

2020 年上海市闵行区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 在下列各式中，与 $\frac{1}{3}xy^2$ 是同类项的是 ()
- A. $2xy$ B. $-y^2x$ C. $xy^2 + \frac{1}{3}$ D. x^2y
2. (4 分) 方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ 根的情况 ()
- A. 有两个不相等的实数根 B. 有一个实数根
- C. 无实数根 D. 有两个相等的实数根
3. (4 分) 在平面直角坐标系中，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 图象在每个象限内， y 随着 x 的增大而增大，那么它的图象的两个分支分别在 ()
- A. 第一、三象限 B. 第二、四象限
- C. 第一、二象限 D. 第三、四象限
4. (4 分) 某同学参加射击训练，共发射 8 发子弹，击中的环数分别为 5, 3, 7, 5, 6, 4, 5, 5，则下列说法错误的是 ()
- A. 其平均数为 5 B. 其众数为 5
- C. 其方差为 5 D. 其中位数为 5
5. (4 分) 顺次联结四边形 $ABCD$ 各边中点所形成的四边形是矩形，那么四边形 $ABCD$ 是 ()
- A. 平行四边形 B. 矩形 C. 菱形 D. 等腰梯形
6. (4 分) 下列命题中正确的个数是 ()
- ①过三点可以确定一个圆；
- ②直角三角形的两条直角边长分别是 5 和 12，那么它的外接圆半径为 6.5；
- ③如果两个半径为 2 厘米和 3 厘米的圆相切，那么圆心距为 5 厘米；
- ④三角形的重心到三角形三边的距离相等.
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 计算： $-5 + 2^2 =$ _____.

8. (4 分) 化简： $\frac{1}{a} - \frac{1}{3a} =$ _____.

9. (4分) 不等式组 $\begin{cases} 2(x-3) > 1 \\ 4+x > 5x-24 \end{cases}$ 的解集是_____.

10. (4分) 方程 $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-1} = 0$ 的解是_____.

11. (4分) 为了考察闵行区 1 万名九年级学生数学知识与能力测试的成绩, 从中抽取 50 本试卷, 每本试卷 30 份, 那么样本容量是_____.

12. (4分) 如果向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 方向相反, 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = 5$, 那么 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} =$ _____.

13. (4分) 在一张边长为 $4cm$ 的正方形纸上做扎针随机试验, 纸上有一个半径为 $1cm$ 的圆形阴影区域, 则针头扎在阴影区域内的概率为_____.

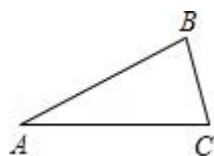
14. (4分) 把直线 $y = -x + b$ 向左平移 2 个单位后, 在 y 轴上的截距为 5, 那么原来的直线解析式为_____.

15. (4分) 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 且 $AC \perp BD$, 如果 $AD:BC = 2:3$, 那么 $DB:AC =$ _____.

16. (4分) 七宝琉璃玲珑塔 (简称七宝塔), 位于上海市七宝古镇的七宝教寺内, 塔高 47 米, 共 7 层. 学校老师组织学生利用无人机实地勘测, 如果无人机在飞行的某一高度时传回数据, 测得塔顶的仰角为 60° , 塔底的俯角为 45° , 那么此时无人机距离地面的高度为_____米. (结果保留根号)

17. (4分) 已知点 $(-1, y_1)$, $(\sqrt{2}, y_2)$, $(2, y_3)$ 在函数 $y = ax^2 - 2ax + a - 2$ ($a > 0$) 的图象上, 那么 y_1 、 y_2 、 y_3 按由小到大的顺序排列是_____.

18. (4分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 4$, $\angle BAC = 30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转, 使点 B 落在点 B_1 处, 点 C 落在点 C_1 处, 且 $BB_1 \perp AC$. 联结 B_1C 和 C_1C , 那么 $\triangle B_1C_1C$ 的面积等于_____.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

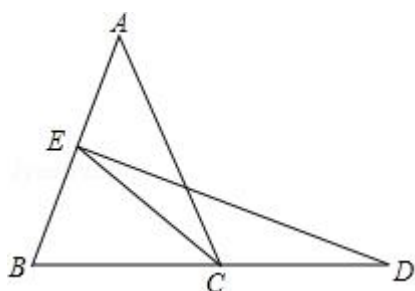
19. (10分) 计算: $(1 + \sqrt{2})^2 - |-1|^{-2020} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} - \frac{3}{2^2}$.

20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} x-y=2 \\ x^2-2xy-3y^2=0 \end{cases}.$$

21. (10 分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=6$, $BC=4$, AB 的垂直平分线交 AB 于点 E , 交 BC 的延长线于点 D .

(1) 求 CD 的长;

(2) 求点 C 到 ED 的距离.



22. (10 分) 上海市为了增强居民的节水意识, 避免水资源的浪费, 全面实施居民“阶梯水价”. 当累计水量达到年度阶梯水量分档基数临界点后, 即开始实施阶梯价格计价, 分档水量和价格见下表.

仔细阅读上述材料, 请解答下面的问题:

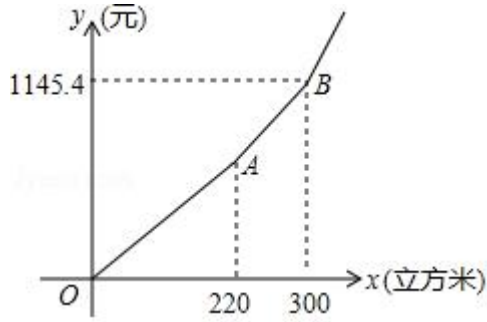
分档	户年用水量 (立方米)	自来水价格 (元/立方米)	污水处理费 (元/立方米)
第一阶梯	0 - 220 (含 220)	1.92	1.70
第二阶梯	220 - 300 (含 300)	3.30	1.70
第三阶梯	300 以上	4.30	1.70

注: 1. 应缴纳水费 = 自来水费总额 + 污水处理费总额
2. 应缴纳污水处理费总额 = 用水量 $\times$ 污水处理费 $\times 0.9$

(1) 小静家 2019 年上半年共计用水量 100 立方米, 应缴纳水费_____元;

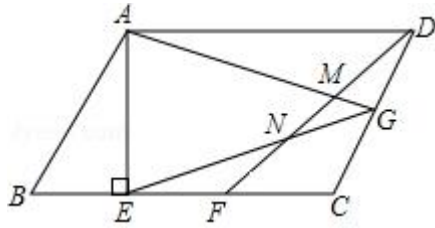
(2) 小静家全年缴纳的水费共计 1000.5 元, 那么 2019 年全年用水量为_____立方米;

(3) 如图所示是上海市“阶梯水价” y 与用水量 x 的函数关系, 那么第二阶梯(线段 AB)的函数解析式为_____, 定义域_____.



