

2020 年上海市静安区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1.（4 分）下列二次根式中，是最简二次根式的为（ ）

- A. $\sqrt{3a}$ B. $\sqrt{a^3}$ C. $\sqrt{27a}$ D. $\sqrt{\frac{a}{3}}$

2.（4 分）一天时间为 86400 秒，用科学记数法表示这一数字是（ ）

- A. 864×10^2 B. 86.4×10^3 C. 8.64×10^4 D. 0.864×10^5

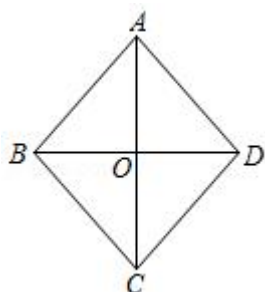
3.（4 分）如果关于 x 的方程 $x^2 + 2x + m = 0$ 有实数根，那么 m 的取值范围是（ ）

- A. $m < 1$ B. $m \leq 1$ C. $m > 1$ D. $m \geq 1$

4.（4 分）体育课上，甲同学练习双手头上前掷实心球，测得他 5 次投掷的成绩为：8，8.5，9.2，8.5，8.8（单位：米），那么这组数据的平均数、中位数分别是（ ）

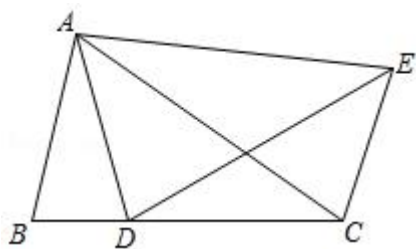
- A. 8.5，8.6 B. 8.5，8.5 C. 8.6，9.2 D. 8.6，8.5

5.（4 分）如图， $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，那么下列条件中，能判断 $\square ABCD$ 是菱形的为（ ）



- A. $AO = CO$ B. $AO = BO$ C. $\angle AOB = \angle BOC$ D. $\angle BAD = \angle ABC$

6.（4 分）如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle ADE$ ，其中点 B 、 C 分别与点 D 、 E 对应，如果 B 、 D 、 C 三点恰好在同一直线上，那么下列结论错误的是（ ）



- A. $\angle ACB = \angle AED$ B. $\angle BAD = \angle CAE$ C. $\angle ADE = \angle ACE$ D. $\angle DAC = \angle CDE$

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) [在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案]

7. (4 分) 计算: $a^{11} \div a^7 =$ _____.

8. (4 分) 因式分解: $x^2 - 9 =$ _____.

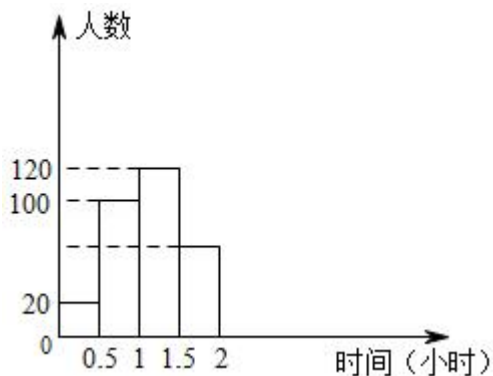
9. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} 3x+2 > x, \\ x-1 < 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

10. (4 分) 方程 $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+2} = 0$ 的根为_____.

11. (4 分) 如果反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过点 $(-5, -1)$, 那么在这个函数图象所在的每个象限内, y 的值随 x 的值增大而_____ (填“增大”或“减小”).

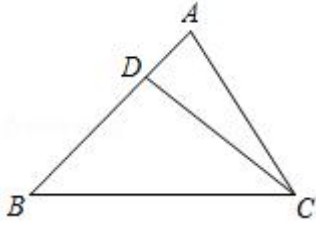
12. (4 分) 在四张完全相同的卡片上, 分别画有: 正三角形、正八边形、圆和矩形. 如果从中任意抽取 1 张卡片, 那么这张卡片上所画图形既是轴对称图形又是中心对称图形的概率是_____.

13. (4 分) 为了解某区 24000 名初中生平均每天的体锻时间, 随机调查了该区 300 名初中生. 如图是根据调查结果绘制成的频数分布直方图 (每小组数据含最小值, 不含最大值), 由此可估计该区初中生平均每天的体锻时间不少于 1.5 小时的人数大约为_____人.

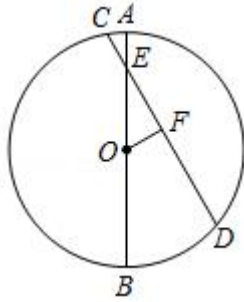


14. (4 分) 运输两批救援物资: 第一批 220 吨, 用 4 节火车皮和 5 辆货车正好装完; 第二批 158 吨, 用 3 节火车皮和 2 辆货车正好装完. 如果每节火车皮的运载量相同, 每辆货车的运载量相同, 那么一节火车皮和一辆货车共装救援物资_____吨.

15. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $AB = 4AD$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{DC}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.



16. (4分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 CD 交 AB 于点 E , $\angle CEA = 30^\circ$, $OF \perp CD$, 垂足为点 F , $DE = 5$, $OF = 1$, 那么 $CD =$ _____.



17. (4分) 已知矩形 $ABCD$, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AB = 6$, $BC = 8$, 分别以点 O 、 D 为圆心画圆, 如果 $\odot O$ 与直线 AD 相交、与直线 CD 相离, 且 $\odot D$ 与 $\odot O$ 内切, 那么 $\odot D$ 的半径长 r 的取值范围是_____.
18. (4分) 如果一条直线把一个四边形分成两部分, 这两部分图形的周长相等, 那么这条直线称为这个四边形的“等分周长线”. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle A = 90^\circ$, $DC = AD$, $\angle B$ 是锐角, $\cot B = \frac{5}{12}$, $AB = 17$. 如果点 E 在梯形的边上, CE 是梯形 $ABCD$ 的“等分周长线”, 那么 $\triangle BCE$ 的周长为_____.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分) [将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上]

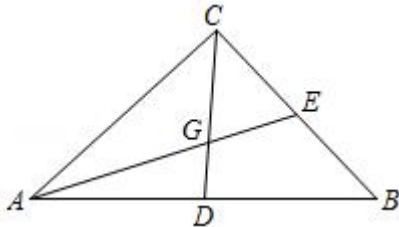
19. (10分) 计算: $(\sqrt{2}-1)^2 + (\frac{1}{2})^{-2} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} - 8^{\frac{1}{2}}$.

