

2020 年上海市青浦区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分） a （ $a \neq 0$ ）的倒数是（ ）

- A. a B. $-a$ C. $\frac{1}{a}$ D. $-\frac{1}{a}$

2.（4 分）计算 $(-2x)^2$ 的结果是（ ）

- A. $2x^2$ B. $-2x^2$ C. $4x^2$ D. $-4x^2$

3.（4 分）如果反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象在二、四象限，那么 k 的取值范围是（ ）

- A. $k > 0$ B. $k < 0$ C. $k \geq 0$ D. $k \leq 0$

4.（4 分）下列方程中，没有实数根的是（ ）

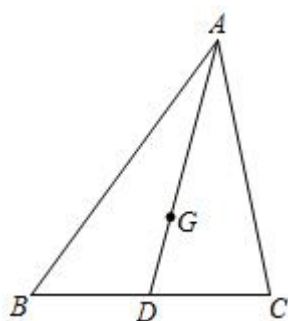
- A. $x^2 - 2x = 0$ B. $x^2 - 2x - 1 = 0$ C. $x^2 - 2x + 1 = 0$ D. $x^2 - 2x + 2 = 0$

5.（4 分）为了解某校初三 400 名学生的体重情况，从中抽取 50 名学生的体重进行分析．在这项调查中，下列说法正确的是（ ）

- A. 400 名学生中每位学生是个体
B. 400 名学生是总体
C. 被抽取的 50 名学生是总体的一个样本
D. 样本的容量是 50

6.（4 分）如图，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，联结 AG 并延长交 BC 边于点 D ．设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{GD} = \vec{b}$ ，

那么向量 $\overrightarrow{BC}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为（ ）



- A. $\overrightarrow{BC} = 3\vec{b} - 2\vec{a}$ B. $\overrightarrow{BC} = 3\vec{b} + 2\vec{a}$ C. $\overrightarrow{BC} = 6\vec{b} - 2\vec{a}$ D. $\overrightarrow{BC} = 6\vec{b} + 2\vec{a}$

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）计算： $a^3 \div a =$ _____.

8.（4 分）在实数范围内分解因式： $m^2 - 2 =$ _____.

9. (4分) 函数 $y = \sqrt{x+3}$ 的定义域是_____.
10. (4分) 不等式组 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$ 的整数解是_____.
11. (4分) 如果将直线 $y = 3x$ 平移, 使其经过点 $(0, -1)$, 那么平移后的直线表达式是_____.
12. (4分) 从 2, 3, 4, 5, 6 这五个数中任选一个数, 选出的这个数是素数的概率是_____.
13. (4分) 如果点 D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的 AB 、 AC 边的中点, 那么 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的周长之比是_____.
14. (4分) 已知点 C 在线段 AB 上, 且 $0 < AC < \frac{1}{2}AB$. 如果 $\odot C$ 经过点 A , 那么点 B 与 $\odot C$ 的位置关系是_____.
15. (4分) 随机选取 50 粒种子在适宜的温度下做发芽天数的试验, 试验的结果如表所示. 估计该作物种子发芽的天数的平均数约为_____天.
- | | | | |
|----|----|----|---|
| 天数 | 1 | 2 | 3 |
| 发芽 | 15 | 30 | 5 |
16. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 3$, $BC = 2$, 将 $\triangle ABC$ 绕着点 B 顺时针旋转, 如果点 A 落在射线 BC 上的点 A' 处. 那么 $AA' =$ _____.
17. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$. 分别以 A 、 B 为圆心画圆, 如果 $\odot A$ 经过点 C , $\odot B$ 与 $\odot A$ 相交, 那么 $\odot B$ 的半径 r 的取值范围是_____.
18. (4分) 小明学习完《相似三角形》一章后, 发现了一个有趣的结论: 在两个不相似的直角三角形中, 分别存在经过直角顶点的一条直线, 把直角三角形分成两个小三角形后, 如果第一个直角三角形分割出来的一个小三角形与第二个直角三角形分割出来的一个小三角形相似, 那么分割出来的另外两个小三角形也相似. 他把这样的两条直线称为这两个直角三角形的相似分割线.
- 如图 1、图 2, 直线 CG 、 DH 分别是两个不相似的 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 的相似分割线, CG 、 DH 分别与斜边 AB 、 EF 交于点 G 、 H , 如果 $\triangle BCG$ 与 $\triangle DFH$ 相似, $AC = 3$, $AB = 5$, $DE = 4$, $DF = 8$, 那么 $AG =$ _____.

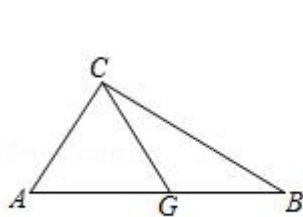


图1

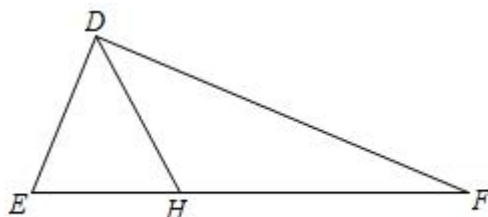


图2

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

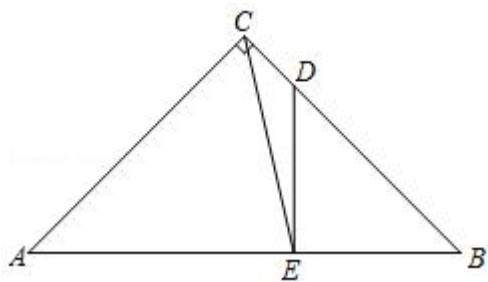
19.（10 分）计算： $|\sqrt{3}-1| - 8^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + (\frac{1}{2})^{-2}$.

20.（10 分）解方程： $\frac{4x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = 1 - \frac{1}{x+2}$.

