

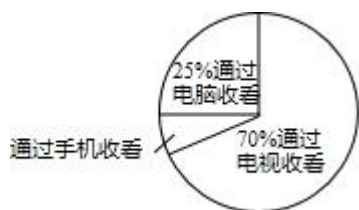
2020 年上海市黄浦区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

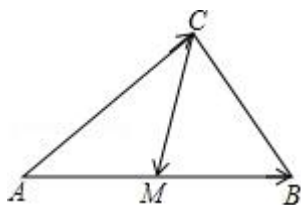
- 1.（4 分）下列正整数中，属于素数的是（ ）
A. 2 B. 4 C. 6 D. 8
- 2.（4 分）下列方程没有实数根的是（ ）
A. $x^2 = 0$ B. $x^2 + x = 0$ C. $x^2 + x + 1 = 0$ D. $x^2 + x - 1 = 0$
- 3.（4 分）一次函数 $y = -2x + 1$ 的图象不经过（ ）
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 4.（4 分）某班在统计全班 33 人的体重时，算出中位数与平均数都是 54 千克，但后来发现在计算时，将其中一名学生的体重 50 千克错写成了 5 千克，经重新计算后，正确的中位数为 a 千克，正确的平均数为 b 千克，那么（ ）
A. $a < b$ B. $a = b$ C. $a > b$ D. 无法判断
- 5.（4 分）已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的直径长 4 厘米与 8 厘米，圆心距为 2 厘米，那么这两圆的位置关系是（ ）
A. 内含 B. 内切 C. 相交 D. 外切
- 6.（4 分）在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(-3, 0)$ ， $B(2, 0)$ ， $C(-1, 2)$ ， $E(4, 2)$ ，如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EFB$ 全等，那么点 F 的坐标可以是（ ）
A. $(6, 0)$ B. $(4, 0)$ C. $(4, -2)$ D. $(4, -3)$

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

- 7.（4 分）计算： $6a^4 \div 2a^2 =$ _____.
- 8.（4 分）分解因式： $4x^2 - 1 =$ _____.
- 9.（4 分）不等式组 $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ 的整数解是_____.
- 10.（4 分）已知函数 $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$ ，那么 $f(-\sqrt{3}) =$ _____.
- 11.（4 分）某校为了解学生收看“空中课堂”的方式，对该校 500 名学生进行了调查，并把结果绘制成如图所示的扇形图，那么该校通过手机收看“空中课堂”的学生人数是_____.



12. (4分) 木盒中有一个红球与一个黄球, 这两个球除颜色外其他都相同, 从盒子里先摸出一个球, 放回摇匀后, 再摸出一个球, 两次都摸到黄球的概率是_____.
13. (4分) 如果一个矩形的一边长是某个正方形边长的 2 倍, 另一边长比该正方形边长少 1 厘米, 且矩形的面积比该正方形的面积大 8 平方厘米, 那么该正方形的边长是_____厘米.
14. (4分) 正五边形的一个内角的度数是_____.
15. (4分) 如果一个梯形的上底与下底之比等于 1: 2, 那么这个梯形的中位线把梯形分成两部分的面积之比是_____.
16. (4分) 如图, 点 M 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中点, 设 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{CM}$ 用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示为_____.



17. (4分) 已知等边 $\triangle ABC$ 的重心为 G , $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 关于点 G 成中心对称, 将它们重叠部分的面积记作 S_1 , $\triangle ABC$ 的面积记作 S_2 , 那么 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值是_____.
18. (4分) 已知 $\odot O$ 的直径 $AB = 4$, $\odot D$ 与半径为 1 的 $\odot C$ 外切, 且 $\odot C$ 与 $\odot D$ 均与直径 AB 相切、与 $\odot O$ 内切, 那么 $\odot D$ 的半径是_____.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

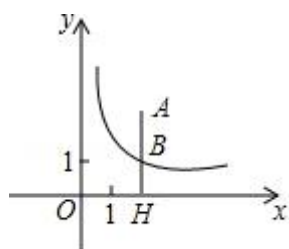
19. (10分) 计算: $\sqrt{8} + |\sqrt{2} - \sqrt{3}| - \frac{1}{\sqrt{2}-1} - 3\frac{1}{2}$.

20. (10分) 解方程组:
$$\begin{cases} x+y=3 \text{ ①} \\ x^2+3xy+y^2=5 \text{ ②} \end{cases}$$

21. (10分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 A 坐标 $(2, 3)$, 过点 A 作 $AH \perp x$ 轴, 垂足为点 H , AH 交反比例函数在第一象限的图象于点 B , 且满足 $\frac{AB}{BH} = 2$.

(1) 求该反比例函数的解析式;

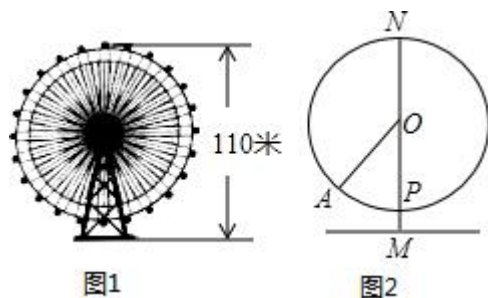
(2) 点 C 在 x 正半轴上, 点 D 在该反比例函数的图象上, 且四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 求点 D 坐标.