23. (12分) 如图, 已知在 $\square ABCD$ 中, $AE \perp BC$, 垂足为 E , $CE = AB$, 点 F 为 CE 的中点, 点 G 在线段 CD 上, 联结 DF , 交 AG 于点 M , 交 EG 于点 N , 且 $\angle DFC = \angle EGC$.

- (1) 求证: $CG = DG$;
 (2) 求证: $CG^2 = GM \cdot AG$.



24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 我们把以抛物线 $y = x^2$ 上的动点 A 为顶点的抛物线叫做这条抛物线的“子抛物线”.

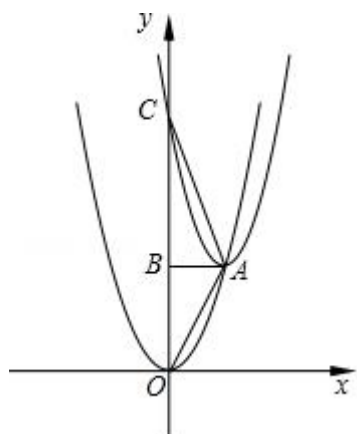
如图, 已知某条“子抛物线”的二次项系数为 $\frac{3}{2}$, 且与 y 轴交于点 C . 设点 A 的横坐标为 m ($m > 0$), 过点 A 作 y 轴的垂线交 y 轴于点 B .

为 m ($m > 0$), 过点 A 作 y 轴的垂线交 y 轴于点 B .

(1) 当 $m = 1$ 时, 求这条“子抛物线”的解析式;

(2) 用含 m 的代数式表示 $\angle ACB$ 的余切值;

(3) 如果 $\angle OAC = 135^\circ$, 求 m 的值.

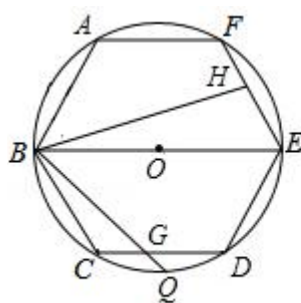


25. (14分) 如图, 已知圆 O 是正六边形 $ABCDEF$ 外接圆, 直径 $BE = 8$, 点 G 、 H 分别在射线 CD 、 EF 上 (点 G 不与点 C 、 D 重合), 且 $\angle GBH = 60^\circ$, 设 $CG = x$, $EH = y$.

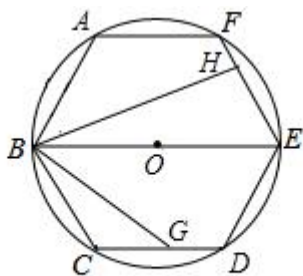
(1) 如图①, 当直线 BG 经过弧 CD 的中点 Q 时, 求 $\angle CBG$ 的度数;

(2) 如图②, 当点 G 在边 CD 上时, 试写出 y 关于 x 的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

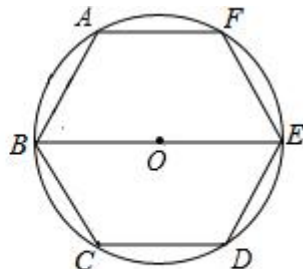
(3) 联结 AH 、 EG , 如果 $\triangle AFH$ 与 $\triangle DEG$ 相似, 求 CG 的长.



图①



图②



备用图

2020 年上海市闵行区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）在下列各式中，与 $\frac{1}{3}xy^2$ 是同类项的是（ ）

- A. $2xy$ B. $-y^2x$ C. $xy^2 + \frac{1}{3}$ D. x^2y

【分析】根据同类项的定义，所含字母相同且相同字母的指数也相同的项是同类项，可得答案．注意同类项与字母的顺序无关，与系数无关．

【解答】解：A、所含字母相同；相同字母的指数不同，故本选项不符合题意；

B、所含字母相同；相同字母的指数相同，故本选项符合题意；

C、 $xy^2 + \frac{1}{3}$ 是多项式，与 $\frac{1}{3}xy^2$ 不是同类项，故本选项不符合题意；

D、所含字母相同；相同字母的指数不同，故本选项不符合题意；

故选：B．

【点评】本题考查同类项的定义，同类项定义中的两个“相同”：所含字母相同；相同字母的指数相同，是易混点，还有注意同类项定义中隐含的两个“无关”：①与字母的顺序无关；②与系数无关．

2.（4 分）方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ 根的情况（ ）

- A. 有两个不相等的实数根 B. 有一个实数根
C. 无实数根 D. 有两个相等的实数根

【分析】根据根的判别式即可求出答案．

【解答】解：由题意可知： $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 3 = 12 - 12 = 0$ ，

故选：D．

【点评】本题考查根的判别式，解题的关键是熟练运用根的判别式，本题属于基础题型．

3.（4 分）在平面直角坐标系中，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 图象在每个象限内， y 随着 x 的增大而增大，那么它的图象的两个分支分别在（ ）

- A. 第一、三象限 B. 第二、四象限
C. 第一、二象限 D. 第三、四象限

【分析】直接利用反比例函数的性质进而分析得出答案.

【解答】解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 图象在每个象限内 y 随着 x 的增大而增大，

$\therefore k < 0$,

$\therefore$ 它的图象的两个分支分别在第二、四象限.

故选：B.

【点评】此题主要考查了反比例函数的性质，正确记忆反比例函数图象的分布是解题关键.

4. (4分) 某同学参加射击训练，共发射8发子弹，击中的环数分别为5, 3, 7, 5, 6, 4, 5, 5, 则下列说法错误的是()

A. 其平均数为5

B. 其众数为5

C. 其方差为5

D. 其中位数为5

【分析】分别根据平均数、众数和方差、中位数的概念计算，从而得出答案.

