

2020 年上海市虹口区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列各数中，无理数是（ ）

- A. 2^{-1} B. $\sqrt{16}$ C. $\frac{23}{7}$ D. 2π

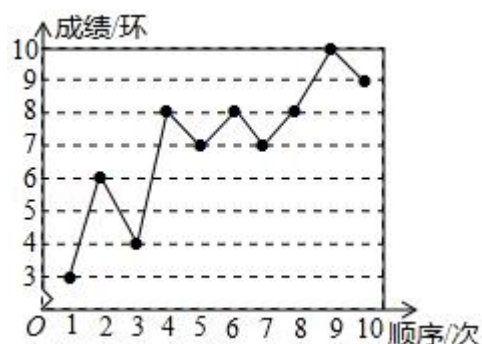
2.（4 分）直线 $y = -x+1$ 不经过（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3.（4 分）如果关于 x 的方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 有两个不相等的实数根，那么 m 的取值范围为（ ）

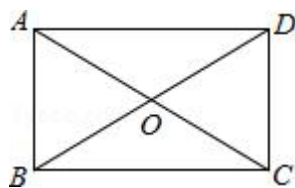
- A. $m \leq 4$ B. $m < 4$ C. $m \geq 4$ D. $m > 4$

4.（4 分）如图为某队员射击 10 次的成绩统计图，该队员射击成绩的众数与中位数分别是（ ）



- A. 8, 7.5 B. 8, 7 C. 7, 7.5 D. 7, 7

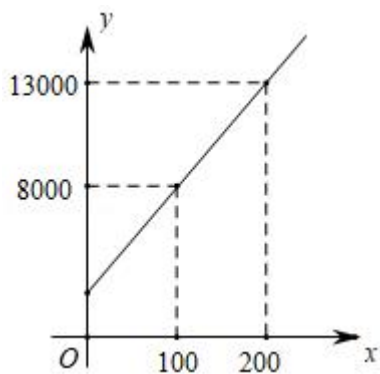
5.（4 分）如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC , BD 交于点 O ，以下说法错误的是（ ）



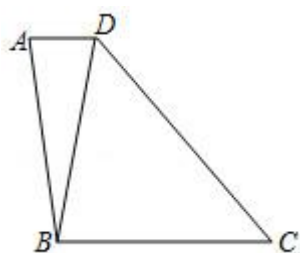
- A. $\angle ABC = 90^\circ$ B. $AC = BD$ C. $OA = OB$ D. $OA = AB$

6.（4 分）已知在 $\triangle ABC$ 中，小明按照下列作图步骤进行尺规作图（示意图与作图步骤如表），那么交点 O 是 $\triangle ABC$ 的（ ）

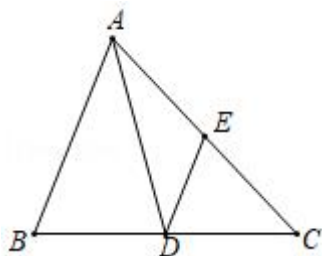
示意图	作图步骤
-----	------



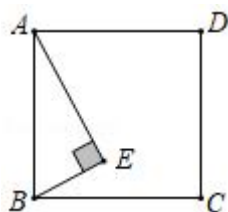
15. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = BD = BC$, 如果 $\angle C = 50^\circ$, 那么 $\angle ABD$ 的度数是_____.



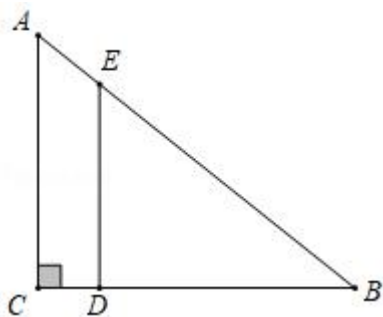
16. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为边 BC 上的中线, $DE \parallel AB$, 已知 $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD} =$ _____.



17. (4分) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 10$, 点 E 在正方形内部, 且 $AE \perp BE$, $\cot \angle BAE = 2$, 如果以 E 为圆心, r 为半径的 $\odot E$ 与以 CD 为直径的圆相交, 那么 r 的取值范围为_____.