22. (10分) 如图 1, 有一直径为 100 米的摩天轮, 其最高点距离地面高度为 110 米, 该摩天轮匀速转动 (吊舱每分钟转过的角度相同) 一周的时间为 24 分钟.

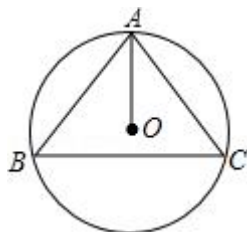
(1) 如图 2, 某游客所在吊舱从最低点 P 出发, 3 分钟后到达 A 处, 此时该游客离地面高度约为多少米? (精确到整数)

(2) 该游客在摩天轮转动一周的过程中, 有多少时间距离地面不低于 85 米? (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$)



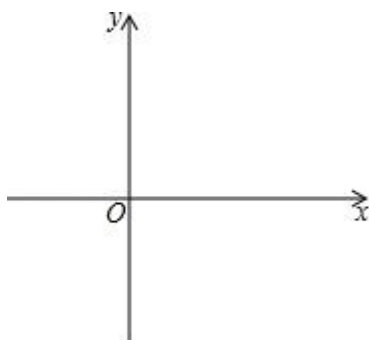
23. (12分) 已知: 如图, 圆 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AO 平分 $\angle BAC$.

- (1) 求证: $\triangle ABC$ 是等腰三角形;
- (2) 当 $OA = 4$, $AB = 6$, 求边 BC 的长.



24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-4, 0)$ 和 B

- (2, 6), 其顶点为 D .
- (1) 求此抛物线的表达式;
- (2) 求 $\triangle ABD$ 的面积;
- (3) 设 C 为该抛物线上一点, 且位于第二象限, 过点 C 作 $CH \perp x$ 轴, 垂足为点 H , 如果 $\triangle OCH$ 与 $\triangle ABD$ 相似, 求点 C 的坐标.



25. (14分) 在边长为2的菱形 $ABCD$ 中, E 是边 AD 的中点, 点 F 、 G 、 H 分别在边 AB 、 BC 、 CD 上, 且 $FG \perp EF$, $EH \perp EF$.

(1) 如图1, 当点 F 是边 AB 中点时, 求证: 四边形 $EFGH$ 是矩形;

(2) 如图2, 当 $\frac{BG}{GC} = \frac{1}{2}$ 时, 求 $\frac{FG}{EH}$ 值;

(3) 当 $\cos \angle D = \frac{5}{13}$, 且四边形 $EFGH$ 是矩形时 (点 F 不与 AB 中点重合), 求 AF 的

长.

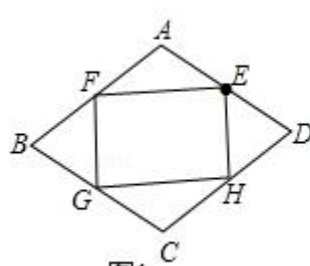


图1

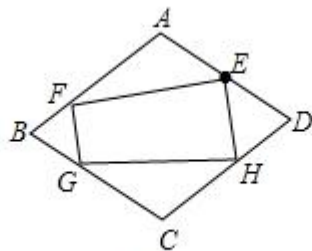
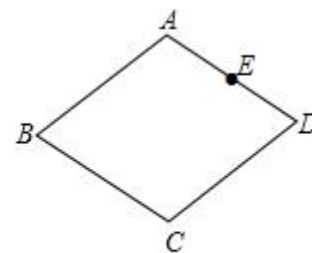


图2



备用图

2020 年上海市黄浦区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）下列正整数中，属于素数的是（ ）

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

【分析】根据素数的定义，一个大于 1 的自然数，除了 1 和它本身外，不能被其他自然数整除，换句话说就是该数除了 1 和它本身以外不再其他的因数，进而得出答案.

【解答】解：各选项中，只有 2 除了 1 和它本身外，不能被其他自然数整除，故属于素数的是 2.

故选：A.

【点评】此题主要考查了有理数，正确把握素数的定义是解题关键.

2.（4 分）下列方程没有实数根的是（ ）

- A. $x^2 = 0$ B. $x^2 + x = 0$ C. $x^2 + x + 1 = 0$ D. $x^2 + x - 1 = 0$

【分析】分别计算出每个方程判别式的值，再进一步判断即可得出答案.

【解答】解：A. 此方程判别式 $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 0 = 0$ ，故方程有两个相等的实数根；

B. 此方程判别式 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 0 = 1 > 0$ ，故方程有两个不相等的实数根；

C. 此方程判别式 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ ，故方程没有实数根；

D. 此方程判别式 $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ ，故方程有两个不相等的实数根；

故选：C.

【点评】本题主要考查根的判别式，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：

①当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；

②当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；

③当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

3.（4 分）一次函数 $y = -2x + 1$ 的图象不经过（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【分析】先根据一次函数 $y = -2x + 1$ 中 $k = -2$ ， $b = 1$ 判断出函数图象经过的象限，进而

可得出结论.

【解答】解： $\because$ 一次函数 $y = -2x + 1$ 中 $k = -2 < 0$, $b = 1 > 0$,

$\therefore$ 此函数的图象经过一、二、四象限, 不经过第三象限.

故选: C.

【点评】本题考查的是一次函数的性质, 即一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 中, 当 $k < 0$, $b > 0$ 时, 函数图象经过一、二、四象限.