20. (10分) 解方程: $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} = 1$.

21. (10分) 已知: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 12$, $\cos B = \frac{2}{3}$, D 、 E 分别是 AB 、 BC 边上的中点, AE 与 CD 相交于点 G .

(1) 求 CG 的长;

(2) 求 $\tan \angle BAE$ 的值.



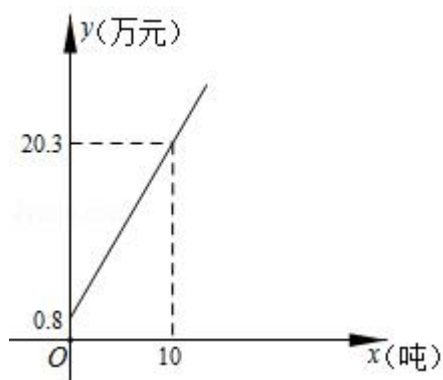
22. (10分) 疫情期间, 甲厂欲购买某种无纺布生产口罩, A 、 B 两家无纺布公司各自给出了该种无纺布的销售方案.

A 公司方案: 无纺布的价格 y (万元) 与其重量 x (吨) 是如图所示的函数关系;

B 公司方案: 无纺布不超过 30 吨时, 每吨收费 2 万元; 超过 30 吨时, 超过的部分每吨收费 1.9 万元.

(1) 求如图所示的 y 与 x 的函数解析式; (不要求写出定义域)

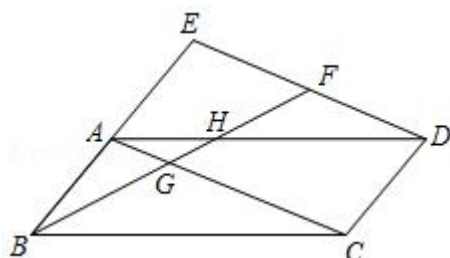
(2) 如果甲厂所需购买的无纺布是 40 吨, 试通过计算说明选择哪家公司费用较少.



23. (12分) 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 延长 BA 至点 E , 使得 $AE = AB$, 联结 DE 、 AC . 点 F 在线段 DE 上, 联结 BF , 分别交 AC 、 AD 于点 G 、 H .

(1) 求证: $BG = GF$;

(2) 如果 $AC = 2AB$, 点 F 是 DE 的中点, 求证: $AH^2 = GH \cdot BH$.



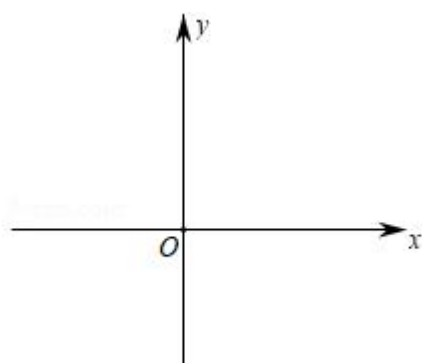
24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ (其中 b 、 c 是常数) 经过点 $A(-2, -2)$ 与点 $B(0, 4)$, 顶点为 M .

(1) 求该抛物线的表达式与点 M 的坐标;

(2) 平移这条抛物线, 得到的新抛物线与 y 轴交于点 C (点 C 在点 B 的下方), 且 $\triangle BCM$ 的面积为 3. 新抛物线的对称轴 l 经过点 A , 直线 l 与 x 轴交于点 D .

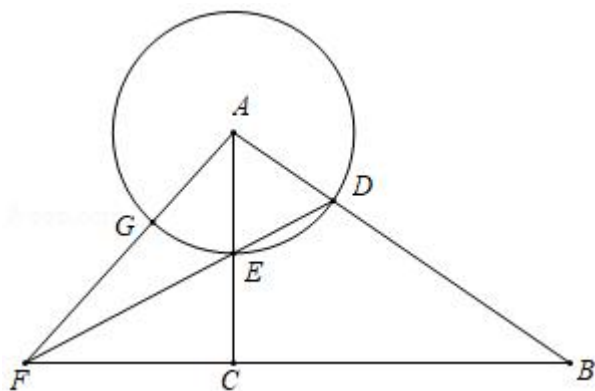
① 求点 A 随抛物线平移后的对应点坐标;

② 点 E 、 G 在新抛物线上, 且关于直线 l 对称, 如果正方形 $DEFG$ 的顶点 F 在第二象限内, 求点 F 的坐标.



25. (14 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 15$, $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$. 点 D 在边 AB 上 (不与点 A 、 B 重合), 以 AD 为半径的 $\odot A$ 与射线 AC 相交于点 E , 射线 DE 与射线 BC 相交于点 F , 射线 AF 与 $\odot A$ 交于点 G .

- (1) 如图, 设 $AD = x$, 用 x 的代数式表示 DE 的长;
- (2) 如果点 E 是 $\widehat{DG}$ 的中点, 求 $\angle DFA$ 的余切值;
- (3) 如果 $\triangle AFD$ 为直角三角形, 求 DE 的长.



2020 年上海市静安区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1.（4 分）下列二次根式中，是最简二次根式的为（ ）

- A. $\sqrt{3a}$ B. $\sqrt{a^3}$ C. $\sqrt{27a}$ D. $\sqrt{\frac{a}{3}}$

【分析】根据最简二次根式的概念进行分析即可.

【解答】解：A、 $\sqrt{3a}$ 是最简二次根式，故此选项符合题意；

B、 $\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$ ，故 $\sqrt{a^3}$ 不是最简二次根式，故此选项不符合题意；

C、 $\sqrt{27a} = 3\sqrt{3a}$ ，故 $\sqrt{27a}$ 不是最简二次根式，故此选项不符合题意；

D、 $\sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{\sqrt{3a}}{3}$ ，故 $\sqrt{\frac{a}{3}}$ 不是最简二次根式，故此选项不符合题意；

故选：A.

【点评】此题主要考查了最简二次根式，关键是掌握最简二次根式的条件：（1）被开方数的因数是整数或字母，因式是整式；（2）被开方数中不含有可化为平方数或平方式的因数或因式.

2.（4 分）一天时间为 86400 秒，用科学记数法表示这一数字是（ ）

- A. 864×10^2 B. 86.4×10^3 C. 8.64×10^4 D. 0.864×10^5

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，据此判断即可.

