - 16$$

$$= 2;$$

(2) 过点 P 作 $PE \perp AC$ 于 E ,

$$\text{在 Rt}\triangle PCE \text{ 中, } PC = 2, \cos C = \cos B = \frac{3}{4},$$

$$\therefore CE = \cos C \cdot PC = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore PE = \sqrt{PC^2 - CE^2} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

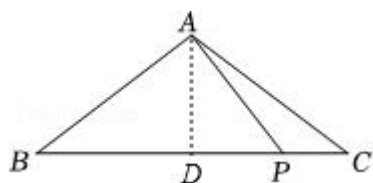
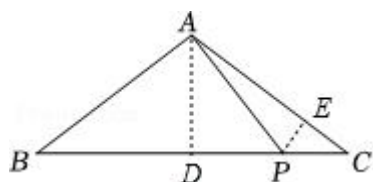
$$AP = \sqrt{AD^2 + DP^2}$$

$$= \sqrt{AB^2 - BD^2 + PD^2}$$

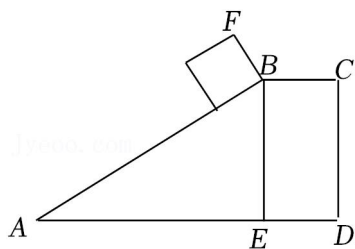
$$= \sqrt{144 - 81 + 49}$$

$$= 4\sqrt{7},$$

$$\therefore \sin \angle PAC = \frac{PE}{AP} = \frac{1}{8}.$$



22. (10 分) 某货站沿斜坡 AB 将货物传送到平台 BC . 一个正方体木箱沿着斜坡移动, 当木箱的底部到达点 B 时的平面示意图如图所示. 已知斜坡 AB 的坡度为 $1:2.4$, 点 B 到地面的距离 $BE = 1.5$ 米, 正方体木箱的棱长 $BF = 0.65$ 米, 求点 F 到地面的距离.



【分析】过点 F 作 $FG \perp AD$ 于 G ，延长 CB 交 FG 于 H ，根据坡度的概念、勾股定理求出 BH ，进而求出 FH ，计算即可．

【解答】解：过点 F 作 $FG \perp AD$ 于 G ，延长 CB 交 FG 于 H ，
则四边形 $HGE B$ 为矩形，

$$\therefore HG = BE = 1.5 \text{ 米}, \angle HBE = 90^\circ,$$

$$\because \angle EBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFH = \angle HBA = \angle A,$$

$$\therefore BH : FH = 1 : 2.4,$$

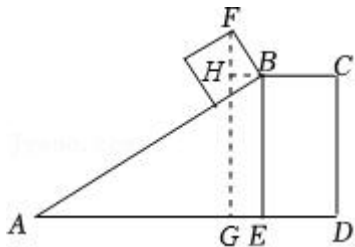
$$\text{由勾股定理得: } BF^2 = BH^2 + FH^2, \text{ 即 } 0.65^2 = BH^2 + (2.4BH)^2,$$

$$\text{解得: } BH = 0.25,$$

$$\therefore FH = 0.25 \times 2.4 = 0.6 \text{ (米)},$$

$$\therefore FG = FH + HG = 2.1 \text{ (米)},$$

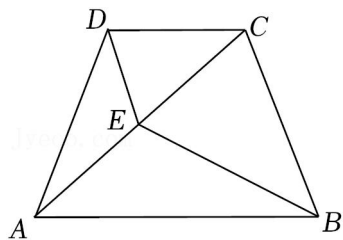
答：点 F 到地面的距离为 2.1 米．



23. (12 分) 已知：如图，梯形 $ABCD$ 中， $DC \parallel AB$ ， $AC = AB$ ，过点 D 作 BC 的平行线交 AC 于点 E ．

(1) 如果 $\angle DEC = \angle BEC$ ，求证： $CE^2 = ED \cdot CB$ ；

(2) 如果 $AD^2 = AE \cdot AC$ ，求证： $AD = BC$ ．



【分析】(1) 通过证明 $\triangle DEC \sim \triangle CEB$ ，可得 $\frac{CE}{DE} = \frac{BE}{CE}$ ，可得结论；

(2) 通过证明 $\triangle BCE \sim \triangle ACB$ ，可得 $\frac{BC}{AC} = \frac{CE}{BC}$ ，由相似三角形的性质可得 $\frac{DE}{CE} = \frac{CE}{BC}$ ，可得

$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{CE}$, 通过证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACD$, 可得 $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CD} = \frac{DE}{CE}$, 可得结论.