4. (4分) 某班在统计全班 33 人的体重时, 算出中位数与平均数都是 54 千克, 但后来发现在计算时, 将其中一名学生的体重 50 千克错写成了 5 千克, 经重新计算后, 正确的中位数为 a 千克, 正确的平均数为 b 千克, 那么 ()

A. $a < b$ B. $a = b$ C. $a > b$ D. 无法判断

【分析】根据中位数和平均数的定义分别判断出 a 、 b 与 54 的大小关系, 据此可得答案.

【解答】解: 原数据中 5 在中位数 54 的左边, 新数据中 $50 < 54$,

所以中位数 $a = 54$,

新数据比原数据增加了 45, 而数据的个数没有变化,

所以平均数 $b > 54$,

则 $b > a$,

故选: A.

【点评】此题考查了中位数和平均数, 将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (最中间两个数的平均数), 叫做这组数据的中位数; 平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数.

5. (4分) 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的直径长 4 厘米与 8 厘米, 圆心距为 2 厘米, 那么这两圆的位置关系是 ()

A. 内含 B. 内切 C. 相交 D. 外切

【分析】根据圆与圆的位置关系即可求出答案.

【解答】解: 由题意可知: $r_1 = 2$, $r_2 = 4$,

圆心距 $d = 2$,

$\therefore d = r_2 - r_1$,

$\therefore$ 两圆相内切,

故选: B.

【点评】本题考查圆与圆的位置关系, 解题的关键是正确运用圆心距与两圆半径的数量

关系来判断，本题属于基础题型.

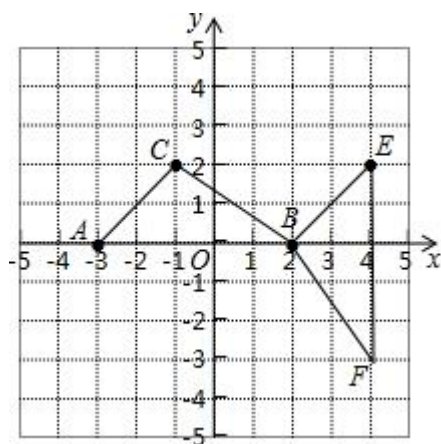
6. (4分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(-3, 0)$, $B(2, 0)$, $C(-1, 2)$, $E(4, 2)$, 如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EFB$ 全等, 那么点 F 的坐标可以是 ()

A. $(6, 0)$ B. $(4, 0)$ C. $(4, -2)$ D. $(4, -3)$

【分析】直接利用全等三角形的性质以及坐标与图形的性质得出符合题意的答案.

【解答】解: 如图所示: $\triangle ABC$ 与 $\triangle EFB$ 全等, 点 F 的坐标可以是: $(4, -3)$.

故选: D.



【点评】此题主要考查了全等三角形的性质以及坐标与图形的性质, 正确掌握全等图形的性质是解题关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4分) 计算: $6a^4 \div 2a^2 = \underline{3a^2}$.

【分析】直接利用整式的除法运算法则计算得出答案.

【解答】解: $6a^4 \div 2a^2 = 3a^2$.

故答案为: $3a^2$.

【点评】此题主要考查了整式的除法运算, 正确掌握相关运算法则是解题关键.

8. (4分) 分解因式: $4x^2 - 1 = \underline{(2x+1)(2x-1)}$.

【分析】直接利用平方差公式分解因式即可. 平方差公式: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

【解答】解: $4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1)$.

故答案为: $(2x+1)(2x-1)$.

【点评】本题主要考查平方差公式分解因式, 熟记公式结构是解题的关键.

9. (4分) 不等式组 $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ 的整数解是 $\underline{x=1}$.

【分析】首先解不等式组中的每个不等式，两个不等式组的解集的公共部分就是不等式组的解集，进一步得到不等式组的整数解.

【解答】解：
$$\begin{cases} 2x-1>0① \\ x-2<0② \end{cases},$$

解①得 $x>\frac{1}{2}$,

解②得 $x<2$.

综上可得 $\frac{1}{2}<x<2$,

$\because x$ 为整数,

$\therefore x=1$.

故答案为: $x=1$.

【点评】此题考查的是一元一次不等式组的解，根据 x 的取值范围，得出 x 的整数解. 求不等式组的解集，应遵循以下原则：同大取较大，同小取较小，小大大小中间找，大大小小解不了.

10. (4分) 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$, 那么 $f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$.

【分析】把 $x=3$ 代入函数关系式，计算求值即可.

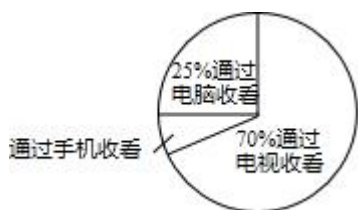
【解答】解：当 $x=-\sqrt{3}$ 时，

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{2}{(-\sqrt{3})^2+1} = \frac{2}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查了求函数值. 题目比较简单，已知函数解析式时，求函数值就是求代数式的值.

11. (4分) 某校为了解学生收看“空中课堂”的方式，对该校 500 名学生进行了调查，并把结果绘制成如图所示的扇形图，那么该校通过手机收看“空中课堂”的学生人数是 25 人.