【解答】解：86400 = 8.64×10^4 .

故选：C.

【点评】此题主要考查了用科学记数法表示较大的数，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，确定 a 与 n 的值是解题的关键.

3.（4 分）如果关于 x 的方程 $x^2 + 2x + m = 0$ 有实数根，那么 m 的取值范围是（ ）

- A. $m < 1$ B. $m \leq 1$ C. $m > 1$ D. $m \geq 1$

【分析】由关于 x 的方程 $x^2 + 2x + m = 0$ 有实数根知 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ，据此求解可得.

【解答】解：根据题意知 $\Delta = 2^2 - 4m \geq 0$,

解得 $m \leq 1$,

故选: B .

【点评】 本题主要考查根的判别式, 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系:

- ①当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的两个实数根;
- ②当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的两个实数根;
- ③当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根.

4. (4分) 体育课上, 甲同学练习双手头上前掷实心球, 测得他 5 次投掷的成绩为: 8, 8.5, 9.2, 8.5, 8.8 (单位: 米), 那么这组数据的平均数、中位数分别是 ()
- A. 8.5, 8.6 B. 8.5, 8.5 C. 8.6, 9.2 D. 8.6, 8.5

【分析】 直接根据平均数和中位数的概念求解可得.

【解答】 解: 这组数据的平均数为 $\frac{1}{5} \times (8+8.5+9.2+8.5+8.8) = 8.6$,

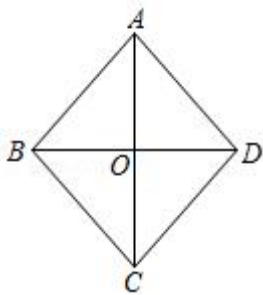
将数据重新排列为 8、8.5、8.5、8.8、9.2,

所以这组数据的中位数为 8.5,

故选: D .

【点评】 此题考查了中位数和平均数, 将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (最中间两个数的平均数), 叫做这组数据的中位数; 平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数.

5. (4分) 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 那么下列条件中, 能判断 $\square ABCD$ 是菱形的为 ()



- A. $AO = CO$ B. $AO = BO$ C. $\angle AOB = \angle BOC$ D. $\angle BAD = \angle ABC$

【分析】 在平行四边形基础上, 菱形的判定方法有: ①一组邻边相等的平行四边形是菱形; ②对角线互相垂直的平行四边形是菱形. 据此逐个选项分析即可.

【解答】 解: 选项 A , 由平行四边形的性质可知, 对角线互相平分, 故 A 不符合题意;

选项 B ，由 $\square ABCD$ 中 $AO = BO$ 可推得 $AC = BD$ ，可以证明 $\square ABCD$ 为矩形，但不能判定 $\square ABCD$ 为菱形，故 B 不符合题意；

选项 C ，当 $\angle AOB = \angle BOC$ 时，由于 $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ ，故 $\angle AOB = \angle BOC = 90^\circ$ ，而对角线互相垂直的平行四边形是菱形，故 C 符合题意；

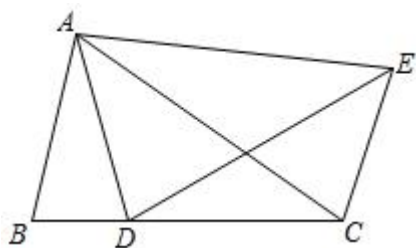
选项 D ，由平行四边形的性质可知， $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$ ，故当 $\angle BAD = \angle ABC$ 时， $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$ ，从而可判定 $\square ABCD$ 为矩形，故 D 不符合题意。

综上，只有选项 C 可以判定 $\square ABCD$ 是菱形。

故选： C 。

【点评】 本题考查了菱形的判定，熟练掌握菱形的判定方法、矩形的判定方法及平行四边形的性质等知识点是解题的关键。

6. (4分) 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle ADE$ ，其中点 B 、 C 分别与点 D 、 E 对应，如果 B 、 D 、 C 三点恰好在同一直线上，那么下列结论错误的是 ()



- A. $\angle ACB = \angle AED$ B. $\angle BAD = \angle CAE$ C. $\angle ADE = \angle ACE$ D. $\angle DAC = \angle CDE$

【分析】 利用旋转的性质直接对 A 选项进行判断；利用旋转的性质得 $\angle BAC = \angle DAE$ ，再利用三角形外角性质得 $\angle BAD = \angle CAE$ ，则可对 B 选项进行判断；利用旋转的性质得 $\angle ADE = \angle B$ ， $AB = AD$ ， $AC = AE$ ，然后根据等腰三角形顶角相等时底角相等得到 $\angle B = \angle ACE$ ，则 $\angle ADE = \angle ACE$ ，于是可对 C 选项进行判断；先判断 $\angle EDC = \angle BAD$ ，而 $\angle BAD$ 不能确定等于 $\angle DAC$ ，则可对 D 选项进行判断。

【解答】 解： $\because \triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle ADE$ ，

$\therefore \angle ACB = \angle AED$ ，所以 A 选项的结论正确；

$\angle BAC = \angle DAE$ ，

即 $\angle BAD + \angle DAC = \angle DAC + \angle CAE$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$ ，所以 B 选项的结论正确；

$\because \triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle ADE$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle B$ ， $AB = AD$ ， $AC = AE$ ，

$$\because \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACE,$$

$\therefore \angle ADE = \angle ACE$, 所以 C 选项的结论正确;

$$\because \angle ADC = \angle B + \angle BAD,$$

而 $\angle ADE = \angle B$,

$$\therefore \angle EDC = \angle BAD,$$

而 AD 不能确定平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle BAD$$
 不能确定等于 $\angle DAC$,

$\therefore \angle EDC$ 不能确定等于 $\angle DAC$, 所以 D 选项的结论错误.

故选: D .

【点评】 本题考查了旋转的性质: 对应点到旋转中心的距离相等; 对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角; 旋转前、后的图形全等.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) [在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案]

7. (4 分) 计算: $a^{11} \div a^7 = \underline{a^4}$.

【分析】 直接利用同底数幂的除法运算法则计算得出答案.

【解答】 解: $a^{11} \div a^7 = a^4$.

故答案为: a^4 .

【点评】 此题主要考查了同底数幂的除法运算, 正确掌握相关运算法则是解题关键.

8. (4 分) 因式分解: $x^2 - 9 = \underline{(x+3)(x-3)}$.