21.（10 分）如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4$ ，点 D 在边 BC 上，且 $BD = 3CD$ ， $DE \perp AB$ ，垂足为点 E ，联结 CE 。

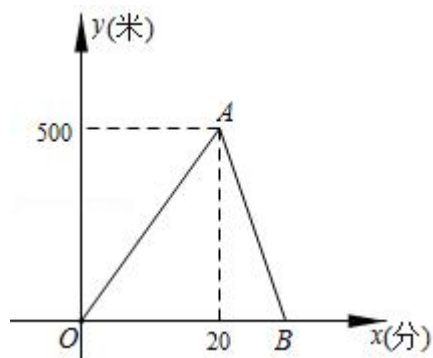
（1）求线段 AE 的长；

（2）求 $\angle ACE$ 的余切值。



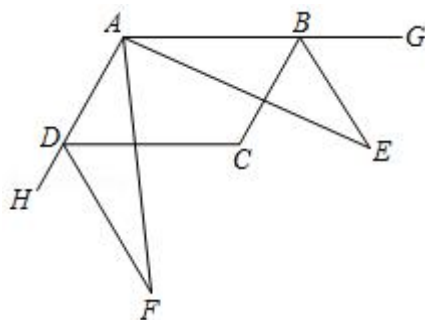
22. (10分) 某湖边健身步道全长 1500 米, 甲、乙两人同时从同一起点匀速向终点步行. 甲先到达终点后立刻返回, 在整个步行过程中, 甲、乙两人间的距离 y (米) 与出发的时间 x (分) 之间的关系如图中 $OA-AB$ 折线所示.

- (1) 用文字语言描述点 A 的实际意义;
- (2) 求甲、乙两人的速度及两人相遇时 x 的值.



23. (12分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, BE 、 DF 分别是平行四边形的两个外角的平分线, $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$, 边 AE 、 AF 分别交两条角平分线于点 E 、 F .

- (1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle FDA$;
- (2) 联结 BD 、 EF , 如果 $DF^2 = AD \cdot AB$, 求证: $BD = EF$.

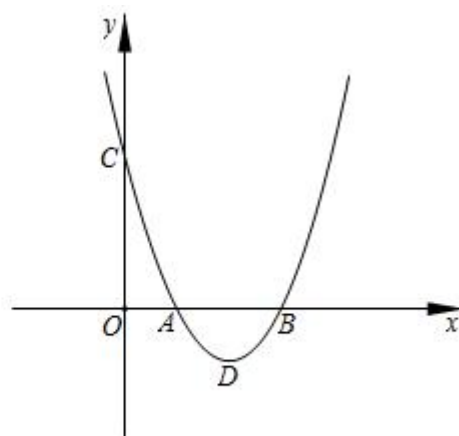
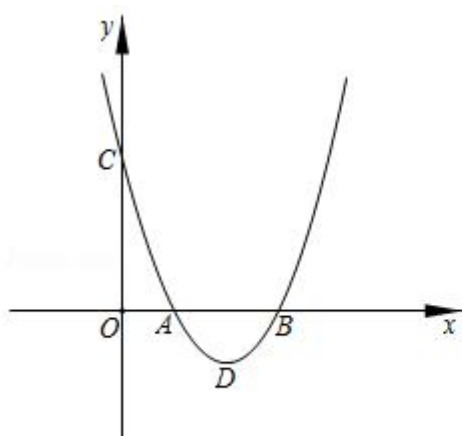


24. (12分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 二次函数 $y = ax^2 - 4ax + 3$ 的图象与 x 轴正半轴交于点 A 、 B , 与 y 轴相交于点 C , 顶点为 D , 且 $\tan \angle CAO = 3$.

(1) 求这个二次函数的解析式;

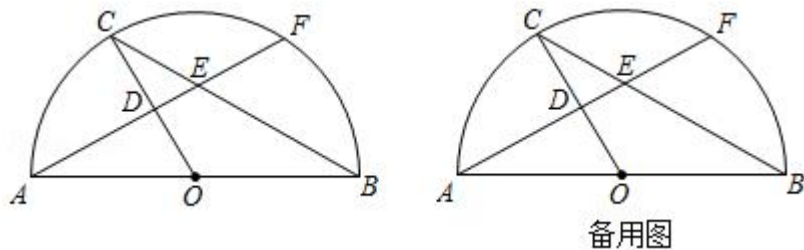
(2) 点 P 是对称轴右侧抛物线上的点, 联结 CP , 交对称轴于点 F , 当 $S_{\triangle CDF} : S_{\triangle FDP} = 2 : 3$ 时, 求点 P 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 将 $\triangle PCD$ 沿直线 MN 翻折, 当点 P 恰好与点 O 重合时, 折痕 MN 交 x 轴于点 M , 交 y 轴于点 N , 求 $\frac{OM}{ON}$ 的值.



备用图

25. (14分) 如图, 已知 AB 是半圆 O 的直径, $AB=6$, 点 C 在半圆 O 上. 过点 A 作 $AD \perp OC$, 垂足为点 D , AD 的延长线与弦 BC 交于点 E , 与半圆 O 交于点 F (点 F 不与点 B 重合).



- (1) 当点 F 为 $\widehat{BC}$ 的中点时, 求弦 BC 的长;
- (2) 设 $OD=x$, $\frac{DE}{AE}=y$, 求 y 与 x 的函数关系式;
- (3) 当 $\triangle AOD$ 与 $\triangle CDE$ 相似时, 求线段 OD 的长.

2020 年上海市青浦区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. (4 分) a ($a \neq 0$) 的倒数是 ()

- A. a B. $-a$ C. $\frac{1}{a}$ D. $-\frac{1}{a}$

【分析】一般地, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ($a \neq 0$), 就说 a ($a \neq 0$) 的倒数是 $\frac{1}{a}$. 据此即可得出答案.

【解答】解: a ($a \neq 0$) 的倒数是 $\frac{1}{a}$,

故选: C.

【点评】本题考查倒数, 解题的关键是掌握倒数的概念: 一般地, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ($a \neq 0$), 就说 a ($a \neq 0$) 的倒数是 $\frac{1}{a}$.

2. (4 分) 计算 $(-2x)^2$ 的结果是 ()

- A. $2x^2$ B. $-2x^2$ C. $4x^2$ D. $-4x^2$

【分析】根据积的乘方法则计算即可.

【解答】解: $(-2x)^2 = 4x^2$.

故选: C.

【点评】主要考查了积的乘方. 要掌握其性质: 积的乘方, 等于把积中的每一个因式分别乘方, 再把所得的幂相乘.