【分析】先根据三部分对应的百分比之和为 1 求出通过手机收看“空中课堂”的学生人

数所占百分比，再乘以总人数即可得．

【解答】解： $\because$ 该校通过手机收看“空中课堂”的学生人数所占百分比为 $1 - (25\% + 70\%) = 5\%$ ，

$\therefore$ 该校通过手机收看“空中课堂”的学生人数是 $500 \times 5\% = 25$ （人），

故答案为：25 人．

【点评】本题主要考查扇形统计图，扇形统计图是用整个圆表示总数用圆内各个扇形的大小表示各部分数量占总数的百分数．通过扇形统计图可以很清楚地表示出各部分数量同总数之间的关系．用整个圆的面积表示总数（单位 1），用圆的扇形面积表示各部分占总数的百分数．

- 12.（4 分）木盒中有一个红球与一个黄球，这两个球除颜色外其他都相同，从盒子里先摸出一个球，放回摇匀后，再摸出一个球，两次都摸到黄球的概率是 $\frac{1}{4}$ ．

【分析】根据题意画出树状图，据此列出所有等可能结果，再根据概率公式求解可得．

【解答】解：画树状图如下：



由树状图知，共有 4 种等可能结果，其中两次都摸到黄球的只有 1 种情况，

所以两次都摸到黄球的概率为 $\frac{1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{1}{4}$ ．

【点评】此题考查的是用列表法或树状图法求概率．注意树状图与列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；注意概率 = 所求情况数与总情况数之比．

- 13.（4 分）如果一个矩形的一边长是某个正方形边长的 2 倍，另一边长比该正方形边长少 1 厘米，且矩形的面积比该正方形的面积大 8 平方厘米，那么该正方形的边长是 4 厘米．

【分析】设正方形的边长为 x 厘米，根据题意用 x 表示出矩形的两边，根据题意列出方程，解一元二次方程得到答案．

【解答】解：设正方形的边长为 x 厘米，则矩形的一边长为 $2x$ 厘米，另一边长为 $(x - 1)$ 厘米，

由题意得, $2x(x-1) - x^2 = 8$,

整理得, $x^2 - 2x - 8 = 0$,

解得, $x_1 = -2$ (舍去), $x_2 = 4$,

故答案为: 4.

【点评】 本题考查的是一元二次方程的应用, 读懂题目的意思、根据题目给出的条件找出合适的等量关系, 列出方程是解题的关键.

14. (4 分) 正五边形的一个内角的度数是 108° .

【分析】 先求出正五边形的内角和, 再根据正五边形的每个内角都相等, 进而求出其中一个内角的度数.

【解答】 解: $\because$ 正多边形的内角和公式为: $(n-2) \times 180^\circ$,

$\therefore$ 正五边形的内角和是: $(5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$,

则每个内角是: $540 \div 5 = 108^\circ$.

【点评】 本题主要考查多边形的内角和计算公式, 以及正多边形的每个内角都相等知识点.

15. (4 分) 如果一个梯形的上底与下底之比等于 1: 2, 那么这个梯形的中位线把梯形分成两部分的面积之比是 5: 7.

【分析】 设梯形的上底为 a , 用 a 表示出下底, 根据梯形中位线的概念用 a 表示出梯形中位线的长, 根据梯形的面积公式计算, 得到答案.

【解答】 解: 设梯形的上底为 a , 则下底为 $2a$,

$\therefore$ 梯形的中位线 $= \frac{a+2a}{2} = \frac{3}{2}a$,

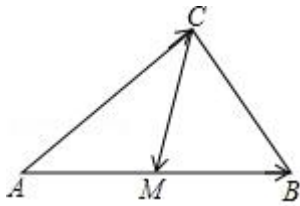
$\therefore$ 梯形的中位线把梯形分成的两个梯形的高 h 是相等的,

$\therefore$ 这个梯形的中位线把梯形分成两部分的面积之比 $= \frac{\frac{1}{2} \times (a + \frac{3}{2}a) \times h}{\frac{1}{2} \times (\frac{3}{2}a + 2a) \times h} = \frac{5}{7}$,

故答案为: 5: 7.

【点评】 本题考查的是梯形的中位线, 掌握梯形中位线的概念、梯形的面积公式是解题的关键.

16. (4 分) 如图, 点 M 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中点, 设 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{CM}$ 用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示为 $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.



【分析】利用三角形法则可知： $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$ ，只要求出 $\overrightarrow{AM}$ 即可解决问题.

【解答】解： $\because M$ 是 AB 的中点，

$$\therefore AM = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM},$$

$$\therefore \overrightarrow{CM} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\text{故答案为 } -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

【点评】本题考查平面向量，三角形法则等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

17. (4分) 已知等边 $\triangle ABC$ 的重心为 G ， $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 关于点 G 成中心对称，将它们重

叠部分的面积记作 S_1 ， $\triangle ABC$ 的面积记作 S_2 ，那么 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值是 $\frac{2}{3}$

【分析】如图，根据点 G 是等边 $\triangle ABC$ 的重心，得到 AD 垂直平分 BC ， AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，根据中心对称的性质得到 $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ ， $AG = DG$ ， $EF \parallel BC$ ，推出 $\triangle AQH$ 是等边三角形，得到 $AQ = HQ = AH$ ，求得它们重叠部分为边长 $= QH$ 的正六边形，设 $AB = 3a$ ，则 $QH = a$ ，根据等边三角形的面积健康得到结论.