【解答】解：这组数据的平均数为 $\frac{1}{8} \times (5+3+7+5+6+4+5+5) = 5$ ，故A选项正确，不符合题意；

这组数据中5出现次数最多，有4次，所以众数为5，故B选项正确，不符合题意；

这组数据的方差为 $\frac{1}{8} \times [(3-5)^2 + (4-5)^2 + 4 \times (5-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2] = \frac{5}{4}$,

故C选项错误，符合题意；

将数据重新排列为3、4、5、5、5、5、6、7，

所以中位数为 $\frac{5+5}{2} = 5$ ，故D选项正确，不符合题意；

故选：C.

【点评】本题考查了众数、中位数以及算术平均数的定义，牢记定义是关键.

5. (4分) 顺次联结四边形ABCD各边中点所形成的四边形是矩形，那么四边形ABCD是()

A. 平行四边形

B. 矩形

C. 菱形

D. 等腰梯形

【分析】此题要根据矩形的性质和三角形中位线定理求解；首先根据三角形中位线定理知：所得四边形的对边都平行且相等，那么其必为平行四边形，若所得四边形是矩形，那么邻边互相垂直，故原四边形的对角线必互相垂直，由此得解.

【解答】解：已知：如右图，四边形EFGH是矩形，且E、F、G、H分别是AB、BC、

CD 、 AD 的中点，求证：四边形 $ABCD$ 是对角线垂直的四边形．

证明：由于 E 、 F 、 G 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 、 AD 的中点，

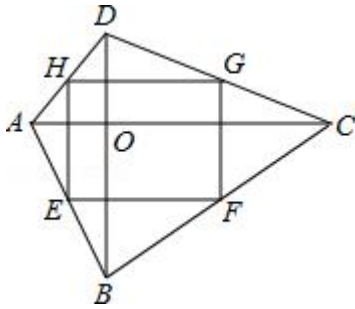
根据三角形中位线定理得： $EH \parallel FG \parallel BD$ ， $EF \parallel AC \parallel HG$ ；

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形，即 $EF \perp FG$ ，

$\therefore AC \perp BD$ ，

观察选项，只有菱形的对角线互相垂直．

故选：C．



【点评】 本题主要考查了中点四边形，掌握矩形的性质和三角形中位线定理，解题的关键是构造三角形利用三角形的中位线定理解答．

6. (4 分) 下列命题中正确的个数是 ()

- ①过三点可以确定一个圆；
- ②直角三角形的两条直角边长分别是 5 和 12，那么它的外接圆半径为 6.5；
- ③如果两个半径为 2 厘米和 3 厘米的圆相切，那么圆心距为 5 厘米；
- ④三角形的重心到三角形三边的距离相等．

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【分析】 根据确定圆的条件、圆周角定理和勾股定理、两圆的位置关系、三角形的重心的概念判断．

【解答】 解：①过不在同一直线上的三点可以确定一个圆，本说法错误；

②直角三角形的两条直角边长分别是 5 和 12，

则斜边长 $= \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ ，

$\therefore$ 那么它的外接圆半径为 6.5，本说法正确；

③如果两个半径为 2 厘米和 3 厘米的圆相切，那么圆心距为 5 厘米或 1 厘米，本说法错误；

④三角形的内心到三角形三边的距离相等，本说法错误；

故选：A.

【点评】本题考查的是命题的真假判断,正确的命题叫真命题,错误的命题叫做假命题.判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 计算: $-5+2^2 = \underline{-1}$.

【分析】根据有理数的乘方、有理数的加法可以解答本题.

【解答】解: $-5+2^2$

$$= -5+4$$

$$= -1,$$

故答案为: -1 .

【点评】本题考查有理数的混合运算, 解答本题的关键是明确有理数混合运算的计算方法.

8. (4 分) 化简: $\frac{1}{a} - \frac{1}{3a} = \underline{\frac{2}{3a}}$.

【分析】原式通分并利用同分母分式的减法法则计算即可.

【解答】解: 原式 $= \frac{3}{3a} - \frac{1}{3a}$

$$= \frac{2}{3a}.$$

故答案为: $\frac{2}{3a}$

【点评】此题考查了分式的加减法, 分式加减法的关键是通分, 通分的关键是找出最简公分母.

9. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} 2(x-3) > 1 \\ 4+x > 5x-24 \end{cases}$ 的解集是 $\underline{\frac{7}{2} < x < 7}$.

【分析】先求出每一个不等式的解集, 再根据找不等式组解集的规律找出不等式组的解集即可.

【解答】解: $\begin{cases} 2(x-3) > 1 \text{ ①} \\ 4+x > 5x-24 \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①得: $x > \frac{7}{2}$,

解不等式②得: $x < 7$,

∴不等式组的解集为 $\frac{7}{2} < x < 7$,

故答案为: $\frac{7}{2} < x < 7$;

【点评】 本题考查了解一元一次不等式组的应用, 能根据不等式的解集找出不等式组的解集是解此题的关键.

10. (4分) 方程 $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-1} = 0$ 的解是 $x=2$.

【分析】 两边平方得出关于 x 的整式方程, 解之求得 x 的值, 再根据二次根式有意义的条件得出符合方程的 x 的值, 可得答案.

【解答】 解: 两边平方得 $(x-2)(x-1) = 0$,

则 $x-2=0$ 或 $x-1=0$,

解得: $x=2$ 或 $x=1$,

$$\text{又} \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases},$$

解得: $x \geq 2$,

则 $x=2$,

故答案为: $x=2$.

【点评】 本题主要考查无理方程, 解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解, 在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法. 常用的方法有: 乘方法, 配方法, 因式分解法, 设辅助元素法, 利用比例性质法等.

11. (4分) 为了考察闵行区1万名九年级学生数学知识与能力测试的成绩, 从中抽取50本试卷, 每本试卷30份, 那么样本容量是 1500.

【分析】 直接利用样本容量的定义分析得出答案.

【解答】 解: ∵从中抽取50本试卷, 每本试卷30份,

∴样本容量是: $50 \times 30 = 1500$.

故答案为: 1500.

【点评】 此题主要考查了样本容量, 正确把握定义是解题关键.

12. (4分) 如果向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 方向相反, 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = 5$, 那么 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} =$ $\vec{0}$.

【分析】 根据共线向量的定义解答.

【解答】 解: ∵向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 方向相反, 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = 5$,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}.$$

故答案是： $\overrightarrow{0}$.

【点评】考查了平面向量，根据题意得到 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ 的解题的突破口.