3. (4 分) 如果反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象在二、四象限, 那么 k 的取值范围是 ()

- A. $k > 0$ B. $k < 0$ C. $k \geq 0$ D. $k \leq 0$

【分析】根据反比例函数图象的性质: 当 $k < 0$ 时, 反比例函数图象位于第二、四象限.

【解答】解: $\because$ 图象在二、四象限,

$\therefore k < 0$.

故选: B.

【点评】本题考查了反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的性质:

(1) 当 $k > 0$ 时, 函数的图象位于第一、三象限;

(2) 当 $k < 0$ 时, 函数的图象位于第二、四象限.

4. (4分) 下列方程中, 没有实数根的是 ()

A. $x^2 - 2x = 0$ B. $x^2 - 2x - 1 = 0$ C. $x^2 - 2x + 1 = 0$ D. $x^2 - 2x + 2 = 0$

【分析】分别计算各方程的根的判别式的值, 然后根据判别式的意义判定方程根的情况即可.

【解答】解: A、 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 4 > 0$, 方程有两个不相等的实数根, 所以 A 选项错误;

B、 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 > 0$, 方程有两个不相等的实数根, 所以 B 选项错误;

C、 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$, 方程有两个相等的实数根, 所以 C 选项错误;

D、 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$, 方程没有实数根, 所以 D 选项正确.

故选: D.

【点评】本题考查了根的判别式: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根.

5. (4分) 为了解某校初三 400 名学生的体重情况, 从中抽取 50 名学生的体重进行分析. 在这项调查中, 下列说法正确的是 ()

A. 400 名学生中每位学生是个体

B. 400 名学生是总体

C. 被抽取的 50 名学生是总体的一个样本

D. 样本的容量是 50

【分析】总体是所有调查对象的全体; 样本是所抽查对象的情况; 所抽查对象的数量; 个体是每一个调查的对象.

【解答】解: A. 400 名学生中每位学生的体重是个体, 故本选项不合题意;

B. 400 名学生的体重是总体, 故本选项不合题意;

C. 被抽取的 50 名学生的体重是总体的一个样本, 故本选项不合题意;

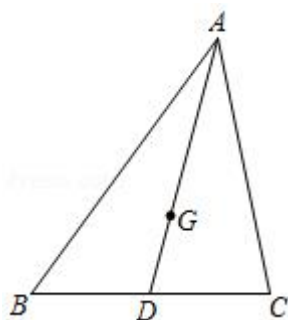
D. 样本的容量是 50, 符号题意;

故选: D.

【点评】本题考查了统计的有关知识, 解决此题的关键是掌握总体、样本、样本容量、个体的定义.

6. (4分) 如图, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 联结 AG 并延长交 BC 边于点 D . 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GD} = \vec{b}$,

那么向量 $\overrightarrow{BC}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为 ()



- A. $\overrightarrow{BC} = 3\vec{b} - 2\vec{a}$ B. $\overrightarrow{BC} = 3\vec{b} + 2\vec{a}$ C. $\overrightarrow{BC} = 6\vec{b} - 2\vec{a}$ D. $\overrightarrow{BC} = 6\vec{b} + 2\vec{a}$

【分析】 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 推出 $AG = 2DG$, 推出 $AD = 3DG$, 利用三角形法则求出 $\overrightarrow{BD}$ 即可解决问题.

【解答】 解: $\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore AG = 2DG,$$

$$\therefore AD = 3DG,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{GD} = 3\vec{b},$$

$$\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + 3\vec{b}, \quad DB = BD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD} = 6\vec{b} - 2\vec{a},$$

故选: C.

【点评】 本题考查三角形的重心, 平面向量, 三角形法则等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4分) 计算: $a^3 \div a = \underline{a^2}$.

【分析】 根据同底数幂相除, 底数不变指数相减进行计算即可求解.

【解答】 解: $a^3 \div a = a^{3-1} = a^2$.

故答案为: a^2 .

【点评】 本题考查了同底数幂的除法的运算性质, 熟记运算性质是解题的关键.

8. (4分) 在实数范围内分解因式: $m^2 - 2 = \underline{(m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})}$.

【分析】 在实数范围内把 2 写作 $(\sqrt{2})^2$, 原式满足平方差公式的特点, 利用平方差公

式即可把原式分解因式.

【解答】解: $m^2 - 2$

$$= m^2 - (\sqrt{2})^2$$

$$= (m + \sqrt{2})(m - \sqrt{2}).$$

故答案为: $(m + \sqrt{2})(m - \sqrt{2})$

【点评】本题考查实数范围内的因式分解, 因式分解的步骤为: 一提公因式; 二看公式. 在实数范围内进行因式分解的式子的结果一般要分到出现无理数为止.

9. (4分) 函数 $y = \sqrt{x+3}$ 的定义域是 $x \geq -3$.

【分析】根据二次根式的性质, 被开方数大于或等于 0, 可以求出 x 的范围.

【解答】解: 根据题意得: $x+3 \geq 0$,

解得: $x \geq -3$.

故答案为: $x \geq -3$.

【点评】考查了函数自变量的取值范围, 函数自变量的范围一般从三个方面考虑:

(1) 当函数表达式是整式时, 自变量可取全体实数;

(2) 当函数表达式是分式时, 考虑分式的分母不能为 0;

(3) 当函数表达式是二次根式时, 被开方数非负.

10. (4分) 不等式组 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$ 的整数解是 $-1, 0, 1$.

【分析】先求出每个不等式的解集, 再确定其公共解, 得到不等式组的解集, 然后求其整数解.

【解答】解: 解不等式 $x+1 \geq 0$, 得: $x \geq -1$,

解不等式 $2-x > 0$, 得: $x < 2$,

则不等式组的解集为 $-1 \leq x < 2$,

所以不等式组的整数解为 $-1, 0, 1$,

故答案为: $-1, 0, 1$.

【点评】本题主要考查不等式组的解法及整数解的确定. 求不等式组的解集, 应遵循以下原则: 同大取较大, 同小取较小, 小大大小中间找, 大大小小解不了.

11. (4分) 如果将直线 $y = 3x$ 平移, 使其经过点 $(0, -1)$, 那么平移后的直线表达式是 $y = 3x - 1$.