【解答】解：如图， $\because$ 点 G 是等边 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore AD$ 垂直平分 BC ， AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$$\therefore AG = 2GN,$$

$$\text{设 } AB = 3a, \text{ 则 } AN = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3a = \frac{3\sqrt{3}}{4}a,$$

$\therefore \triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 关于点 G 成中心对称，

$\therefore \triangle DEF \cong \triangle ABC$ ， $AG = DG$ ， $EF \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle AQH = \angle ABC = \angle AHQ = \angle ACB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AQH$ 是等边三角形，

$$\therefore AQ = HQ = AH = \frac{1}{3}AB = a,$$

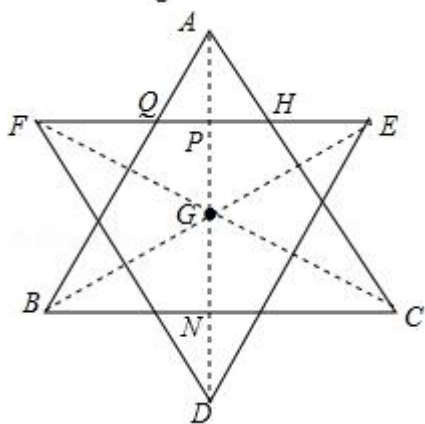
$$\therefore AP = \frac{\sqrt{3}}{4}a,$$

$\therefore$ 它们重叠部分为边长 = QH 的正六边形,

$$\therefore S_1 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (3a)^2,$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} \times 9a^2} = \frac{2}{3},$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.



【点评】 本题考查了三角形的重心，等边三角形的性质，中心对称，等边三角形的面积的计算，正确的作出图形是解题的关键.

18. (4分) 已知 $\odot O$ 的直径 $AB = 4$, $\odot D$ 与半径为1的 $\odot C$ 外切, 且 $\odot C$ 与 $\odot D$ 均与直径 AB 相切、与 $\odot O$ 内切, 那么 $\odot D$ 的半径是 $\frac{1}{2}$ 或 1 .

【分析】 分 $\odot D$ 与 $\odot C$ 在直径 AB 的同侧、 $\odot D$ 与 $\odot C$ 在直径 AB 的两侧两种情况, 根据圆心距与两圆半径的数量关系、勾股定理列方程计算, 得到答案.

【解答】 解: 当 $\odot D$ 与 $\odot C$ 在直径 AB 的同侧时, 作 $DH \perp OC$ 于 H , $DN \perp OB$ 于 N , 连接 CD , 连接 OD 并延长交 $\odot O$ 于 G ,

设 $\odot D$ 的半径为 r , 则 $OD = 2 - r$, $CD = 1 + r$,

$\because \odot O$ 的直径 $AB = 4$, $\odot C$ 的半径为1, $\odot C$ 与 $\odot O$ 内切,

$\therefore \odot C$ 与 $\odot O$ 内切于点 O ,

$\therefore CO \perp AB$,

$\because CO \perp AB$, $DH \perp OC$, $DN \perp OB$,

$\therefore$ 四边形 $HOND$ 为矩形,

$$\therefore OH = DN = r, DH = ON = \sqrt{(2-r)^2 - r^2},$$

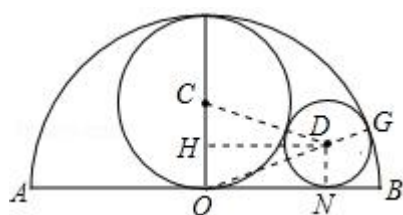
$$\therefore CH = 1 - r,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDH$ 中, $CH^2 + DH^2 = CD^2$, 即 $(1-r)^2 + (2-r)^2 - r^2 = (1+r)^2$,

$$\text{解得, } r = \frac{1}{2},$$

当 $\odot D$ 与 $\odot C$ 在直径 AB 的两侧时, $\odot C$ 与 $\odot D$ 的半径相等, 都是 1,

故答案为: $\frac{1}{2}$ 或 1.



【点评】 本题考查圆与圆的位置关系, 解题的关键是正确运用圆心距与两圆半径的数量关系来判断.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $\sqrt{8} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} - 3\frac{1}{2}$.

【分析】 直接利用二次根式的性质以及分数指数幂的性质分别化简得出答案.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= 2\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - (\sqrt{2} + 1) - \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 - \sqrt{3} \\ &= -1. \end{aligned}$$

【点评】 此题主要考查了分数指数幂的性质以及二次根式的性质, 正确化简各数是解题关键.

20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} x+y=3 \text{ ①} \\ x^2+3xy+y^2=5 \text{ ②} \end{cases}$$

【分析】 由①得: $y = 3 - x$, 代入②并整理得: $x^2 - 3x - 4 = 0$, 解这个一元二次方程并代入求值即可.

$$\text{【解答】解: 由①得: } y = 3 - x \cdots \text{③,}$$

$$\text{把③代入②得: } x^2 + 3x(3-x) + (3-x)^2 = 5,$$

$$\text{整理得: } x^2 - 3x - 4 = 0,$$

$$\text{解这个方程得, } x_1 = 4, x_2 = -1,$$

把 x 的值分别代入③，得 $y_1 = -1$ ， $y_2 = 4$ 。

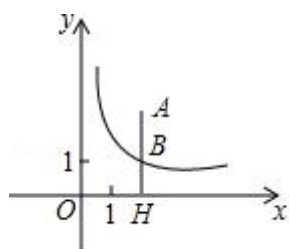
$$\therefore \text{原方程组的解为} \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 4 \end{cases}.$$