13. (4分) 在一张边长为 4cm 的正方形纸上做扎针随机试验，纸上有一个半径为 1cm 的圆形阴影区域，则针头扎在阴影区域内的概率为 $\frac{\pi}{16}$.

【分析】根据题意，求得正方形与圆的面积，相比计算可得答案.

【解答】解：根据题意，针头扎在阴影区域内的概率就是圆与正方形的面积的比值；

由题意可得：正方形纸边长为 4cm ，其面积为 16cm^2 ，

圆的半径为 1cm ，其面积为 πcm^2 ，

故其概率为 $\frac{\pi}{16}$.

【点评】本题考查几何概率的求法：注意圆、正方形的面积计算. 用到的知识点为：概率 = 相应的面积与总面积之比.

14. (4分) 把直线 $y = -x + b$ 向左平移 2 个单位后，在 y 轴上的截距为 5，那么原来的直线解析式为 $y = -x + 7$.

【分析】直接根据“上加下减，左加右减”的原则得到平移后的解析式 $y = -x - 2 + b$ ，再根据在 y 轴上的截距是 5，可得原来的直线解析式.

【解答】解：由“左加右减”的原则可知，若沿 x 轴向左平移 2 个单位所得直线的解析式为 $y = -(x+2) + b$ ，即 $y = -x - 2 + b$ ，

$\therefore$ 在 y 轴上的截距是 5，

$$\therefore -2 + b = 5,$$

$$\therefore b = 7,$$

$$\therefore \text{原来的直线解析式为：} y = -x + 7,$$

故答案为： $y = -x + 7$.

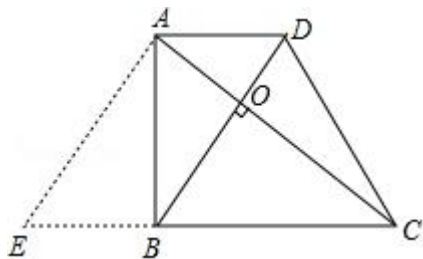
【点评】本题考查的是一次函数的图象与几何变换，熟知函数图象平移的法则是解答此题的关键.

15. (4分) 已知在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，且 $AC \perp BD$ ，如果 $AD:BC = 2:3$ ，那么 $DB:AC = \sqrt{6}:3$.

【分析】过点 A 作 $AE \parallel BD$ 交 CB 延长线于点 E ，根据 $AD \parallel BC$ ，可得四边形 $AEBD$ 是平

行四边形，可得 $AC \perp AE$ ，证明 $\triangle ABO \sim \triangle BCO$ ，对应边成比例可得 $OB = \sqrt{6}x$ ，进而可求 $\tan \angle ACB = \frac{OB}{OC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，即可得结论。

【解答】解：如图，



过点 A 作 $AE \parallel BD$ 交 CB 延长线于点 E ，

$$\because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $AEBD$ 是平行四边形，

$$\therefore AE = BD,$$

$$\because AC \perp BD,$$

$$\therefore AC \perp AE,$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AE}{AC},$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\because DB \perp AC,$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCB + \angle OBC = 90^\circ,$$

$$\angle ABO + \angle OBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle OCB,$$

$$\therefore \triangle ABO \sim \triangle BCO,$$

$$\therefore \frac{OB}{OC} = \frac{AO}{BO},$$

设 $AO = 2x$ ， $OC = 3x$ ，

$$\therefore OB = \sqrt{6}x,$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{OB}{OC} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DB}{AC} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

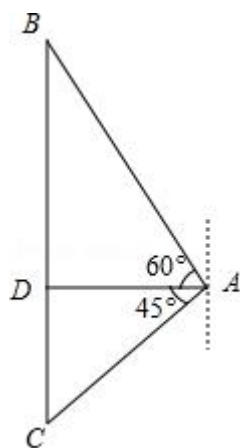
故答案为: $\sqrt{6}:3$.

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质、直角梯形, 解决本题的关键是将梯形问题转化为三角形问题.

16. (4分) 七宝琉璃玲珑塔(简称七宝塔), 位于上海市七宝古镇的七宝教寺内, 塔高 47 米, 共 7 层. 学校老师组织学生利用无人机实地勘测, 如果无人机在飞行的某一高度时传回数据, 测得塔顶的仰角为 60° , 塔底的俯角为 45° , 那么此时无人机距离地面的高度为 $\frac{47\sqrt{3}-47}{2}$ 米. (结果保留根号)

【分析】如图所示: 设无人机所在位置为点 A , 根据题意可得, $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle DAC = 45^\circ$, $BC = 47$ (米), 设此时无人机距离地面的高度为 x 米, 再根据三角函数即可求出 x 的值.

【解答】解: 如图所示: 设无人机所在位置为点 A ,



根据题意可知:

$$\angle BAD = 60^\circ, \angle DAC = 45^\circ, BC = 47 \text{ (米)},$$

设此时无人机距离地面的高度为 x 米,

$$\text{则 } CD = x, \text{ 则 } BD = 47 - x, AD = CD = x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADB \text{ 中, } \tan 60^\circ = \frac{BD}{AD},$$

$$\text{即 } \sqrt{3} = \frac{47-x}{x},$$

$$\text{解得 } x = \frac{47\sqrt{3}-47}{2} \text{ (米)}.$$

答: 此时无人机距离地面的高度为 $\frac{47\sqrt{3}-47}{2}$ 米.

故答案为: $\frac{47\sqrt{3}-47}{2}$.

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，解决本题的关键是仰角俯角定义准确画图.

17. (4分) 已知点 $(-1, y_1)$, $(\sqrt{2}, y_2)$, $(2, y_3)$ 在函数 $y = ax^2 - 2ax + a - 2$ ($a > 0$) 的图象上, 那么 y_1 、 y_2 、 y_3 按由小到大的顺序排列是 $y_2 < y_3 < y_1$.

【分析】 先确定抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, 然后比较已知三点到直线 $x = 1$ 的距离的大小, 再利用二次函数的性质可判断 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小.