【解答】证明: (1) $\because AC = AB$,

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC,$$

$$\because DC \parallel AB,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle CAB,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle BCE,$$

$$\because \angle DEC = \angle BEC,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle BCE = \angle BEC = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle CBE = \angle DCE, BE = BC,$$

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle CEB,$$

$$\therefore \frac{CE}{DE} = \frac{BE}{CE},$$

$$\therefore CE^2 = DE \cdot BE = DE \cdot CB;$$

$$(2) \because \angle BAC = \angle CBE, \angle ACB = \angle BCE,$$

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CE}{BC},$$

$$\because \triangle DEC \sim \triangle CEB,$$

$$\therefore \frac{DE}{CE} = \frac{CE}{BC}, \angle CDE = \angle BCE = \angle CED = \angle BEC,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{CE}, CD = CE,$$

$$\therefore AD^2 = AE \cdot AC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD},$$

$$\text{又} \because \angle DAE = \angle DAC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CD} = \frac{DE}{CE},$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{BC}{AC},$$

$$\therefore AD = BC.$$

24. (12分) 如图, 已知直线 $y = -\frac{2}{3}x + 2$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 抛物线 $y = -$

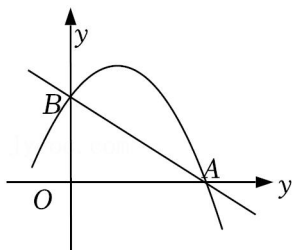
$\frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点.

(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 直线 $x=t$ 与该抛物线交于点 C , 与线段 AB 交于点 D (点 D 与点 A 、 B 不重合), 与 x 轴交于点 E , 联结 AC 、 BC .

①当 $\frac{DE}{CD} = \frac{AE}{OE}$ 时, 求 t 的值;

②当 CD 平分 $\angle ACB$ 时, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



【分析】 (1) 先求出点 A , 点 B 坐标, 利用待定系数法可求解析式;

(2) 证明 $\triangle ADE \sim \triangle BDC$, 由相似三角形的性质得出 $\angle DAE = \angle DBC$, 证出 $AE \parallel BC$, 得出 C 点的纵坐标为 2, 则可求出答案;

(3) 设 $C(t, -\frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + 2)$, 过点 B 作 $BH \perp CE$ 于点 H , 得出 $\tan \angle BCH = \tan \angle ACE$,

则 $\frac{BH}{CH} = \frac{AE}{CE}$, 解方程求出 t 的值, 则可求出答案.

【解答】 解: (1) 由 $y = -\frac{2}{3}x^2 + 2$ 可得:

当 $x=0$ 时, $y=2$; 当 $y=0$ 时, $x=3$,

$\therefore A(3, 0), B(0, 2)$,

把 A 、 B 的坐标代入 $y = -\frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 得:

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} \times 9 + 3b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = \frac{4}{3} \\ c = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为: $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$;

(2) ①如图 1,

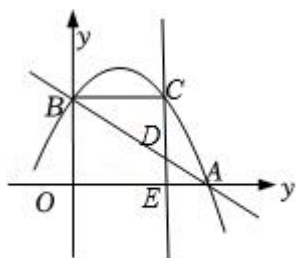


图1

$$\because DE \parallel OB,$$

$$\therefore \frac{AE}{OE} = \frac{AD}{BD},$$

$$\therefore \frac{AE}{OE} = \frac{DE}{CD},$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{DE}{CD},$$

$$\text{又} \because \angle ADE = \angle BDC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DBC,$$

$$\therefore AE \parallel BC,$$

$$\therefore C \text{ 点的纵坐标为 } 2,$$

$$\therefore 2 = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x = 2,$$

$$\therefore C(2, 2),$$

$$\therefore t = 2;$$

$$\text{②如图 2, 设 } C(t, -\frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + 2),$$

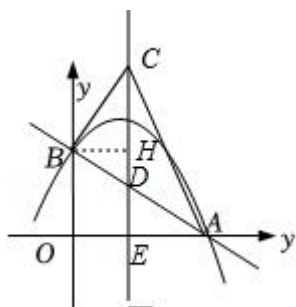


图2

过点 B 作 $BH \perp CE$ 于点 H ,

$$\because \angle BCH = \angle ACE,$$

$$\therefore \tan \angle BCH = \tan \angle ACE,$$

$$\therefore \frac{BH}{CH} = \frac{AE}{CE},$$

$$\therefore \frac{t}{-\frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{3}t} = \frac{3-t}{-\frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + 2},$$

$$\therefore t = \frac{1}{2},$$

$$\therefore C\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right),$$

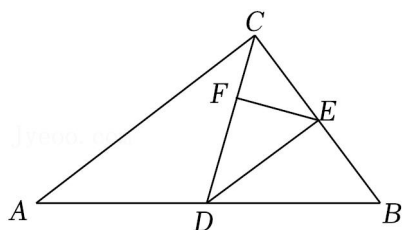
$$\therefore S_{\triangle ACB} = S_{\triangle ACE} + S_{\text{梯形} BOCE} - S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{5}{2}\right) \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = \frac{5}{4}.$$

25. (14分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = 4$, D 是边 AB 上一点(与点 A 、 B 不重合), DE 平分 $\angle CDB$, 交边 BC 于点 E , $EF \perp CD$, 垂足为点 F .

(1) 当 $DE \perp BC$ 时, 求 DE 的长;

(2) 当 $\triangle CEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似时, 求 $\angle CDE$ 的正切值;

(3) 如果 $\triangle BDE$ 的面积是 $\triangle DEF$ 面积的2倍, 求这时 AD 的长.