【分析】根据平移不改变 k 的值可设平移后直线的解析式为 $y = 3x + b$, 然后将点 $(0, -1)$

代入即可得出直线的函数解析式.

【解答】解: 设平移后直线的解析式为 $y = 3x + b$,

把 $(0, -1)$ 代入直线解析式得 $-1 = b$,

解得 $b = -1$.

所以平移后直线的解析式为 $y = 3x - 1$.

故答案为: $y = 3x - 1$.

【点评】 本题考查了一次函数图象与几何变换, 待定系数法求一次函数的解析式, 掌握直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 平移时 k 的值不变是解题的关键.

12. (4分) 从 2, 3, 4, 5, 6 这五个数中任选一个数, 选出的这个数是素数的概率是 $\frac{3}{5}$.

【分析】 这五个数中任选一个数共有 5 种等可能结果, 其中选出的这个数是素数的有 2、3、5 这 3 种结果, 根据概率公式求解可得.

【解答】 解: 从 2, 3, 4, 5, 6 这五个数中任选一个数共有 5 种等可能结果, 其中选出的这个数是素数的有 2、3、5 这 3 种结果,

所以选出的这个数是素数的概率是 $\frac{3}{5}$,

故答案为: $\frac{3}{5}$.

【点评】 此题考查了概率公式的应用. 注意用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

13. (4分) 如果点 D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的 AB 、 AC 边的中点, 那么 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的周长之比是 $1: 2$.

【分析】 根据中位线的定理即可求出答案.

【解答】 解: $\because$ 点 D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的 AB 、 AC 边的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1_{\triangle ADE}}{1_{\triangle ABC}} = \frac{DE + AD + AE}{BC + AB + AC} = \frac{1}{2}$$

故答案为: $1: 2$.

【点评】 本题考查中位线, 解题的关键是熟练运用中位线的性质定理, 本题属于基础题型.

14. (4分) 已知点 C 在线段 AB 上, 且 $0 < AC < \frac{1}{2}AB$. 如果 $\odot C$ 经过点 A , 那么点 B 与 $\odot C$ 的位置关系是 点 B 在 $\odot C$ 外.

【分析】直接根据点与圆的位置关系即可得出结论.

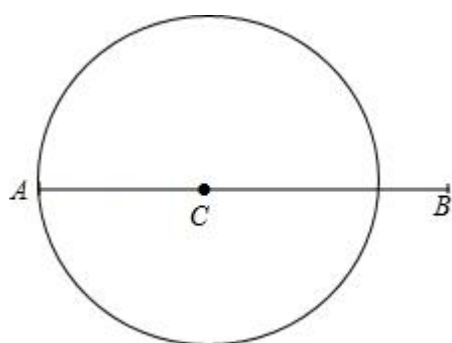
【解答】解: 如图,

$$\because \text{点 } C \text{ 在线段 } AB \text{ 上, 且 } 0 < AC < \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore BC > AC,$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 在 } \odot C \text{ 外,}$$

故答案为: 点 B 在 $\odot C$ 外.



【点评】本题考查的是点与圆的位置关系, 熟知设 $\odot O$ 的半径为 r , 点 P 到圆心的距离 $OP = d$, 当 $d > r$ 时点 P 在圆外; 当 $d < r$ 时点 P 在圆内是解答此题的关键.

15. (4分) 随机选取 50 粒种子在适宜的温度下做发芽天数的试验, 试验的结果如表所示. 估计该作物种子发芽的天数的平均数约为 1.8 天.

天数	1	2	3
发芽	15	30	5

【分析】利用加权平均数的定义列式计算可得.

【解答】解: 估计该作物种子发芽的天数的平均数约为 $\frac{1 \times 15 + 2 \times 30 + 3 \times 5}{50} = 1.8$ (天),

故答案为: 1.8.

【点评】本题主要考查加权平均数, 解题的关键是掌握加权平均数的定义.

16. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 3$, $BC = 2$, 将 $\triangle ABC$ 绕着点 B 顺时针旋转, 如果点 A 落在射线 BC 上的点 A' 处. 那么 $AA' = \underline{2\sqrt{3}}$.

【分析】作 $AH \perp BC$ 于 H , 如图, 利用等腰三角形的性质得 $BH = CH = \frac{1}{2}BC = 1$, 利用

勾股定理可计算出 $AH = 2\sqrt{2}$, 再根据旋转的性质得 $BA' = BA = 3$, 则 $HA' = 2$, 然后

利用勾股定理可计算出 AA' 的长.

【解答】解: 作 $AH \perp BC$ 于 H , 如图,

$$\because AB = AC = 3, BC = 2,$$

$$\therefore BH = CH = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\therefore AH = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2},$$

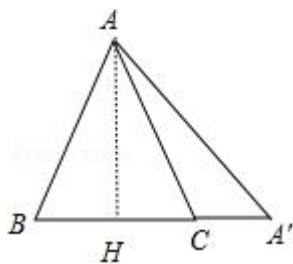
$\because \triangle ABC$ 绕着点 B 顺时针旋转, 如果点 A 落在射线 BC 上的点 A' 处,

$$\therefore BA' = BA = 3,$$

$$\therefore HA' = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AHA' \text{ 中, } AA' = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

故答案为 $2\sqrt{3}$.

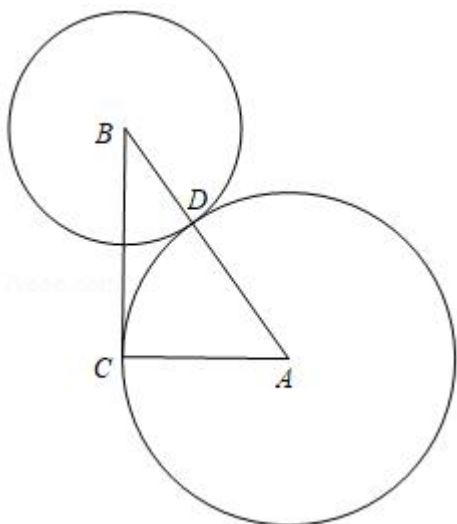


【点评】 本题考查了旋转的性质: 对应点到旋转中心的距离相等; 对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角; 旋转前、后的图形全等. 也考查了等腰三角形的性质.

17. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$. 分别以 A 、 B 为圆心画圆, 如果 $\odot A$ 经过点 C , $\odot B$ 与 $\odot A$ 相交, 那么 $\odot B$ 的半径 r 的取值范围是 $2 < r < 8$.

【分析】 根据勾股定理求出斜边 AB , 根据 $\odot A$ 经过点 C 求出 $\odot A$ 的半径为 3, 再求出 $\odot B$ 的半径范围即可.

【解答】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$,



由勾股定理得： $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，

$\because \odot A$ 经过点 C ，

$\therefore AD = AC = 3$ ，

$\therefore BD = 2$ ，

$\because \odot B$ 与 $\odot A$ 相交，

$\therefore \odot B$ 的半径 r 的取值范围是 $2 < r < 8$ ，

故答案为： $2 < r < 8$ ．

【点评】 本题考查了圆与圆的位置关系，勾股定理等知识点，能求出 BD 的长是解此题的关键．

18. (4分) 小明学习完《相似三角形》一章后，发现了一个有趣的结论：在两个不相似的直角三角形中，分别存在经过直角顶点的一条直线，把直角三角形分成两个小三角形后，如果第一个直角三角形分割出来的一个小三角形与第二个直角三角形分割出来的一个小三角形相似，那么分割出来的另外两个小三角形也相似．他把这样的两条直线称为这两个直角三角形的相似分割线．

如图 1、图 2，直线 CG 、 DH 分别是两个不相似的 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 的相似分割线， CG 、 DH 分别与斜边 AB 、 EF 交于点 G 、 H ，如果 $\triangle BCG$ 与 $\triangle DFH$ 相似， $AC = 3$ ， $AB = 5$ ， $DE = 4$ ， $DF = 8$ ，那么 $AG = \underline{3}$ ．

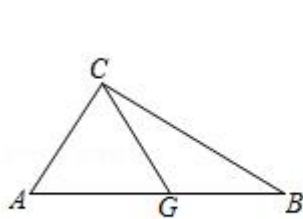


图1

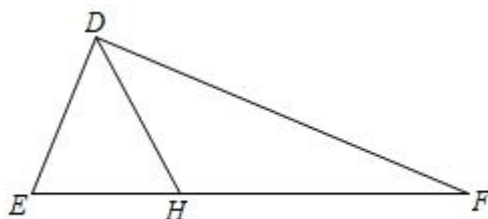


图2

【分析】先由勾股定理得出 BC 的值，再由 $\triangle BCG \sim \triangle DFH$ 列出比例式，设 $AG = x$ ，用含 x 的式子表示出 DH ；按照相似分割线可知， $\triangle AGC \sim \triangle DHE$ ，但要先得出两个相似三角形的边或角是如何对应的，再根据相似三角形的性质列出比例式，解得 x 值即可．

【解答】解： $\because \text{Rt}\triangle ABC$ ， $AC = 3$ ， $AB = 5$ ，

$\therefore$ 由勾股定理得： $BC = 4$ ，

$\because \triangle BCG \sim \triangle DFH$ ，

$$\therefore \frac{BG}{DH} = \frac{BC}{DF},$$

已知 $DF = 8$ ，设 $AG = x$ ，则 $BG = 5 - x$ ，

$$\therefore \frac{5-x}{DH} = \frac{4}{8},$$

$\therefore DH = 10 - 2x$ ，

$\because \triangle BCG \sim \triangle DFH$ ，

$\therefore \angle B = \angle FDH$ ， $\angle BGC = \angle CHF$ ，

$\therefore \angle AGC = \angle DHE$ ，

$\because \angle A + \angle B = 90^\circ$ ， $\angle EDH + \angle FDH = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle A = \angle EDH$ ，

$\therefore \triangle AGC \sim \triangle DHE$ ，

$$\therefore \frac{AG}{DH} = \frac{AC}{DE},$$

又 $DE = 4$ ，

$$\therefore \frac{x}{10-2x} = \frac{3}{4},$$

解得： $x = 3$ ，

经检验， $x = 3$ 是原方程的解，且符合题意．

$\therefore AG = 3$ ．

故答案为：3．

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，熟练掌握相关性质及定理是解题的关键．

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（10 分）计算： $|\sqrt{3}-1| - 8^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + (\frac{1}{2})^{-2}$.

【分析】直接利用二次根式的性质以及分数指数幂的性质分别化简得出答案.

【解答】解：原式 $= \sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{2} - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 4$
 $= \sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + 4$
 $= -\sqrt{2} + 3.$

【点评】此题主要考查了分数指数幂的性质以及二次根式的性质，正确化简各数是解题关键.

20.（10 分）解方程： $\frac{4x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = 1 - \frac{1}{x+2}$.

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【解答】解：去分母得： $4x - 2x - 4 = x^2 - 4 - x + 2$ ，即 $x^2 - 3x + 2 = 0$ ，
解得： $x = 1$ 或 $x = 2$ ，

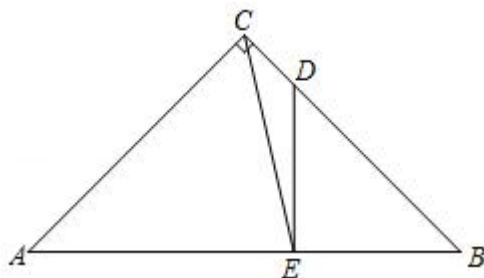
经检验 $x = 2$ 是增根，分式方程的解为 $x = 1$.

【点评】此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验.

21.（10 分）如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4$ ，点 D 在边 BC 上，且 $BD = 3CD$ ， $DE \perp AB$ ，垂足为点 E ，联结 CE .

（1）求线段 AE 的长；

（2）求 $\angle ACE$ 的余切值.



【分析】（1）根据锐角三角函数定义即可求出 AE 的长；

（2）过点 E 作 $EH \perp AC$ 于点 H . 根据等腰直角三角形的性质可得 $EH = AH$ 的值，再根据三角函数即可求出 $\angle ACE$ 的余切值.