【解答】 解: 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$,

$\therefore$ 点 $(-1, y_1)$ 到直线 $x = 1$ 的距离为 2, 点 $(\sqrt{2}, y_2)$ 到直线 $x = 1$ 的距离为 $\sqrt{2} - 1$,

点 $(2, y_3)$ 到直线 $x = 1$ 的距离为 1,

$\therefore$ 点 $(-1, y_1)$ 到直线 $x = 1$ 的距离最大, 点 $(\sqrt{2}, y_2)$ 到直线 $x = 1$ 的距离最小,

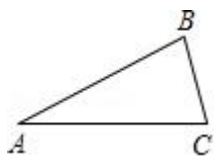
而抛物线的开口向上,

$\therefore y_2 < y_3 < y_1$.

故答案为 $y_2 < y_3 < y_1$.

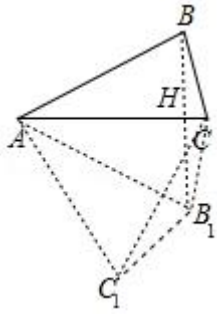
【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征: 二次函数图象上点的坐标其解析式. 也考查了二次函数的性质.

18. (4分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 4$, $\angle BAC = 30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转, 使点 B 落在点 B_1 处, 点 C 落在点 C_1 处, 且 $BB_1 \perp AC$. 联结 B_1C 和 C_1C , 那么 $\triangle B_1C_1C$ 的面积等于 $8 - 4\sqrt{3}$.



【分析】 由直角三角形的性质可求 $BH = 2$, 可求 $\triangle ABC$ 的面积, 由旋转的性质可得 $S_{\triangle AB_1C_1} = 4$, $\angle CAB = \angle C_1AB_1 = 30^\circ$, $AB = AB_1 = AC = AC_1 = 4$, 可证 $\triangle CAC_1$ 是等边三角形, 由面积和差关系可求解.

【解答】 解: 如图, 设 BB_1 与 AC 交于 H ,



$\because AB = AC = 4$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BB_1 \perp AC$,

$\therefore BH = 2$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BH = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4,$$

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转,

$\therefore S_{\triangle AB_1C_1} = 4$, $\angle CAB = \angle C_1AB_1 = 30^\circ$, $AB = AB_1 = AC = AC_1 = 4$, 且 $BB_1 \perp AC$,

$\therefore BH = B_1H = 2$, $\angle CAB_1 = \angle CAB = 30^\circ$,

$\therefore \angle CAC_1 = 60^\circ$, 且 $AC = AC_1 = 4$,

$\therefore \triangle CAC_1$ 是等边三角形,

$$\therefore \triangle B_1C_1C \text{ 的面积} = S_{\triangle AB_1C_1} + S_{\triangle ACB_1} - S_{\triangle ACC_1} = 4 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4)^2 = 8 - 4\sqrt{3},$$

故答案为: $8 - 4\sqrt{3}$.

【点评】 本题考查了旋转的性质, 等腰三角形的性质, 直角三角形的性质, 灵活运用这些性质进行推理是本题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $(1 + \sqrt{2})^2 - |-1|^{-2020} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} - 2^{\frac{3}{2}}$.

【分析】 原式利用完全平方公式, 负整数指数幂法则, 分数指数幂法则, 以及分母有理化计算即可求出值.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 1 + 2 - \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \\ &= 4 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

【点评】 此题考查了实数的运算, 分数指数幂, 以及负整数指数幂, 熟记掌握运算法则是解本题的关键.

20. (10分) 解方程组:
$$\begin{cases} x-y=2 \\ x^2-2xy-3y^2=0 \end{cases}.$$

【分析】用代入法即可解答, 把①化为 $x=1+y$, 代入②得 $(1+y)^2+2y+3=0$ 即可.

【解答】解:
$$\begin{cases} x-y=2 \text{ ①} \\ x^2-2xy-3y^2=0 \text{ ②} \end{cases}$$

由①得 $y=x-2$ ③

把③代入②, 得 $x^2-2x(x-2)-3(x-2)^2=0$,

即 $x^2-4x+3=0$

解这个方程, 得 $x_1=3, x_2=1$

代入③中, 得
$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=-1 \end{cases}.$$

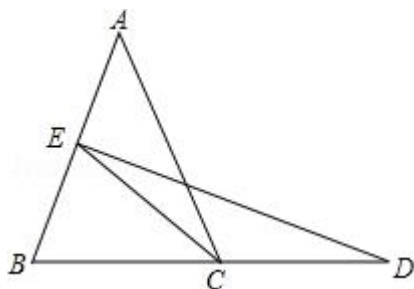
$\therefore$ 原方程组的解为
$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=-1 \end{cases}.$$

【点评】考查了高次方程, 解答此类题目一般用代入法比较简单, 先消去一个未知数再解关于另一个未知数的一元二次方程, 把求得结果代入一个较简单的方程中即可.

21. (10分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=6, BC=4$, AB 的垂直平分线交 AB 于点 E , 交 BC 的延长线于点 D .

(1) 求 CD 的长;

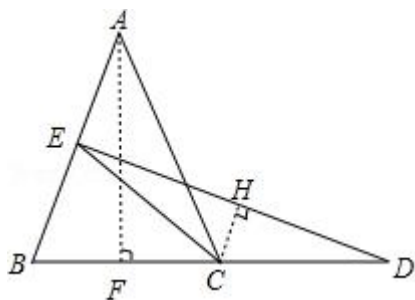
(2) 求点 C 到 ED 的距离.



【分析】(1) 过 A 点作 $AF \perp BC$ 于点 F . 根据 $AB=AC=6, BC=4, AF \perp BC$, 可得 $BF=FC=2, \angle BFA=90^\circ$, 再根据三角函数即可求出 CD 的长;

(2) 过 C 点作 $CH \perp ED$ 于点 H , 根据 $CH \perp ED, AB \perp ED$, 可得 $\angle DEB = \angle DHC = 90^\circ$, 即 $CH \parallel AB$, 对应边成比例即可求出 CH 的长.

【解答】解: 如图,



(1) 过 A 点作 $AF \perp BC$ 于点 F .