【分析】(1) 证明 $\triangle DCE \cong \triangle DBE$ (ASA), 可得 $CE = BE = 2$, 根据 $\frac{DE}{BE} = \tan \angle B = \frac{AC}{BC}$,

即可求得答案;

(2) 分两种情况: ①当 $\triangle CEF \sim \triangle ABC$ 时, 可证得 $\angle CDB = 90^\circ$, 再根据 DE 平分 $\angle CDB$, 可得 $\angle CDE = 45^\circ$, 再由特殊角的三角函数值即可求得答案; ②当 $\triangle CEF \sim \triangle BAC$ 时, 则 $\angle ECF = \angle ABC$, 得出 $DC = DB$, 再由 DE 平分 $\angle CDB$, 可得 $DE \perp BC$, 推出 $\angle CDE = \angle BAC$, 利用三角函数定义即可求得答案;

(3) 如图, 过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G , 根据角平分线性质可得出 $EF = EG$, 推出 $DF = DG$, 再由 $\triangle BDE$ 的面积是 $\triangle DEF$ 面积的2倍, 可得出 $BD = 2DF$, 进而推出 $DE = BE$, 设 $BE = x$, 则 $DE = x$, $CE = BC - BE = 4 - x$, $BG = BE \cdot \cos B = \frac{2}{3}x$, $BD = 2BG = \frac{4}{3}x$, $DG = DF = BG = \frac{2}{3}x$, $AD = AB - BD = 6 - \frac{4}{3}x$, 根据 $\triangle CDE \sim \triangle CBD$, 得出 $\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CD} = \frac{DE}{BD}$, 建立方程求解即可.

【解答】解: (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = 4$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$\therefore DE$ 平分 $\angle CDB$,

$$\therefore \angle CDE = \angle BDE,$$

$$\because DE \perp BC,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle DEB = 90^\circ,$$

在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle DBE$ 中,

$$\begin{cases} \angle CDE = \angle BDE \\ DE = DE \\ \angle DEC = \angle DEB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DCE \cong \triangle DBE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore CE = BE,$$

$$\because CE + BE = BC = 4,$$

$$\therefore CE = BE = 2,$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \tan \angle B = \frac{AC}{BC},$$

$$\therefore \frac{DE}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{4},$$

$$\therefore DE = \sqrt{5};$$

$$(2) \because EF \perp CD,$$

$$\therefore \angle CFE = 90^\circ = \angle ACB,$$

$$\because \triangle CEF \text{ 与 } \triangle ABC \text{ 相似},$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle ABC \text{ 或 } \triangle CEF \sim \triangle BAC,$$

①当 $\triangle CEF \sim \triangle ABC$ 时,

$$\text{则 } \angle ECF = \angle BAC,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\because DE \text{ 平分 } \angle CDB,$$

$$\therefore \angle CDE = \frac{1}{2} \angle CDB = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle CDE = \tan 45^\circ = 1;$$

②当 $\triangle CEF \sim \triangle BAC$ 时,

$$\text{则 } \angle ECF = \angle ABC,$$

$$\therefore DC = DB,$$

$$\because DE \text{ 平分 } \angle CDB,$$

$$\therefore DE \perp BC,$$

$$\therefore \angle CDE + \angle ECF = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle BAC,$$

$$\therefore \tan \angle CDE = \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

综上所述, $\angle CDE$ 的正切值为 1 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$;

(3) 如图, 过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G ,

$\because DE$ 平分 $\angle CDB$, $EF \perp CD$, $EG \perp AB$,

$$\therefore EF = EG,$$

$$\because DE = DE,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DEF \cong \text{Rt}\triangle DEG \text{ (HL)},$$

$$\therefore DF = DG,$$

$\because \triangle BDE$ 的面积是 $\triangle DEF$ 面积的 2 倍,

$$\therefore BD = 2DF,$$

$$\therefore DG = BG,$$

$$\because EG \perp BD,$$

$$\therefore DE = BE,$$

设 $BE = x$, 则 $DE = x$, $CE = BC - BE = 4 - x$, $BG = BE \cdot \cos B = \frac{2}{3}x$,

$$\therefore BD = 2BG = \frac{4}{3}x, \quad DG = DF = BG = \frac{2}{3}x,$$

$$\therefore AD = AB - BD = 6 - \frac{4}{3}x,$$

$\because DE$ 平分 $\angle CDB$,

$$\therefore \angle CDE = \angle BDE,$$

$$\because DE = BE,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle B,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle B,$$

$$\because \angle DCE = \angle BCD,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CBD,$$

$$\therefore \frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CD} = \frac{DE}{BD}, \quad \text{即} \frac{CD}{4} = \frac{4-x}{CD} = \frac{x}{\frac{4}{3}x},$$

$$\text{解得: } CD = 3, \quad x = \frac{7}{4},$$

$$\therefore AD = 6 - \frac{4}{3}x = 6 - \frac{4}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{11}{3},$$

故这时 AD 的长为 $\frac{11}{3}$.