【解答】解：（1） $\because BC = 4$ ， $BD = 3CD$ ，
 $\therefore BD = 3$.

$$\because AB = BC, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle B = 45^\circ.$$

$$\because DE \perp AB,$$

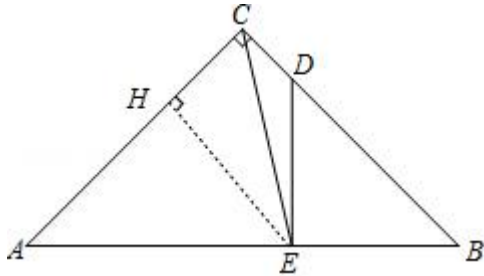
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle DEB \text{ 中, } \cos B = \frac{BE}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore BE = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACB \text{ 中, } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore AE = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

(2) 如图, 过点 E 作 $EH \perp AC$ 于点 H .



$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AHE \text{ 中, } \cos A = \frac{AH}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$AH = AE \cdot \cos 45^\circ = \frac{5}{2},$$

$$\therefore CH = AC - AH = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore EH = AH = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle CHE \text{ 中, } \cot \angle ECB = \frac{CH}{EH} = \frac{3}{5},$$

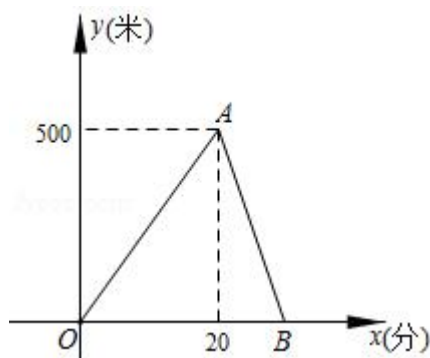
即 $\angle ECB$ 的余切值是 $\frac{3}{5}$.

【点评】 本题考查了解直角三角形、等腰直角三角形, 解决本题的关键是掌握锐角三角函数定义.

22. (10 分) 某湖边健身步道全长 1500 米, 甲、乙两人同时从同一起点匀速向终点步行. 甲先到达终点后立刻返回, 在整个步行过程中, 甲、乙两人间的距离 y (米) 与出发的时间 x (分) 之间的关系如图中 $OA - AB$ 折线所示.

(1) 用文字语言描述点 A 的实际意义;

(2) 求甲、乙两人的速度及两人相遇时 x 的值.



【分析】（1）根据题意结合图象解答即可；

（2）根据图象分别求出两人的速度，再根据题意列方程解答即可．

【解答】解：（1）点 A 的实际意义为：20 分钟时，甲乙两人相距 500 米．

（2）根据题意得， $v_{\text{甲}} = \frac{1500}{20} = 75$ （米/分）， $v_{\text{乙}} = \frac{1000}{20} = 50$ （米/分），

依题意，可列方程： $75(x - 20) + 50(x - 20) = 500$ ，

解这个方程，得 $x = 24$ ，

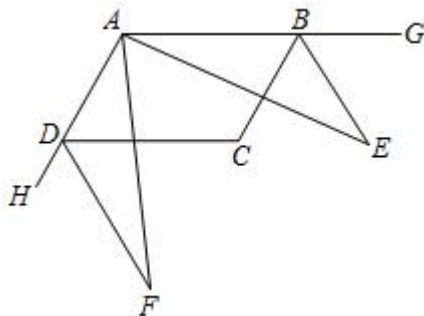
答：甲的速度是每分钟 75 米，乙的速度是每分钟 50 米，两人相遇时 x 的值为 24．

【点评】本题考查了一次函数的应用，正确掌握分析函数图象是解题的关键．

23.（12 分）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， BE 、 DF 分别是平行四边形的两个外角的平分线， $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ ，边 AE 、 AF 分别交两条角平分线于点 E 、 F ．

（1）求证： $\triangle ABE \sim \triangle FDA$ ；

（2）联结 BD 、 EF ，如果 $DF^2 = AD \cdot AB$ ，求证： $BD = EF$ ．



【分析】（1）根据角平分线的定义得到 $\angle HDF = \frac{1}{2}\angle HDC$ ．根据平行四边形的性质得到 $AB \parallel CD$ ．求得 $\angle BAD = \angle CDH$ ．等量代换得到 $\angle BAE = \angle F$ ，同理 $\angle DAF = \angle E$ ，于是得到结论；

（2）作 AP 平分 $\angle DAB$ 交 CD 于点 P ，由角平分线的定义得到 $\angle DAP = \frac{1}{2}\angle BAD$ ，求得

$\angle HDF = \angle DAP$, 推出 $DF \parallel AP$, 同理 $BE \parallel AP$, 根据相似三角形的性质得到 $BE = DF$, 根据平行四边形的性质即可得到结论.

【解答】解: (1) $\because \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$,

$$\therefore \angle DAF + \angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAD,$$

$\because DF$ 平分 $\angle HDC$,

$$\therefore \angle HDF = \frac{1}{2} \angle HDC,$$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDH,$$

$$\therefore \angle HDF = \angle EAF,$$

$$\therefore \angle HDF = \angle DAF + \angle BAE,$$

$$\text{又} \because \angle HDF = \angle DAF + \angle F,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle F,$$

同理: $\angle DAF = \angle E$,

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle FDA;$$

(2) 作 AP 平分 $\angle DAB$ 交 CD 于点 P ,

$$\therefore \angle DAP = \frac{1}{2} \angle BAD,$$

$$\because \angle HDF = \frac{1}{2} \angle CDH, \text{ 且 } \angle BAD = \angle CDH$$

$$\therefore \angle HDF = \angle DAP,$$

$$\therefore DF \parallel AP,$$

同理: $BE \parallel AP$,

$$\therefore DF \parallel BE,$$

$$\because \triangle ABE \sim \triangle FDA,$$

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{DF}{AB},$$

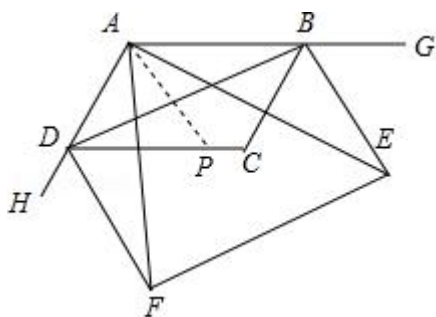
$$\text{即 } BE \cdot DF = AD \cdot AB,$$

$$\text{又} \because DF^2 = AD \cdot AB,$$

$$\therefore BE = DF,$$

$\therefore$ 四边形 $DFEB$ 是平行四边形,

$\therefore BD = EF$.