$\because AB = AC = 6, BC = 4, AF \perp BC,$

$\therefore BF = FC = 2, \angle BFA = 90^\circ,$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $\cos \angle B = \frac{BF}{AB} = \frac{1}{3},$

$\because AB$ 的垂直平分线交 AB 于点 $E, AB = 6,$

$\therefore AE = BE = 3, \angle DEB = 90^\circ,$

在 $\text{Rt}\triangle DEB$ 中, $\cos \angle B = \frac{BE}{BD} = \frac{1}{3},$

$\therefore BD = 9,$

$\therefore CD = 5.$

(2) 过 C 点作 $CH \perp ED$ 于点 $H,$

$\because CH \perp ED, AB \perp ED,$

$\therefore \angle DEB = \angle DHC = 90^\circ,$

$\therefore CH \parallel AB,$

$\therefore \frac{CH}{BE} = \frac{CD}{BD},$

$\because BE = 3, BD = 9, CD = 5,$

$\therefore CH = \frac{5}{3}.$

$\therefore$ 点 C 到 ED 的距离 CH 为 $\frac{5}{3}.$

【点评】 本题考查了等腰三角形的性质、线段垂直平分线的性质，解决本题的关键是掌握等腰三角形的性质.

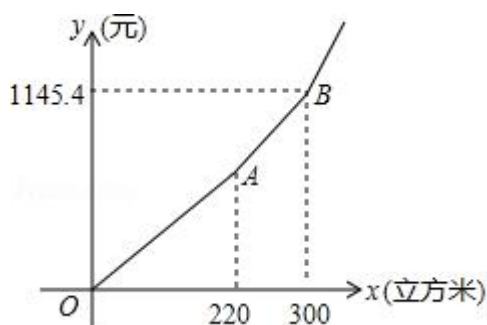
22. (10 分) 上海市为了增强居民的节水意识，避免水资源的浪费，全面实施居民“阶梯水价”. 当累计水量达到年度阶梯水量分档基数临界点后，即开始实施阶梯价格计价，分档水量和价格见下表.

仔细阅读上述材料，请解答下面的问题:

分档	户年用水量 (立方米)	自来水价格 (元/立方米)	污水处理费 (元/立方米)
第一阶梯	0 - 220 (含 220)	1.92	1.70
第二阶梯	220 - 300 (含 300)	3.30	1.70
第三阶梯	300 以上	4.30	1.70

注：1. 应缴纳水费 = 自来水费总额 + 污水处理费总额
2. 应缴纳污水处理费总额 = 用水量 × 污水处理费 × 0.9

- (1) 小静家 2019 年上半年共计用水量 100 立方米，应缴纳水费 345 元；
- (2) 小静家全年缴纳的水费共计 1000.5 元，那么 2019 年全年用水量为 270 立方米；
- (3) 如图所示是上海市“阶梯水价” y 与用水量 x 的函数关系，那么第二阶梯（线段 AB ）的函数解析式为 $y = 4.83x - 303.6$ ，定义域 $220 < x \leq 300$ 。



【分析】(1) 根据表格中的数据，可以计算出小静家 2019 年上半年共计用水量 100 立方米，应缴纳水费多少元；

(2) 根据表格中的数据，先计算第一阶梯最多缴费多少和第二阶梯最多缴费多少，然后即可判断小静家 2019 年全年用水量在哪个阶梯内，然后设出未知数，即可得到相应的方程，从而可以求得 2019 年全年用水量；

(3) 根据函数图象中的数据和 (2) 中的结果，可以先设出第二阶梯（线段 AB ）的函数解析式，该函数过点 $(220, 759)$ 、 $(300, 1145.4)$ ，即可得到相应的函数解析式，写出定义域。

【解答】解：(1) $100 \times 1.92 + 100 \times 1.70 \times 0.9$
 $= 192 + 153$
 $= 345$ (元)，

即小静家 2019 年上半年共计用水量 100 立方米，应缴纳水费 345 元，

故答案为: 345;

$$(2) 220 \times 1.92 + 220 \times 1.70 \times 0.9 = 759 \text{ (元)},$$

$$759 + (300 - 220) \times 3.3 + (300 - 220) \times 1.70 \times 0.9 = 1145.4 \text{ (元)},$$

$$\therefore 759 < 1000.5 < 1145.4,$$

$\therefore$ 小静家 2019 年全年用水量在 220 - 300 之间,

设小静家 2019 年全年用水量为 x 立方米,

$$759 + (x - 220) \times 3.3 + (x - 220) \times 1.70 \times 0.9 = 1000.5$$

解得, $x = 270$,

即 2019 年全年用水量为 270 立方米,

故答案为: 270;

(3) 设第二阶梯 (线段 AB) 的函数解析式为 $y = kx + b$,

$$\begin{cases} 220k + b = 759 \\ 300k + b = 1145.4 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} k = 4.83 \\ b = -303.6 \end{cases},$$

即第二阶梯 (线段 AB) 的函数解析式为 $y = 4.83x - 303.6$ ($220 < x \leq 300$),

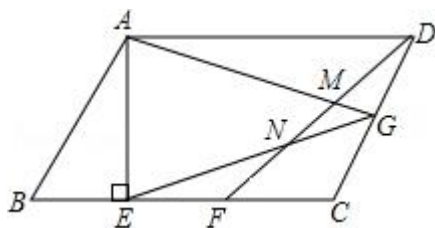
故答案为: $y = 4.83x - 303.6$, $220 < x \leq 300$.

【点评】 本题考查一次函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

23. (12 分) 如图, 已知在 $\square ABCD$ 中, $AE \perp BC$, 垂足为 E , $CE = AB$, 点 F 为 CE 的中点, 点 G 在线段 CD 上, 联结 DF , 交 AG 于点 M , 交 EG 于点 N , 且 $\angle DFC = \angle EGC$.

(1) 求证: $CG = DG$;

(2) 求证: $CG^2 = GM \cdot AG$.



【分析】 (1) 证明 $\triangle ECG \cong \triangle DCF$ 得到 $CG = CF$, 再利用点 F 为 CE 的中点得到 $CF = \frac{1}{2}CE$,

所以 $CG = \frac{1}{2}CD$, 从而得到 $CG = DG$;

(2) 延长 AG 、 BC 交于点 H , 如图, 由 $\triangle ECG \cong \triangle DCF$ 得到 $\angle CEG = \angle CDF$, 再证明 $\triangle ADG \cong \triangle HCG$ 得到 $AG = HG$, 则根据斜边上的中线性质的得 $AG = HG = EG$, 所以 $\angle CEG = \angle H$, 接着证明 $\triangle ADG \sim \triangle DMG$, 利用相似比得到 $DG^2 = GM \cdot AG$, 然后利用 $CG = DG$

得到结论.