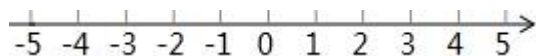
18. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$, 点 D 、 E 分别是边 BC 、 AB 上一点, $DE \parallel AC$, $BD = 5\sqrt{2}$, 把 $\triangle BDE$ 绕着点 B 旋转得到 $\triangle BD'E$ (点 D 、 E 分别与点 D' 、 E' 对应), 如果点 A 、 D' 、 E' 在同一直线上, 那么 AE' 的长为_____.



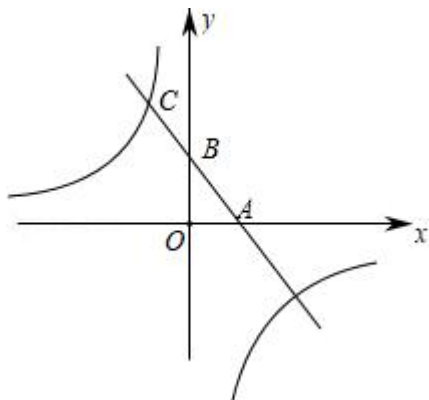
三、解答题(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. (10 分) 先化简，再求值： $(1 - \frac{1}{x-1}) \div \frac{x^2-4x+4}{x^2-1}$ ，其中 $x = \sqrt{5}+2$.

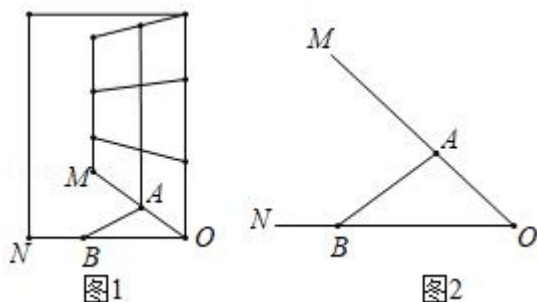
20. (10 分) 解不等式组：
$$\begin{cases} 6(\frac{2}{3}x-2) < x-3 \text{ ①} \\ \frac{1-x}{2}-2 \leq x \text{ ②} \end{cases}$$
 并把解集在数轴上表示出来.



21. (10 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = kx+3$ 与 x ， y 轴分别交于点 A 、 B ，与双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 交于点 $C(a, 6)$ ，已知 $\triangle AOB$ 的面积为 3，求直线与双曲线的表达式.



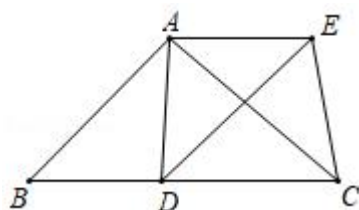
22. (10 分) 如图 1, 一扇窗户打开一定角度, 其中一端固定在窗户边 OM 上的点 A 处, 另一端 B 在边 ON 上滑动, 图 2 为某一位置从上往下看的平面图, 测得 $\angle ABO$ 为 37° , $\angle AOB$ 为 45° , OB 长为 35 厘米, 求 AB 的长 (参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\cos 37^\circ \approx 0.8$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)



23. (12 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 在边 BC 上, 联结 AD , 以 AD 为一边作 $\triangle ADE$, 满足 $AD = AE$, $\angle DAE = \angle BAC$, 联结 EC .

(1) 求证: CA 平分 $\angle DCE$;

(2) 如果 $AB^2 = BD \cdot BC$, 求证: 四边形 $ABDE$ 是平行四边形.

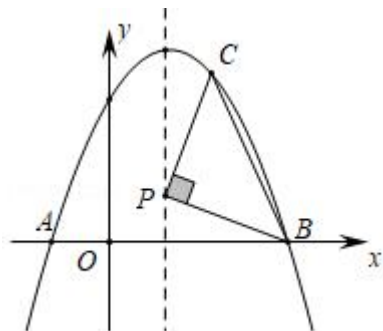


24. (12分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(3, 0)$, 该抛物线对称轴上的点 P 在 x 轴上方, 线段 PB 绕着点 P 逆时针旋转 90° 至 PC (点 B 对应点 C), 点 C 恰好落在抛物线上.