【分析】 原式利用平方差公式分解即可.

【解答】 解: 原式 $= (x+3)(x-3)$,

故答案为: $(x+3)(x-3)$.

【点评】 此题考查了因式分解 - 运用公式法, 熟练掌握平方差公式是解本题的关键.

9. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} 3x+2 > x, \\ x-1 < 0 \end{cases}$ 的解集是 $\underline{-1 < x < 1}$.

【分析】 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

【解答】 解: 解不等式 $3x+2 > x$, 得: $x > -1$,

解不等式 $x-1 < 0$, 得: $x < 1$,

则不等式组的解集为 $-1 < x < 1$,

故答案为: $-1 < x < 1$.

【点评】 本题考查的是解一元一次不等式组, 正确求出每一个不等式解集是基础, 熟知“同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

10. (4 分) 方程 $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+2} = 0$ 的根为 $x = 4$.

【分析】 利用有理数积的乘法得到 $x - 4 = 0$ 或 $x + 2 = 0$, 然后解一元一次方程后进行检验确定原方程的解.

【解答】 解: 根据题意得 $x - 4 = 0$ 或 $x + 2 = 0$,

解得 $x = 4$ 或 $x = -2$,

经检验 $x = 4$ 为原方程的解.

故答案为 $x = 4$.

【点评】 本题考查了无理方程: 解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解, 在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法. 常用的方法有: 乘方法, 配方法, 因式分解法, 设辅助元素法, 利用比例性质法等. 用乘方法 (即将方程两边各自乘同次方来消去方程中的根号) 来解无理方程, 往往会产生增根, 应注意验根.

11. (4 分) 如果反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过点 $(-5, -1)$, 那么在这个函数图象所在的每个象限内, y 的值随 x 的值增大而 减小 (填“增大”或“减小”).

【分析】 利用待定系数法求出 $k = 5$, 再根据 k 值的正负确定函数值的增减性.

【解答】 解: 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过点 $(-5, -1)$,

所以 $k = -5 \times (-1) = 5 > 0$,

所以这个函数图象所在的每个象限内, y 的值随自变量 x 值的增大而减小.

故答案为: 减小.

【点评】 本题考查了运用待定系数法求反比例函数的表达式和反比例函数的性质, 熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键.

12. (4 分) 在四张完全相同的卡片上, 分别画有: 正三角形、正八边形、圆和矩形. 如果从中任意抽取 1 张卡片, 那么这张卡片上所画图形既是轴对称图形又是中心对称图形的概率是 $\frac{3}{4}$.

【分析】 直接利用轴对称图形和中心对称图形的定义得出符合题意的图形个数, 进而得出概率.

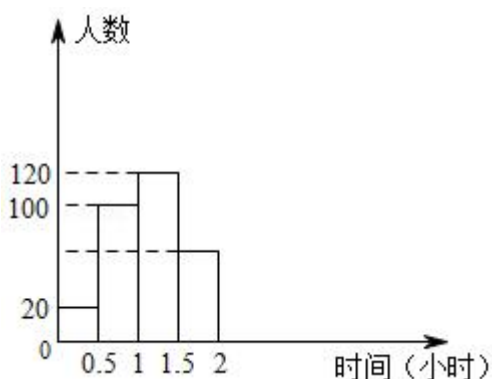
【解答】解：正三角形、正八边形、圆和矩形中既是轴对称图形又是中心对称图形是正八边形、圆和矩形．

故这张卡片上所画图形既是轴对称图形又是中心对称图形的概率是： $\frac{3}{4}$ ．

故答案为： $\frac{3}{4}$ ．

【点评】此题主要考查了概率公式，正确判断图形的对称性是解题关键．

- 13.（4分）为了解某区 24000 名初中生平均每天的体锻时间，随机调查了该区 300 名初中生．如图是根据调查结果绘制成的频数分布直方图（每小组数据含最小值，不含最大值），由此可估计该区初中生平均每天的体锻时间不少于 1.5 小时的人数大约为 4800 人．



【分析】用总人数乘以样本中每天的体锻时间不少于 1.5 小时的人数占被调查人数的比例即可得．

【解答】解：估计该区初中生平均每天的体锻时间不少于 1.5 小时的人数大约为 $24000 \times \frac{300-20-100-120}{300} = 4800$ （人），

故答案为：4800．

【点评】本题主要考查频数（率）分布直方图，解题的关键是根据频数分布直方图得出解题所需数据及利用样本估计总体思想的运用．

- 14.（4分）运输两批救援物资：第一批 220 吨，用 4 节火车皮和 5 辆货车正好装完；第二批 158 吨，用 3 节火车皮和 2 辆货车正好装完．如果每节火车皮的运载量相同，每辆货车的运载量相同，那么一节火车皮和一辆货车共装救援物资 54 吨．

【分析】设一节火车皮装救援物资 x 吨，一辆货车装救援物资 y 吨，由题意得等量关系：4 节火车皮运载量+5 辆货车运载量 = 220 吨，3 节火车皮运载量+2 辆货车运载量 = 158 吨，根据等量关系列出方程组，再解即可．

【解答】解：设一节火车皮装救援物资 x 吨，一辆货车装救援物资 y 吨，由题意得：

$$\begin{cases} 4x+5y=220 \\ 3x+2y=158 \end{cases},$$

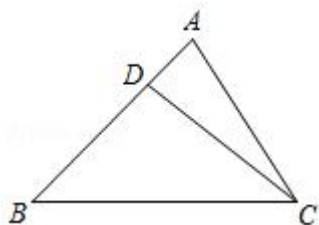
解得: $\begin{cases} x=50 \\ y=4 \end{cases},$

则一节火车皮和一辆货车共装救援物资: $50+4=54$ (吨),

故答案为: 54.

【点评】 此题主要考查了二元一次方程组的应用, 关键是正确理解题意, 找出题目中的等量关系, 设出未知数, 列出方程组.

15. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $AB=4AD$, 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{DC}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为 $-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$.



【分析】 利用三角形法则: $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$ 求解即可.

【解答】 解: $\because AB=4AD$,

$$\therefore AD = \frac{1}{4}AB,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB},$$

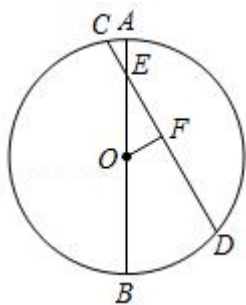
$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b},$$

故答案为: $-\frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}$.