【解答】证明: (1) $\because \square ABCD, CE = AB,$

$$\therefore AB = CD = EC,$$

$$\text{又} \because \angle DFC = \angle EGC, \angle BCD = \angle BCD,$$

$$\therefore \triangle ECG \cong \triangle DCF (AAS),$$

$$\therefore CG = CF,$$

$\because$ 点 F 为 CE 的中点,

$$\therefore CF = \frac{1}{2}CE;$$

$$\therefore CG = \frac{1}{2}CD,$$

即 $CG = DG$;

(2) 延长 AG 、 BC 交于点 H , 如图,

$$\because \triangle ECG \cong \triangle DCF,$$

$$\therefore \angle CEG = \angle CDF,$$

$$\because \square ABCD,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAH = \angle H, \angle ADC = \angle DCH.$$

$$\therefore \triangle ADG \cong \triangle HCG (AAS),$$

$$\therefore AG = HG,$$

$$\because AE \perp BC,$$

$$\therefore \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\therefore AG = HG = EG,$$

$$\therefore \angle CEG = \angle H,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle DAH,$$

$$\text{又} \because \angle AGD = \angle DGA,$$

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle DMG,$$

$$\therefore \frac{MG}{DG} = \frac{DG}{AG},$$

$$\therefore DG^2 = GM \cdot AG,$$

$$\text{又} \because CG = DG,$$

$$\therefore CG^2 = GM \cdot AG.$$

$$\cot \angle ADE = \frac{DE}{AE} = \frac{m+n}{n} = \frac{3}{2}n, \text{ 联立方程组 } \begin{cases} m^2 = m+2n \\ \frac{m+n}{n} = \frac{3}{2}m \end{cases}, \text{ 解之可得答案.}$$

【解答】解：（1）由题得， $A(m, m^2)$,

当 $m=1$ 时， $A(1, 1)$,

$\therefore$ 这条“子抛物线”的解析式： $y = \frac{3}{2}(x-1)^2 + 1$;

（2）由 $A(m, m^2)$ ，且 $AB \perp y$ 轴，可得 $AB = m$ ， $OB = m^2$.

$\therefore$ “子抛物线”的解析式为 $y = \frac{3}{2}(x-m)^2 + m^2$.

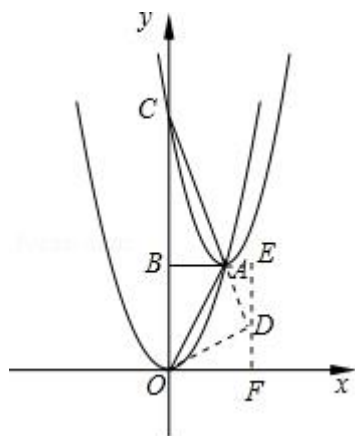
令 $x=0$ ，则 $y = \frac{5}{2}m^2$,

$\therefore$ 点 C 的坐标 $(0, \frac{5}{2}m^2)$ ， $OC = \frac{5}{2}m^2$,

$\therefore BC = \frac{3}{2}m^2$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\cot \angle ACB = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{3}{2}m^2}{m} = \frac{3}{2}m$.

（3）如图，过 O 点作 $OD \perp CA$ 的延长线于点 D ，过点 D 作 y 轴的平行线分别交 BA 的延长线于点 E ，交 x 轴于点 F ，



$\therefore \angle OAC = 135^\circ$,

$\therefore \angle OAD = 45^\circ$,

又 $\because OD \perp CA$,

$\therefore \angle OAD = \angle AOD = 45^\circ$,

$$\therefore AD = OD,$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle DFO \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = DF, DE = OF,$$

$$\text{设 } AE = n, \text{ 那么 } DF = n, BE = m+n = OF = ED.$$

$$\text{又 } \because OB = EF,$$

$$\therefore m^2 = m+2n.$$

$$\text{又 } \because \angle BCA = \angle ADE,$$

$$\therefore \cot \angle ADE = \frac{DE}{AE} = \frac{m+n}{n} = \frac{3}{2} \pi,$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} m^2 = m+2n \\ \frac{m+n}{n} = \frac{3}{2} \end{cases}, \text{ 得 } m_1 = 2, m_2 = -\frac{1}{3} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore m \text{ 的值为 } 2.$$

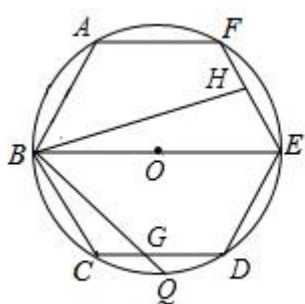
【点评】 本题是二次函数的综合问题，解题的关键是掌握待定系数法求二次函数的解析式、余切函数的概念、全等三角形的判定与性质等知识点。

25. (14分) 如图，已知圆 O 是正六边形 $ABCDEF$ 外接圆，直径 $BE = 8$ ，点 G 、 H 分别在射线 CD 、 EF 上（点 G 不与点 C 、 D 重合），且 $\angle GBH = 60^\circ$ ，设 $CG = x$ ， $EH = y$ 。

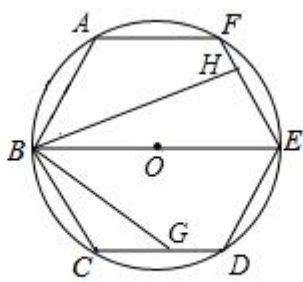
(1) 如图①，当直线 BG 经过弧 CD 的中点 Q 时，求 $\angle CBG$ 的度数；

(2) 如图②，当点 G 在边 CD 上时，试写出 y 关于 x 的函数关系式，并写出 x 的取值范围；

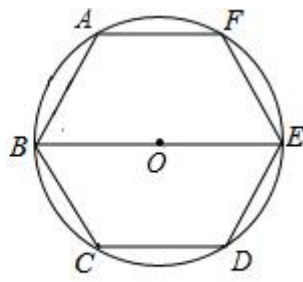
(3) 联结 AH 、 EG ，如果 $\triangle AFH$ 与 $\triangle DEG$ 相似，求 CG 的长。



图①



图②



备用图

【分析】 (1) 连接 OQ ，由正六边形的性质得出 $BC = DE$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $BE \parallel CD$ ，得出 $\widehat{BC} = \widehat{DE}$ ， $\angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ$ ，证出 $\widehat{BQ} = \widehat{EQ}$ ，得出 $\angle BOQ = \angle EOQ$ ，证出 $\angle BOQ = \angle EOQ = 90^\circ$ 。进而得出结论；

(2) 在 BE 上截取 $EM = HE$, 连接 HM , 证 $\triangle HEM$ 是等边三角形, 得出 $EM = HE = HM = y$, $\angle HME = 60^\circ$, 证 $\triangle BCG \sim \triangle BMH$, 得出 $\frac{BC}{BM} = \frac{CG}{MH}$. 进而得出结论;

(3) 当点 G 在边 CD 上时. 当点 G 在 CD 的延长线上时. 分别分两种情况, 根据相似三角形的性质和解分式方程解答即可.