【点评】考查了高次方程组，解答此类题目一般用代入法比较简单，先消去一个未知数再解关于另一个未知数的一元二次方程，把求得结果代入一个较简单的方程中即可。

21. (10分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A 坐标 $(2, 3)$ ，过点 A 作 $AH \perp x$ 轴，垂足为点 H ， AH 交反比例函数在第一象限的图象于点 B ，且满足 $\frac{AB}{BH} = 2$ 。

(1) 求该反比例函数的解析式；

(2) 点 C 在 x 正半轴上，点 D 在该反比例函数的图象上，且四边形 $ABCD$ 是平行四边形，求点 D 坐标。



【分析】(1) 先求出点 B 坐标，利用待定系数法可求反比例函数解析式；

(2) 利用平行四边形的性质可得 $AB \parallel CD$ ， $AB = CD = 2$ ，可求点 D 坐标。

【解答】解： $\because$ 点 A 坐标 $(2, 3)$ ，

$$\therefore AH = 3,$$

$$\therefore \frac{AB}{BH} = 2,$$

$$\therefore BH = 1, AB = 2,$$

$$\therefore \text{点 } B(2, 1),$$

设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)，

$\because$ 点 B 在反比例函数的图象上，

$$\therefore k = 2 \times 1 = 2,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{2}{x};$$

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD, AB = CD = 2,$$

$\because AB \perp x$ 轴，

$\therefore CD \perp x$ 轴,

$\therefore$ 点 D 纵坐标 2,

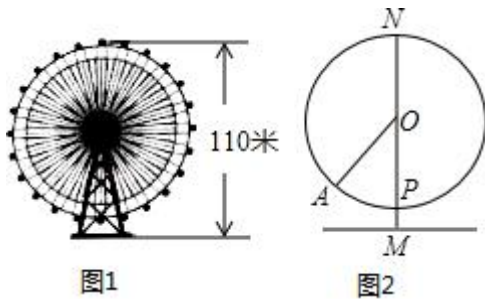
$\therefore$ 点 D 坐标 $(1, 2)$.

【点评】 本题是反比例函数综合题, 考查了反比例函数的性质, 平行四边形的性质, 熟练运用这些性质进行推理是本题的关键.

22. (10 分) 如图 1, 有一直径为 100 米的摩天轮, 其最高点距离地面高度为 110 米, 该摩天轮匀速转动 (吊舱每分钟转过的角度相同) 一周的时间为 24 分钟.

(1) 如图 2, 某游客所在吊舱从最低点 P 出发, 3 分钟后到达 A 处, 此时该游客离地面高度约为多少米? (精确到整数)

(2) 该游客在摩天轮转动一周的过程中, 有多少时间距离地面不低于 85 米? (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$)



【分析】 (1) 作 $AH \perp MN$ 于 H , 求出吊舱每分钟转过的角度, 得到 $\angle AOH$, 根据余弦的定义计算, 得到答案;

(2) 求出 OE 的长度, 根据正弦的定义求出 $\angle OCE = 30^\circ$, 得到 $\angle COD = 120^\circ$, 根据题意计算即可.

【解答】 解: (1) 如图 2, 作 $AH \perp MN$ 于 H ,

$$\text{吊舱每分钟转过的角度} = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ,$$

$\therefore$ 3 分钟转过的角度为 45° ,

$$\text{在 Rt}\triangle OAH \text{ 中, } OH = OA \cdot \cos \angle AOH = 50 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 25\sqrt{2},$$

$$\therefore HM = 60 - 25\sqrt{2} \approx 25,$$

答: 该游客离地面高度约为 25 米;

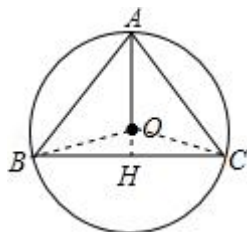
(2) 如图 2, 线段 CD 距离地面 85 米,

$$\text{则 } OE = 85 - 60 = 25,$$

在 $\text{Rt}\triangle OEC$ 中, $\angle OEC = 90^\circ$, $OE = 25$, $OC = 50$,

$$\therefore AB = AC$$

即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形；



(2) 延长 AO 交 BC 于点 H ,

$\because AH$ 平分 $\angle BAC$, $AB = AC$,

$\therefore AH \perp BC$, $BH = CH$,

设 $OH = b$, $BH = CH = a$,

$\because BH^2 + OH^2 = OB^2$, $BH^2 + AH^2 = AB^2$, $OA = 4$, $AB = 6$,

$$\therefore \begin{cases} a^2 + b^2 = 16 \\ a^2 + (b+4)^2 = 36 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} a = \frac{3\sqrt{7}}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore BC = 2a = 3\sqrt{7}.$$

【点评】 本题是圆的一个综合题，主要考查了圆的性质，等腰三角形的性质，全等三角形的性质与判定，角平分线的性质，第(1)关键在证明三角形全等；第(2)题关键由勾股定理列出方程组.

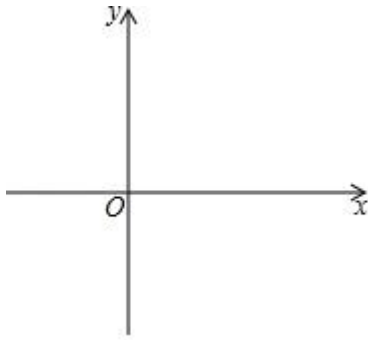
24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-4, 0)$ 和 B

$(2, 6)$ ，其顶点为 D .