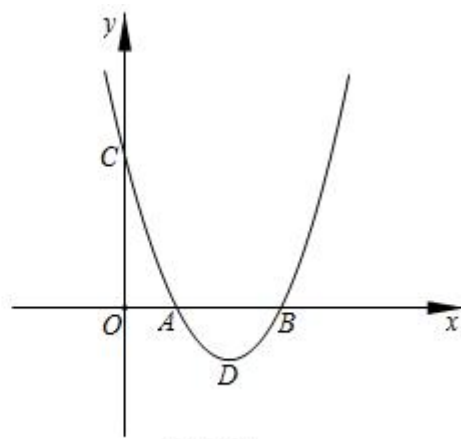
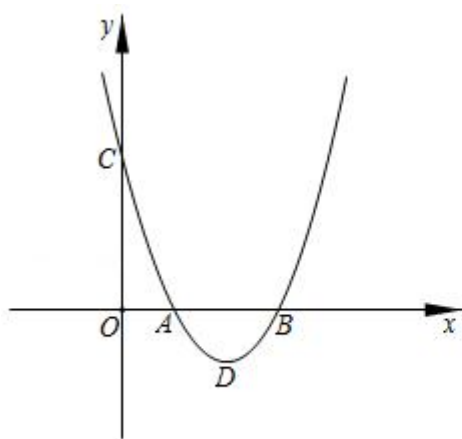
【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，平行四边形的性质，角平分线的定义，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

24. (12分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y = ax^2 - 4ax + 3$ 的图象与 x 轴正半轴交于点 A 、 B ，与 y 轴相交于点 C ，顶点为 D ，且 $\tan \angle CAO = 3$.

(1) 求这个二次函数的解析式；

(2) 点 P 是对称轴右侧抛物线上的点，联结 CP ，交对称轴于点 F ，当 $S_{\triangle CDF} : S_{\triangle FDP} = 2 : 3$ 时，求点 P 的坐标；

(3) 在 (2) 的条件下，将 $\triangle PCD$ 沿直线 MN 翻折，当点 P 恰好与点 O 重合时，折痕 MN 交 x 轴于点 M ，交 y 轴于点 N ，求 $\frac{OM}{ON}$ 的值.



备用图

【分析】 (1) 在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中， $\tan \angle CAO = \frac{OC}{OA} = 3$ ，求出点 A 的坐标，即可求解；

(2) 利用 $\frac{S_{\triangle CDF}}{S_{\triangle FDP}} = \frac{CF}{FP} = \frac{2}{3}$ ，即可求解；

(3) 证明 $\angle ONM = \angle POH$ ，则 $\tan \angle ONM = \frac{OM}{ON} = \tan \angle POM = \frac{PH}{OH} = \frac{8}{5}$.

【解答】 解：(1) $\because$ 二次函数 $y = ax^2 - 4ax + 3$ 的图象与 y 轴交于点 C ，

∴点 C 的坐标为 $(0, 3)$,

∴ $OC = 3$,

连接 AC , 在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $\tan \angle CAO = \frac{OC}{OA} = 3$,

∴ $OA = 1$,

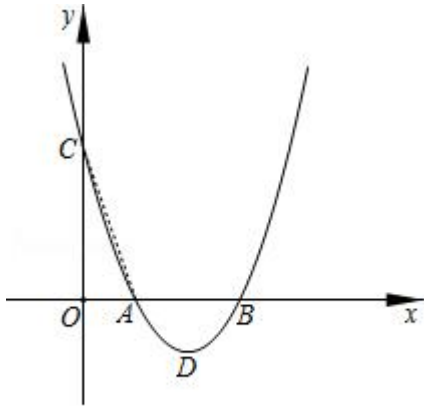


图1

将点 $A(1, 0)$ 代入 $y = ax^2 - 4ax + 3$, 得 $a - 4a + 3 = 0$,

解得: $a = 1$.

所以, 这个二次函数的解析式为 $y = x^2 - 4x + 3$;

(2) 过点 C 作 $CG \perp DF$, 过点 P 作 $PQ \perp DF$, 垂足分别为点 G 、 Q .

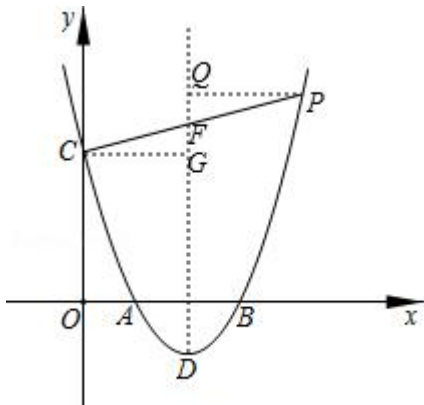


图2

∵ 抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 的对称轴为直线 $x = 2$,

∴ $CG = 2$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDF}}{S_{\triangle FDP}} = \frac{CG}{PQ} = \frac{2}{3},$$

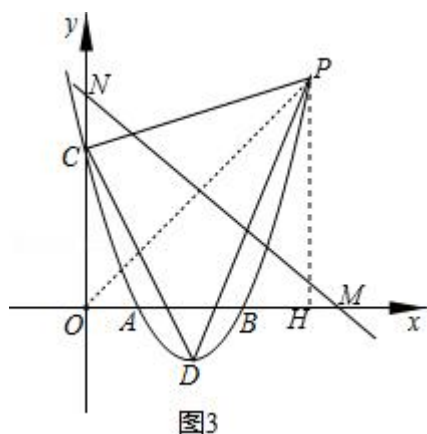
∴ $PQ = 3$,

∴ 点 P 的横坐标为 5,

$\therefore$ 把 $x = 5$ 代入 $y = x^2 - 4x + 3$, 得 $y = 8$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(5, 8)$;