【点评】 本题考查平面向量, 三角形法则等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

16. (4分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 CD 交 AB 于点 E , $\angle CEA=30^\circ$, $OF \perp CD$, 垂足为点 F , $DE=5$, $OF=1$, 那么 $CD=10-2\sqrt{3}$.



【分析】根据 AB 是 $\odot O$ 的直径， $OF \perp CD$ ，和垂径定理可得 $CF = DF$ ，再根据 30° 角所对直角边等于斜边一半，和勾股定理即可求出 EF 的长，进而可得 CD 的长.

【解答】解： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径， $OF \perp CD$ ，
根据垂径定理可知：

$$CF = DF,$$

$$\because \angle CEA = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OEF = 30^\circ,$$

$$\therefore OE = 2, EF = \sqrt{3},$$

$$\therefore DF = DE - EF = 5 - \sqrt{3},$$

$$\therefore CD = 2DF = 10 - 2\sqrt{3}.$$

故答案为： $10 - 2\sqrt{3}$.

【点评】 本题考查了垂径定理、勾股定理，解决本题的关键是掌握垂径定理.

17. (4分) 已知矩形 $ABCD$ ，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ，分别以点 O 、 D 为圆心画圆，如果 $\odot O$ 与直线 AD 相交、与直线 CD 相离，且 $\odot D$ 与 $\odot O$ 内切，那么 $\odot D$ 的半径长 r 的取值范围是 $8 < r < 9$.

【分析】 根据圆与圆的位置关系即可求出答案.

【解答】 解： 设 $\odot O$ 的半径为 r_1 ， $\odot D$ 半径为 r ，

由 $\odot O$ 与直线 AD 相交、与直线 CD 相离可知： $3 < r_1 < 4$ ，

由题意可知： $r > r_1$ ，否则 $\odot D$ 与 $\odot O$ 不能内切，

$$\because OD = \frac{1}{2}AC = 5,$$

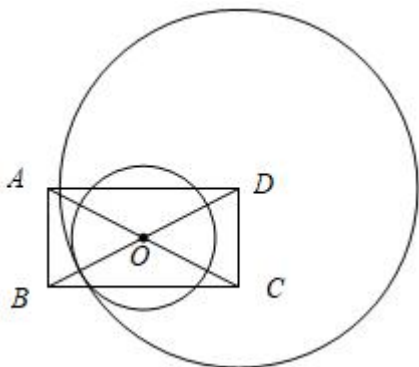
$$\therefore \text{圆心距 } d = 5,$$

$$\therefore d = r - r_1,$$

$$\therefore r = 5 + r_1,$$

$$\therefore 8 < r < 9,$$

故答案为: $8 < r < 9$.



【点评】 本题考查圆与圆的位置关系，解题的关键是正确运用圆心距与两圆的半径的数量关系，本题属于中等题型.

18. (4 分) 如果一条直线把一个四边形分成两部分，这两部分图形的周长相等，那么这条直线称为这个四边形的“等分周长线”. 在直角梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $DC = AD$ ， $\angle B$ 是锐角， $\cot B = \frac{5}{12}$ ， $AB = 17$. 如果点 E 在梯形的边上， CE 是梯形 $ABCD$ 的“等分周长线”，那么 $\triangle BCE$ 的周长为 42.

【分析】 作 $CH \perp AB$ 于 H ，设 $BH = 5a$ ，证明四边形 $ADCH$ 为矩形，得到 $AD = CH = 12a$ ，根据题意求出 a ，根据勾股定理求出 BC ，根据“等分周长线”计算，得到答案.

【解答】 解：作 $CH \perp AB$ 于 H ，

设 $BH = 5a$ ，

$$\because \cot B = \frac{5}{12},$$

$$\therefore \frac{BH}{CH} = \frac{5}{12},$$

$$\therefore CH = 12a,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle D = \angle A = 90^\circ, \text{ 又 } CH \perp AB,$$

$$\therefore \text{四边形 } ADCH \text{ 为矩形},$$

$$\therefore AD = CH = 12a, CD = AH,$$

$$\because DC = AD,$$

$$\therefore AH = CD = 12a,$$

$$\text{由题意得, } 12a + 5a = 17,$$

$$\text{解得, } a = 1,$$

$$\therefore AD = CD = AH = 12, BH = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle CHB$ 中, $BC = \sqrt{CH^2 + BH^2} = 13$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的周长 $= 12 + 12 + 17 + 13 = 54$,

$\because CE$ 是梯形 $ABCD$ 的“等分周长线”,

$\therefore$ 点 E 在 AB 上,

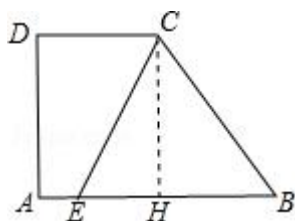
$\therefore AE = 17 + 13 - 27 = 3$,

$\therefore EH = 12 - 3 = 9$,

由勾股定理得, $EC = \sqrt{CH^2 + EH^2} = 15$,

$\therefore \triangle BCE$ 的周长 $= 14 + 13 + 15 = 42$,

故答案为: 42.



【点评】 本题考查的是直角梯形的性质、矩形的判定和性质、勾股定理, 正确理解四边形的“等分周长线”的定义是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分) [将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上]

19. (10 分) 计算: $(\sqrt{2}-1)^2 + (\frac{1}{2})^{-2} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} - 8^{\frac{1}{2}}$.

【分析】 直接利用二次根式的性质以及分数指数幂的性质分别化简得出答案.

【解答】 解: 原式 $= (3-2\sqrt{2}) + 4 + (\sqrt{2}-1) - 2\sqrt{2}$
 $= 3 - 2\sqrt{2} + 4 + \sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2}$
 $= 6 - 3\sqrt{2}$.

【点评】 此题主要考查了分数指数幂的性质以及二次根式的性质, 正确化简各数是解题关键.

20. (10 分) 解方程: $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} = 1$.

【分析】 分式方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到分式方程的解.

【解答】 解: 去分母得: $x - 1 + 2 = x^2 - 1$,

整理得： $x^2 - x - 2 = 0$,

解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 2$,

经检验： $x_1 = -1$ 是增根，舍去；

$x_2 = 2$ 是原方程的根，

$\therefore$ 原方程的根是 $x = 2$.