【解答】 解: (1) 连接 OQ , 如图①所示:

$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形,

$\therefore BC = DE$, $\angle ABC = 120^\circ$, $BE \parallel CD$,

$\therefore \widehat{BC} = \widehat{DE}$, $\angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ$,

$\because$ 点 Q 是 $\widehat{CD}$ 的中点,

$\therefore \widehat{CQ} = \widehat{DQ}$,

$\therefore \widehat{BC} + \widehat{CQ} = \widehat{DE} + \widehat{DQ}$,

即 $\widehat{BQ} = \widehat{EQ}$,

$\therefore \angle BOQ = \angle EOQ$,

$\because \angle BOQ + \angle EOQ = 180^\circ$,

$\therefore \angle BOQ = \angle EOQ = 90^\circ$.

$\because BO = OQ$,

$\therefore \angle OBQ = \angle BQO = 45^\circ$,

$\therefore \angle CBG = \angle EBC - \angle OBQ = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$;

(2) 在 BE 上截取 $EM = HE$, 连接 HM , 如图②所示:

$\because$ 正六边形 $ABCDEF$, 直径 $BE = 8$,

$\therefore BO = OE = BC = 4$, $\angle BCD = \angle FED = 120^\circ$,

$\therefore \angle FEB = \frac{1}{2} \angle FED = 60^\circ$,

$\because EM = HE$,

$\therefore \triangle HEM$ 是等边三角形,

$\therefore EM = HE = HM = y$, $\angle HME = 60^\circ$,

$\therefore \angle BCD = \angle HMB = 120^\circ$,

$\because \angle EBC = \angle GBH = 60^\circ$,

$$\therefore \angle EBC - \angle GBE = \angle GBH - \angle GBE,$$

$$\text{即 } \angle GBC = \angle HBE,$$

$$\therefore \triangle BCG \sim \triangle BMH,$$

$$\therefore \frac{BC}{BM} = \frac{CG}{MH}.$$

$$\text{又 } \because CG = x, BE = 8, CD = BC = 4,$$

$$\therefore \frac{4}{8-y} = \frac{x}{y},$$

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } y = \frac{8x}{x+4} \quad (0 < x < 4).$$

(3) 如图③, 当点 G 在边 CD 上时.

由于 $\triangle AFH \sim \triangle EDG$, 且 $\angle CDE = \angle AFE = 120^\circ$,

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \frac{AF}{ED} = \frac{FH}{DG}.$$

$$\because AF = ED,$$

$$\therefore FH = DG,$$

$$\therefore CG = EH,$$

$$\text{即: } x = y = \frac{8x}{x+4},$$

解分式方程得: $x = 4$.

经检验 $x = 4$ 是原方程的解, 但不符合题意舍去.

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \frac{AF}{DG} = \frac{FH}{DE}. \text{ 即: } \frac{4}{4-x} = \frac{4-y}{4},$$

解分式方程得: $x = 12$.

经检验 $x = 12$ 是原方程的解, 但不符合题意舍去.

如图④, 当点 G 在 CD 的延长线上时.

由于 $\triangle AFH \sim \triangle EDG$, 且 $\angle EDG = \angle AFH = 60^\circ$,

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \frac{AF}{ED} = \frac{FH}{DG}.$$

$$\because AF = ED,$$

$$\therefore FH = DG,$$

$$\therefore CG = EH,$$

$$\text{即: } x = y = \frac{8x}{x+4},$$

解分式方程得: $x = 4$.

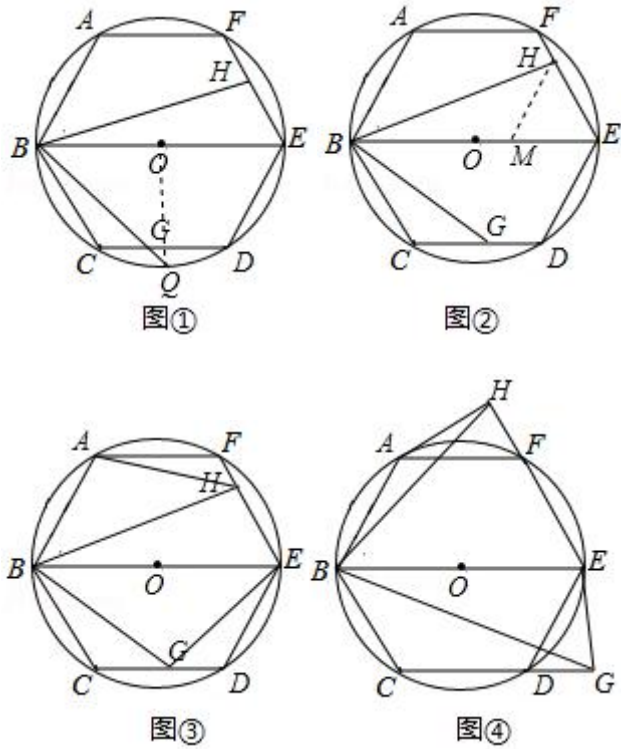
经检验 $x = 4$ 是原方程的解，但不符合题意舍去.

②当 $\frac{AF}{DG} = \frac{FH}{DE}$. 即: $\frac{4}{x-4} = \frac{y-4}{4}$,

解分式方程得: $x = 12$.

经检验 $x = 12$ 是原方程的解，且符合题意.

综上所述，如果 $\triangle AFH$ 与 $\triangle DEG$ 相似，那么 CG 的长为 12.



【点评】 本题是圆的综合题目，考查了圆心角、弧、弦之间的关系、圆周角定理、正六边形的性质、等边三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、分式方程的解法、分类讨论等知识；本题综合性强，熟练掌握圆的有关性质和相似三角形的判定与性质是解题的关键.