(1) 求此抛物线的表达式；

(2) 求 $\triangle ABD$ 的面积；

(3) 设 C 为该抛物线上一点，且位于第二象限，过点 C 作 $CH \perp x$ 轴，垂足为点 H ，如果 $\triangle OCH$ 与 $\triangle ABD$ 相似，求点 C 的坐标.



【分析】(1) 将点 A 、 B 的坐标代入抛物线表达式，即可求解；

(2) $BD^2 = AB^2 + AD^2$ ，则 $\triangle ABD$ 为直角三角形， $\triangle ABD$ 的面积 $= \frac{1}{2} AB \times AD$ ，即可求解；

(3) $\triangle OCH$ 与 $\triangle ABD$ 相似， $\tan \angle COH = \tan \angle ABD$ 或 $\tan \angle ADB$ ，即 $\tan \angle COH = \frac{CH}{OH} =$

$$\frac{\frac{1}{2}m^2 + 2m}{-m} = \frac{1}{3} \text{ 或 } 3, \text{ 即可求解.}$$

【解答】解：(1) 将点 A 、 B 的坐标代入抛物线表达式得：
$$\begin{cases} \frac{1}{2} \times 16 - 4b + c = 0 \\ \frac{1}{2} \times 4 + 2b + c = 6 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b = 2 \\ c = 0 \end{cases},$$

故抛物线的表达式为： $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ ；

(2) 对于 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ ，顶点 $D(-2, -2)$ ，

$$\text{则 } AD = \sqrt{(-4+2)^2 + (0+2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

同理 $AB = 6\sqrt{2}$ ， $BD = 4\sqrt{5}$ ，

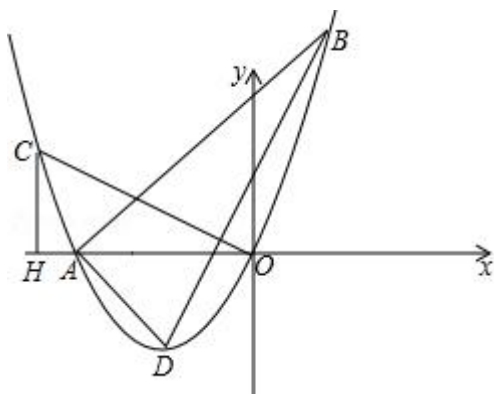
故 $BD^2 = AB^2 + AD^2$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 为直角三角形，

$$\therefore \triangle ABD \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AB \times AD = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 12;$$

(3) 在 $\triangle ABD$ 中， $\tan \angle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore \triangle OCH$ 与 $\triangle ABD$ 相似，



$\therefore \tan \angle COH = \tan \angle ABD$ 或 $\tan \angle ADB$,

即 $\tan \angle COH = \frac{1}{3}$ 或 3 ,

设点 $C(m, \frac{1}{2}m^2 + 2m)$, 则 $\tan \angle COH = \frac{CH}{OH} = \frac{\frac{1}{2}m^2 + 2m}{-m} = \frac{1}{3}$ 或 3 ,

解得: $m = -10$ 或 $-\frac{14}{3}$ (不合题意的值已舍去),

故点 H 的坐标为 $(-10, 30)$ 或 $(-\frac{14}{3}, \frac{14}{9})$.

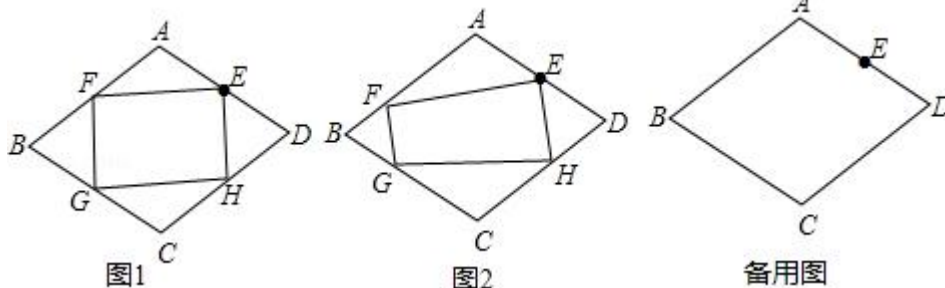
【点评】 本题考查的是二次函数综合运用, 涉及到一次函数的性质、解直角三角形、三角形相似等, 综合性比较强, 难度适中.

25. (14分) 在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中, E 是边 AD 的中点, 点 F 、 G 、 H 分别在边 AB 、 BC 、 CD 上, 且 $FG \perp EF$, $EH \perp EF$.

(1) 如图 1, 当点 F 是边 AB 中点时, 求证: 四边形 $EFGH$ 是矩形;

(2) 如图 2, 当 $\frac{BG}{GC} = \frac{1}{2}$ 时, 求 $\frac{FG}{EH}$ 值;

(3) 当 $\cos \angle D = \frac{5}{13}$, 且四边形 $EFGH$ 是矩形时 (点 F 不与 AB 中点重合), 求 AF 的



长.