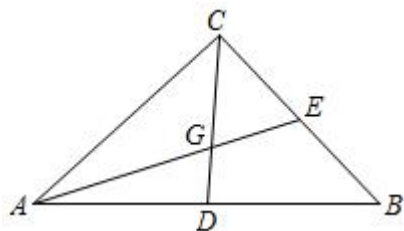
【点评】 此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验.

21. (10分) 已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 12$ ， $\cos B = \frac{2}{3}$ ， D 、 E 分别

是 AB 、 BC 边上的中点， AE 与 CD 相交于点 G .

(1) 求 CG 的长；

(2) 求 $\tan \angle BAE$ 的值.



【分析】 (1) 根据在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 12$ ， $\cos B = \frac{2}{3}$ ，可以求得 AB 的长，然后根据点 D 为 AB 的中点，可以得到 CD 的长，再根据点 G 是 $\triangle ABC$ 中线的交点，可以得到 $CG = \frac{2}{3}CD$ ，从而可以求得 CG 的长；

(2) 作 $EF \perp AB$ 于点 F ，然后根据题意，可以求得 EF 和 AF 的长，从而可以得到 $\tan \angle BAE$ 的值.

【解答】 解：(1) $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 12$ ， $\cos B = \frac{2}{3}$ ，

$$\therefore AB = \frac{BC}{\cos B} = \frac{12}{\frac{2}{3}} = 18,$$

$\because D$ 是 AB 的中点，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = 9,$$

又 $\because$ 点 E 是 BC 边上的中点，

$\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore CG = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} \times 9 = 6;$$

(2) $\because$ 点 E 是 BC 边上的中点，

$$\therefore CE=BE=\frac{1}{2}BC=6,$$

过点 E 作 $EF \perp AB$, 垂足为 F ,

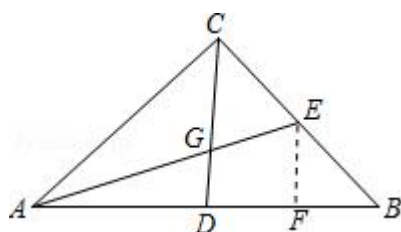
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BEF \text{ 中, } \cos B = \frac{2}{3},$$

$$BF = BE \cdot \cos B = 6 \times \frac{2}{3} = 4,$$

$$\therefore EF = \sqrt{BE^2 - BF^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore AF = AB - BF = 18 - 4 = 14,$$

$$\therefore \tan \angle BAE = \frac{EF}{AF} = \frac{2\sqrt{5}}{14} = \frac{\sqrt{5}}{7}.$$



【点评】 本题考查解直角三角形、直角三角形斜边上的中线，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答．

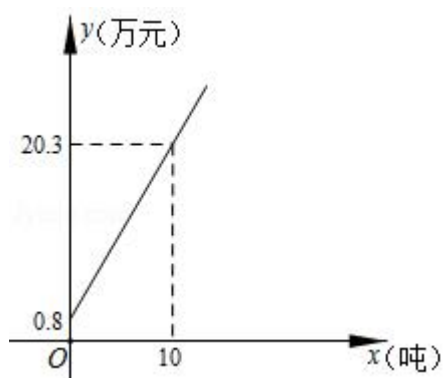
22. (10 分) 疫情期间，甲厂欲购买某种无纺布生产口罩， A 、 B 两家无纺布公司各自给出了该种无纺布的销售方案．

A 公司方案：无纺布的价格 y (万元) 与其重量 x (吨) 是如图所示的函数关系；

B 公司方案：无纺布不超过 30 吨时，每吨收费 2 万元；超过 30 吨时，超过的部分每吨收费 1.9 万元．

(1) 求如图所示的 y 与 x 的函数解析式；(不要求写出定义域)

(2) 如果甲厂所需购买的无纺布是 40 吨，试通过计算说明选择哪家公司费用较少．



【分析】 (1) 运用待定系数法解答即可；

(2) 把 $x = 40$ 代入 (1) 的结论以及公司方案, 分别求出每家公司所需的费用, 再进行比较即可.

【解答】解: (1) 设一次函数的解析式为 $y = kx + b$ (k 、 b 为常数, $k \neq 0$),

由一次函数的图象可知, 其经过点 $(0, 0.8)$ 、 $(10, 20.3)$,

$$\text{代入得} \begin{cases} 0 + b = 0.8 \\ 10k + b = 20.3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1.95 \\ b = 0.8 \end{cases},$$

$\therefore$ 这个一次函数的解析式为 $y = 1.95x + 0.8$.

(2) 如果在 A 公司购买, 所需的费用为: $y = 1.95 \times 40 + 0.8 = 78.8$ 万元;

如果在 B 公司购买, 所需的费用为: $2 \times 30 + 1.9 \times (40 - 30) = 79$ 万元;

$\therefore 78.8 < 79$,

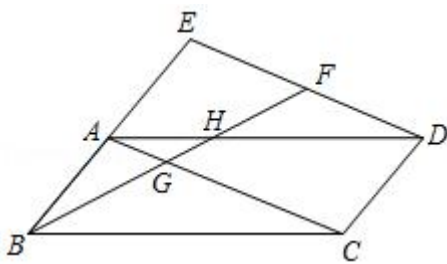
$\therefore$ 在 A 公司购买费用较少.

【点评】 本题考查了一次函数的应用, 解题的关键是熟练掌握待定系数法确定函数解析式, 属于中考常考题型.

23. (12 分) 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 延长 BA 至点 E , 使得 $AE = AB$, 联结 DE 、 AC . 点 F 在线段 DE 上, 联结 BF , 分别交 AC 、 AD 于点 G 、 H .

(1) 求证: $BG = GF$;

(2) 如果 $AC = 2AB$, 点 F 是 DE 的中点, 求证: $AH^2 = GH \cdot BH$.



【分析】(1) 由平行四边形的性质可得 $AB = CD = AE$, $AB \parallel CD$, 可证四边形 $ACDE$ 是平行四边形, 可得 $\frac{BG}{GF} = \frac{AB}{AE} = 1$, 可得结论;

(2) 由 “SAS” 可证 $\triangle BEF \cong \triangle DEA$, 可得 $\angle EBF = \angle EDA$, 通过证明 $\triangle AHG \sim \triangle BHA$, 可得结论.