(3) 过点 P 作 $PH \perp OM$, 垂足分别为点 H ,



$\because$ 点 P 的坐标为 $(5, 8)$,

$\therefore OH = 5, PH = 8$,

$\because$ 将 $\triangle PCD$ 沿直线 MN 翻折, 点 P 恰好与点 O 重合,

$\therefore MN \perp OP$,

$\therefore \angle ONM + \angle NOP = 90^\circ$,

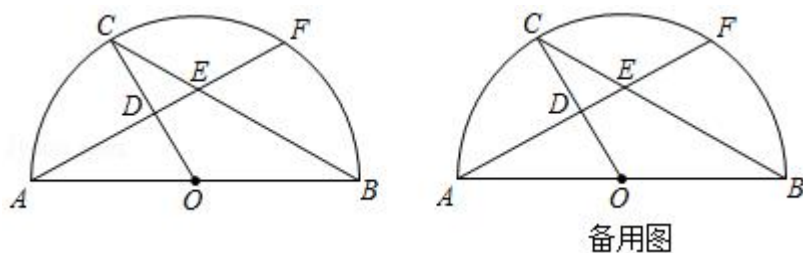
又 $\because \angle POH + \angle NOP = 90^\circ$,

$\therefore \angle ONM = \angle POH$,

$$\therefore \tan \angle ONM = \frac{OM}{ON} = \tan \angle POM = \frac{PH}{OH} = \frac{8}{5}.$$

【点评】 本题考查的是二次函数综合运用, 涉及到一次函数的性质、图象的翻折、面积的计算等, 具有一定的综合性, 难度适中.

25. (14分) 如图, 已知 AB 是半圆 O 的直径, $AB = 6$, 点 C 在半圆 O 上. 过点 A 作 $AD \perp OC$, 垂足为点 D , AD 的延长线与弦 BC 交于点 E , 与半圆 O 交于点 F (点 F 不与点 B 重合).



(1) 当点 F 为 $\widehat{BC}$ 的中点时, 求弦 BC 的长;

(2) 设 $OD = x$, $\frac{DE}{AE} = y$, 求 y 与 x 的函数关系式;

(3) 当 $\triangle AOD$ 与 $\triangle CDE$ 相似时, 求线段 OD 的长.

【分析】(1) 联结 OF , 交 BC 于点 H . 得出 $\angle BOF = \angle COF$. 则 $\angle AOC = \angle COF = \angle BOF = 60^\circ$, 可求出 BH , BC 的长;

(2) 联结 BF . 证得 $OD \parallel BF$, 则 $\frac{DE}{DF} = \frac{3-x}{3+x}$, 即 $\frac{DE}{AD} = \frac{3-x}{3+x}$, 得出 $\frac{DE}{AE} = \frac{3-x}{6}$, 则得出结论;

(3) 分两种情况: ①当 $\angle DCE = \angle DOA$ 时, $AB \parallel CB$, 不符合题意, 舍去, ②当 $\angle DCE = \angle DAO$ 时, 联结 OF , 证得 $\angle OAF = 30^\circ$, 得出 $OD = \frac{1}{2}OA = \frac{3}{2}$, 则答案得出.

【解答】解: (1) 如图 1, 联结 OF , 交 BC 于点 H .

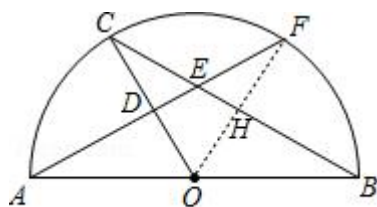


图1

$\because F$ 是 $\widehat{BC}$ 中点,

$\therefore OF \perp BC$, $BC = 2BH$.

$\therefore \angle BOF = \angle COF$.

$\because OA = OF$, $OC \perp AF$,

$\therefore \angle AOC = \angle COF$,

$\therefore \angle AOC = \angle COF = \angle BOF = 60^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle BOH$ 中, $\sin \angle BOH = \frac{BH}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\because AB = 6$,

$\therefore OB = 3$,

$\therefore BH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore BC = 2BH = 3\sqrt{3}$;

(2) 如图 2, 联结 BF .

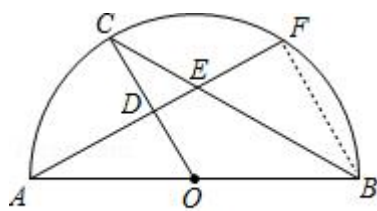


图2

$\because AF \perp OC$, 垂足为点 D ,

$\therefore AD = DF$.

又 $\because OA = OB$,

$\therefore OD \parallel BF$, $BF = 2OD = 2x$.

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{CD}{BF} = \frac{3-x}{2x},$$

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{3-x}{3+x},$$

$$\text{即 } \frac{DE}{AD} = \frac{3-x}{3+x},$$

$$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{3-x}{6},$$

$$\therefore y = \frac{3-x}{6}.$$

(3) $\triangle AOD \sim \triangle CDE$, 分两种情况: ①当 $\angle DCE = \angle DOA$ 时, $AB \parallel CB$, 不符合题意, 舍去.

②当 $\angle DCE = \angle DAO$ 时, 联结 OF .

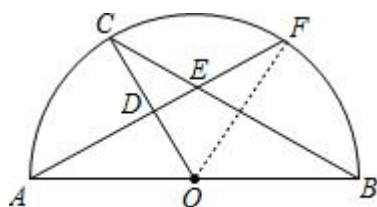


图3

$\because OA = OF$, $OB = OC$,

$\therefore \angle OAF = \angle OFA$, $\angle OCB = \angle OBC$.

$\because \angle DCE = \angle DAO$,

$\therefore \angle OAF = \angle OFA = \angle OCB = \angle OBC$.

$\because \angle AOD = \angle OCB + \angle OBC = 2\angle OAF$,

$\therefore \angle OAF = 30^\circ$,

$$\therefore OD = \frac{1}{2}OA = \frac{3}{2}.$$

即线段 OD 的长为 $\frac{3}{2}$.

【点评】 本题属于圆综合题，考查了垂径定理，勾股定理，直角三角形的性质，圆周角定理，相似三角形的判定和性质，锐角三角函数，解直角三角形等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造基本图形解决问题.