【分析】 (1) 连接 AC 、 BD , 由菱形的性质及三角形的中位线定理证得 $GF \parallel EH$, $GF = EH$, 从而可知四边形 $EFGH$ 是平行四边形, 再由有一个角为直角的平行四边形是矩形得出结论;

(2) 连接 EG ，由菱形的性质及 $FG \parallel EH$ 可得 $\angle BGF = \angle DEH$ ，及 $\angle B = \angle D$ ，从而判定 $\triangle BGF \sim \triangle DEH$ ，结合 $\frac{BG}{GC} = \frac{1}{2}$ 及菱形的性质可得答案；

(3) 如图，过点 G 作 $GM \perp AB$ 于点 M ，过点 E 作 $EN \perp BA$ 延长线于点 N ，根据 $\cos \angle D = \frac{5}{13}$ 及菱形的边长可求得 $BM = AN = \frac{5}{13}$ ， $MG = NE = \frac{12}{13}$ 。设 $AF = x$ ，则 $MF = \frac{21}{13} - x$ ，当四边形 $EFGH$ 是矩形时， $\angle GFE = 90^\circ$ ，则 $\triangle GMF$ 与 $\triangle FNE$ 相似（三垂直模型），分两种情况列式计算即可：① $\triangle GMF \sim \triangle FNE$ ，② $\triangle GMF \sim \triangle ENF$ 。

【解答】解：(1) 连接 AC 、 BD ，

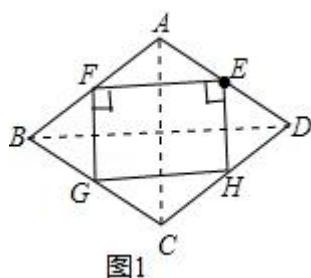


图1

$\because$ 菱形 $ABCD$ 中， E 是边 AD 的中点，点 F 是边 AB 中点，

$$\therefore AF = AE = \frac{1}{2}AB, EF \parallel BD,$$

$$\because FG \perp EF, EH \perp EF,$$

$$\therefore GF \parallel EH \parallel AC,$$

$$\therefore GF = HE = \frac{1}{2}AC,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

$$\because FG \perp EF,$$

$$\therefore \angle EFG = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形；

(2) 连接 EG ，

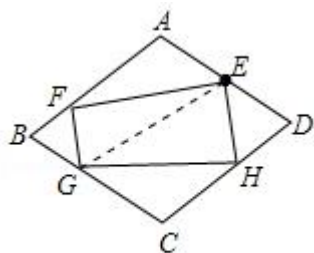


图2

$\because$ 菱形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle BGE = \angle DEG,$$

$$\because FG \parallel EH,$$

$$\therefore \angle FGE = \angle HEG,$$

$$\therefore \angle BGF = \angle DEH,$$

又 $\because$ 菱形 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle D$,

$$\therefore \triangle BGF \sim \triangle DEH,$$

$$\therefore \frac{FG}{EH} = \frac{BG}{DE}$$

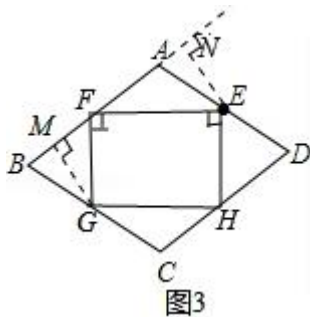
$$\therefore \frac{BG}{GC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BG = \frac{1}{3}BC,$$

$$DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \frac{FG}{EH} = \frac{BG}{DE} = \frac{2}{3};$$

(3) 如图, 过点 G 作 $GM \perp AB$ 于点 M , 过点 E 作 $EN \perp BA$ 延长线于点 N ,



$\because$ 四边形 $EFGH$ 是矩形,

$$\therefore GF = EH,$$

$\because$ 由 (2) 可知, $\triangle BGF \sim \triangle DEH$,

$\therefore$ 此时 $\triangle BGF \cong \triangle DEH$,

又 $\because$ 菱形 $ABCD$ 边长为 2,

$$\therefore BG = DE = 1,$$

$$\therefore BG = CG = 1,$$

$$\therefore \cos \angle B = \cos \angle EAN = \cos \angle D = \frac{5}{13},$$

$$\therefore BM = AN = \frac{5}{13},$$

$$\therefore MG = NE = \frac{12}{13}.$$

$$\text{设 } AF = x, \text{ 则 } MF = 2 - \frac{5}{13} - x = \frac{21}{13} - x,$$

当四边形 $EFGH$ 是矩形时, $\angle GFE = 90^\circ$, 则 $\triangle GMF$ 与 $\triangle FNE$ 相似 (三垂直模型).

①若 $\triangle GMF \sim \triangle FNE$,

$$\text{则 } \frac{MG}{NF} = \frac{MF}{EN},$$

$$\therefore \frac{\frac{12}{13}}{x + \frac{5}{13}} = \frac{\frac{21}{13} - x}{\frac{12}{13}},$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{3}{13}, x_2 = 1 \text{ (点 } F \text{ 不与 } AB \text{ 中点重合, 舍去);}$$

②若 $\triangle GMF \sim \triangle ENF$,

$$\text{则 } \frac{MF}{NF} = \frac{GM}{EN},$$

$$\therefore \frac{\frac{21}{13} - x}{x + \frac{5}{13}} = 1,$$

$$\text{解得 } x = \frac{8}{13}.$$

综上, AF 的长为 $\frac{3}{13}$ 或 $\frac{8}{13}$.

【点评】 本题属于四边形综合题, 考查了矩形的判定、菱形的性质、三角形的中位线定理及相似三角形的判定与性质等知识点, 数形结合并明确相关性质及定理是解题的关键.