【解答】证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB = CD$, $AB \parallel CD$,

$$\begin{aligned}
&\because AB = AE, \\
&\therefore AE = CD, \\
&\therefore \text{四边形 } ACDE \text{ 是平行四边形}, \\
&\therefore AC \parallel DE, \\
&\therefore \frac{BG}{GF} = \frac{AB}{AE} = 1, \\
&\therefore BG = GF; \\
(2) &\because AB = AE, \\
&\therefore BE = 2AE, \\
&\because AC = 2AB, \\
&\therefore BE = AC, \\
&\because \text{四边形 } ACDE \text{ 是平行四边形}, \\
&\therefore AC = DE, \\
&\therefore DE = BE, \\
&\because \text{点 } F \text{ 是 } DE \text{ 的中点}, \\
&\therefore DE = 2EF, \\
&\therefore AE = EF, \\
&\because DE = BE, \angle E = \angle E, AE = EF, \\
&\therefore \triangle BEF \cong \triangle DEA \text{ (SAS)}, \\
&\therefore \angle EBF = \angle EDA, \\
&\because AC \parallel DE, \\
&\therefore \angle GAH = \angle EDA. \\
&\therefore \angle EBF = \angle GAH. \\
&\because \angle AHG = \angle BHA, \\
&\therefore \triangle AHG \sim \triangle BHA, \\
&\therefore \frac{AH}{BH} = \frac{GH}{AH}. \\
&\therefore AH^2 = GH \cdot BH.
\end{aligned}$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，平行四边形的性质，灵活运用这些性质进行推理是本题的关键．

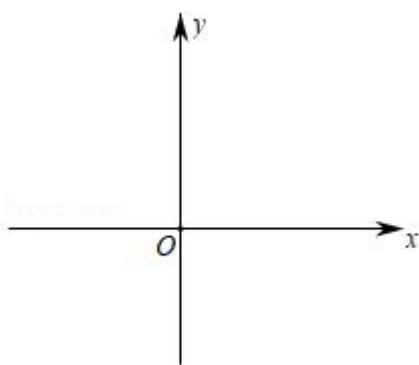
24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ (其中 b 、 c 是常数) 经过点 $A(-2, -2)$ 与点 $B(0, 4)$, 顶点为 M .

(1) 求该抛物线的表达式与点 M 的坐标;

(2) 平移这条抛物线, 得到的新抛物线与 y 轴交于点 C (点 C 在点 B 的下方), 且 $\triangle BCM$ 的面积为 3. 新抛物线的对称轴 l 经过点 A , 直线 l 与 x 轴交于点 D .

①求点 A 随抛物线平移后的对应点坐标;

②点 E 、 G 在新抛物线上, 且关于直线 l 对称, 如果正方形 $DEFG$ 的顶点 F 在第二象限内, 求点 F 的坐标.



【分析】 (1) 根据抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ (其中 b 、 c 是常数) 经过点 $A(-2, -2)$ 与点 $B(0, 4)$, 从而可以求得抛物线的解析式, 然后将解析式化为顶点式, 即可得到顶点 M 的坐标;

(2) ①根据题意, 可以求得平移后新抛物线的解析式, 从而可以得到点 A 随抛物线平移后的对应点坐标;

②根据题意和正方形的性质, 可以求得点 F 的坐标.

【解答】 解: (1) 将 $A(-2, -2)$ 、 $B(0, 4)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 中,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \times (-2)^2 - 2b + c = -2, \\ 0 + 0 + c = 4. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 2, \\ c = 4. \end{cases}$$

$\therefore$ 该抛物线的表达式为: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$;

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 6,$$

$\therefore$ 顶点 M 的坐标是: $(2, 6)$;

(2) ① $\because$ 平移后抛物线的对称轴经过点 $A(-2, -2)$,

$\therefore$ 可设平移后的抛物线表达式为: $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + k$,

$\therefore C(0, -2+k)$.

$\therefore S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2}BC \cdot 2 = \frac{1}{2}[4 - (-2+k)] \cdot 2 = 3$,

解得, $k = 3$.

$\therefore y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$,

即原抛物线向左平移 4 个单位, 向下平移 3 个单位可以得到新的抛物线.

$\therefore$ 点 A 对应点的坐标为 $(-6, -5)$;

② 设 EG 与 DF 的交点为 H . 在正方形 $DEFG$ 中, $EG \perp DF$, $EG = DF = 2EH = 2DH$.

$\because$ 点 E 、 G 是这条抛物线上的一对对称点,

$\therefore EG \parallel x$ 轴.

$\therefore DF \perp x$ 轴,

设 $F(-2, 2a)$.

$\because$ 点 F 在第二象限内,

$\therefore a > 0$.

$\therefore EG = DF = 2EH = 2DH = 2a$.

不妨设点 E 在点 G 的右侧, 那么 $E(-2+a, a)$.

将点 E 代入 $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$, 得 $-\frac{1}{2}a^2 + 3 = a$,

解得, $a_1 = \sqrt{7} - 1$, $a_2 = -\sqrt{7} - 1$ (不合题意, 舍去).

$\therefore F(-2, 2\sqrt{7} - 2)$.

【点评】 本题考查抛物线与 x 轴的交点、二次函数的性质、正方形的性质, 解答本题的关键是明确题意, 利用二次函数的性质解答.

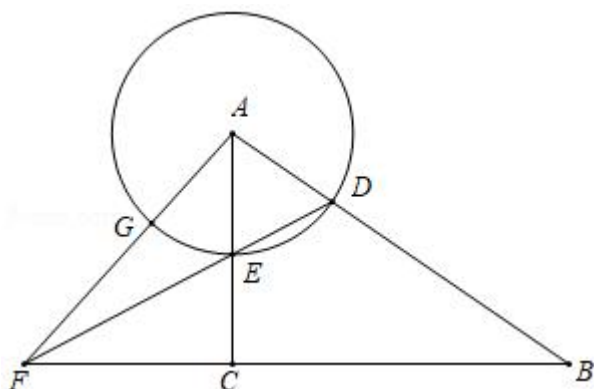
25. (14 分) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 15$, $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$. 点 D 在边 AB 上 (不

与点 A 、 B 重合), 以 AD 为半径的 $\odot A$ 与射线 AC 相交于点 E , 射线 DE 与射线 BC 相交于点 F , 射线 AF 与 $\odot A$ 交于点 G .

(1) 如图, 设 $AD = x$, 用 x 的代数式表示 DE 的长;

(2) 如果点 E 是 $\widehat{DG}$ 的中点, 求 $\angle DFA$ 的余切值;

(3) 如果 $\triangle AFD$ 为直角三角形, 求 DE 的长.

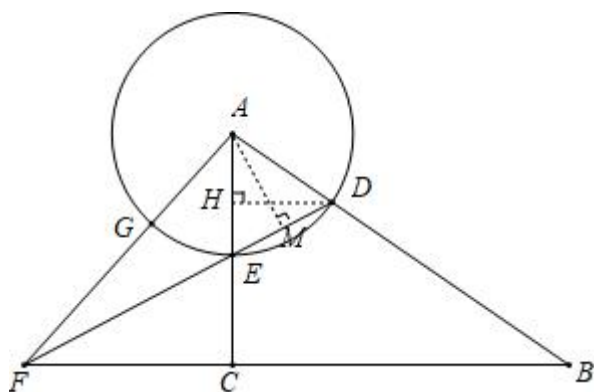


【分析】(1) 过点 D 作 $DH \perp AC$, 垂足为 H . 根据锐角三角函数和勾股定理即可用 x 的代数式表示 DE 的长;

(2) 根据题意可设 $BC = 4k$ ($k > 0$), $AB = 5k$, 则 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 3k$. 过点 A 作 $AM \perp DE$, 垂足为 M , 再根据锐角三角函数和勾股定理即可表示 $\angle DFA$ 的余切值;

(3) 分两种情况讨论: 当点 E 在 AC 上时, 只有可能 $\angle FAD = 90^\circ$; 当点 E 在 AC 的延长线上时, 只有可能 $\angle AFD = 90^\circ$, 此时 $\angle AFC = \angle AEF$. 根据锐角三角函数和勾股定理即可求 DE 的长.

【解答】解: (1) 如图,



过点 D 作 $DH \perp AC$, 垂足为 H .

在 $\text{Rt}\triangle AEH$ 中, $DH = AD \cdot \sin \angle BAC = \frac{4}{5}x$,

$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \frac{3}{5}x.$$

在 $\odot A$ 中, $AE = AD = x$,

$$\therefore EH = AE - AD = x - \frac{3}{5}x = \frac{2}{5}x.$$

$$\therefore DE = \sqrt{EH^2 + DH^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}x;$$

$$(2) \because \sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5},$$

$\therefore$ 可设 $BC = 4k$ ($k > 0$), $AB = 5k$,

$$\text{则 } AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 3k.$$

$$\because AC = 15,$$

$$\therefore 3k = 15,$$

$$\therefore k = 5.$$

$$\therefore BC = 20, AB = 25.$$

$\because$ 点 E 是 $\widehat{DG}$ 的中点, 由题意可知此时点 E 在边 AC 上, 点 F 在 BC 的延长线上,

$$\therefore \angle FAC = \angle BAC.$$

$$\because \angle FCA = \angle BCA = 90^\circ, AC = AC,$$

$$\therefore \triangle FCA \cong \triangle BCA \text{ (ASA)},$$

$$\therefore FC = BC = 20.$$

$$\because \tan \angle AED = \frac{DH}{EH} = \frac{\frac{4}{5}x}{\frac{2}{5}x} = 2,$$

又 $\because \angle AED = \angle FEC$, 且 $\angle AED$ 、 $\angle FEC$ 都为锐角,

$$\therefore \tan \angle FEC = 2.$$

$$\therefore EC = \frac{FC}{\tan \angle FEC} = \frac{20}{2} = 10.$$

$$\therefore AE = AC - EC = 20 - 10 = 10.$$

过点 A 作 $AM \perp DE$, 垂足为 M ,

$$\text{则 } EM = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times 10 = 2\sqrt{5}.$$

$$\because \sin \angle AED = \frac{DH}{ED} = \frac{\frac{4}{5}x}{\frac{2\sqrt{5}}{5}x} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AM = AE \cdot \sin \angle AED = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times 10 = 4\sqrt{5}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle EFC \text{ 中, } EF = \sqrt{EC^2 + FC^2} = 10\sqrt{5}.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AFM \text{ 中, } \cot \angle AFD = \frac{FM}{AM} = \frac{FE+EM}{AM} = \frac{10\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{11}{2}.$$

答: $\angle DFA$ 的余切值为 $\frac{11}{2}$;

(3) 当点 E 在 AC 上时, 只有可能 $\angle FAD = 90^\circ$.

$$\because FC = CE \cdot \tan \angle FEC = 2(15-x),$$

$$\therefore EF = \sqrt{EC^2 + FC^2} = \sqrt{5}(15-x).$$

$$\therefore FD = EF + ED = \sqrt{5}(15-x) + \frac{2\sqrt{5}}{5}x = 15\sqrt{5} - \frac{3\sqrt{5}}{5}x.$$

$$\therefore \cos \angle AED = \frac{EH}{DH} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

又 $\because \angle AED = \angle ADE$, 且 $\angle AED$ 、 $\angle ADE$ 都为锐角,

$$\therefore \cos \angle ADE = \cos \angle AED = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\therefore \cos \angle ADE = \frac{AD}{DF} = \frac{x}{15\sqrt{5} - \frac{3\sqrt{5}}{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\therefore AD = x = \frac{75}{8}.$$

$$\therefore DE = \frac{2\sqrt{5}}{5}x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{75}{8} = \frac{15\sqrt{5}}{4}.$$

当点 E 在 AC 的延长线上时, 只有可能 $\angle AFD = 90^\circ$, 此时 $\angle AFC = \angle AEF$.

$\because \angle AFC$ 、 $\angle AEF$ 都为锐角,

$$\therefore \tan \angle AEF = \tan \angle AFC = 2.$$

$$\because CE = AE - AC = x - 15,$$

$$\therefore CF = CE \cdot \tan \angle AEF = 2(x - 15).$$

$$\therefore \tan \angle AFC = \frac{AC}{CF} = \frac{15}{2(x-15)} = 2.$$

$$\therefore AD = x = \frac{75}{4}.$$

$$\therefore DE = \frac{2\sqrt{5}}{5}x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{75}{4} = \frac{15\sqrt{5}}{2}.$$

综上所述, $\triangle AFD$ 为直角三角形时, DE 的长为 $\frac{15\sqrt{5}}{4}$ 或 $\frac{15\sqrt{5}}{2}$.

【点评】 本题考查了圆的综合题, 解决本题的关键是掌握圆的相关知识.