(1) 求抛物线的表达式并写出抛物线的对称轴;

(2) 求点 P 的坐标;

(3) 点 Q 在抛物线上, 联结 AC , 如果 $\angle QAC = \angle ABC$, 求点 Q 的坐标.



25. (14分) 如图1, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\cos C = \frac{3}{5}$, $DC = 5$, $BC = 6$, 以点 B 为圆心, BD 为半径作圆弧, 分别交边 CD 、 BC 于点 E 、 F .

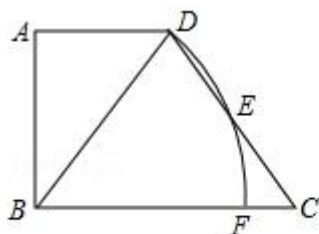


图1

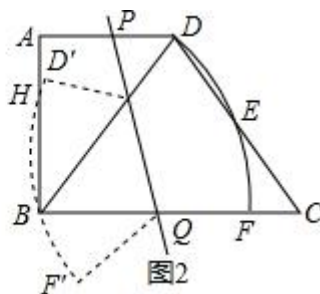


图2

(1) 求 $\sin \angle BDC$ 的值;

(2) 联结 BE , 设点 G 为射线 DB 上一动点, 如果 $\triangle ADG$ 相似于 $\triangle BEC$, 求 DG 的长;

(3) 如图2, 点 P 、 Q 分别为边 AD 、 BC 上动点, 将扇形 DBF 沿着直线 PQ 折叠, 折叠后的弧 $D'F'$ 经过点 B 与 AB 上的一点 H (点 D 、 F 分别对应点 D' 、 F'), 设 $BH = x$, $BQ = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式 (不需要写定义域).

2020 年上海市虹口区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列各数中，无理数是（ ）

- A. 2^{-1} B. $\sqrt{16}$ C. $\frac{23}{7}$ D. 2π

【分析】根据有理数的分类和无理数的概念求解可得.

【解答】解：A. $2^{-1} = \frac{1}{2}$ ，是分数，属于有理数；

B. $\sqrt{16} = 4$ 是整数，属于有理数；

C. $\frac{23}{7}$ 是分数，属于有理数；

D. 2π 是无理数；

故选：D.

【点评】本题主要考查无理数，解题的关键是了解它的三种形式：①开方开不尽的数，

②无限不循环小数，③含有 π 的数，如 $\frac{\pi}{2}$ 是无理数，因为 π 是无理数.

2.（4 分）直线 $y = -x + 1$ 不经过（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【分析】由 $k = -1 < 0$ ， $b = 1 > 0$ ，即可判断出图象经过的象限.

【解答】解： $\because$ 直线 $y = -x + 1$ 中， $k = -1 < 0$ ， $b = 1 > 0$ ，

$\therefore$ 直线的图象经过第一，二，四象限.

$\therefore$ 不经过第三象限，

故选：C.

【点评】本题考查了一次函数的图象的性质，一次函数 $y = kx + b$ 的图象有四种情况：

①当 $k > 0$ ， $b > 0$ ，函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、三象限， y 的值随 x 的值增大而增大；

②当 $k > 0$ ， $b < 0$ ，函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、三、四象限， y 的值随 x 的值增大而增大；

③当 $k < 0$ ， $b > 0$ 时，函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、四象限， y 的值随 x 的值增大而减小；

④当 $k < 0$, $b < 0$ 时, 函数 $y = kx + b$ 的图象经过第二、三、四象限, y 的值随 x 的值增大而减小.

3. (4分) 如果关于 x 的方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 m 的取值范围为 ()

A. $m \leq 4$ B. $m < 4$ C. $m \geq 4$ D. $m > 4$

【分析】由方程有两个不相等的实数根得出 $\Delta = (-4)^2 - 4m > 0$, 解之可得.

【解答】解: 根据题意知 $\Delta = (-4)^2 - 4m > 0$,

解得 $m < 4$,

故选: B.

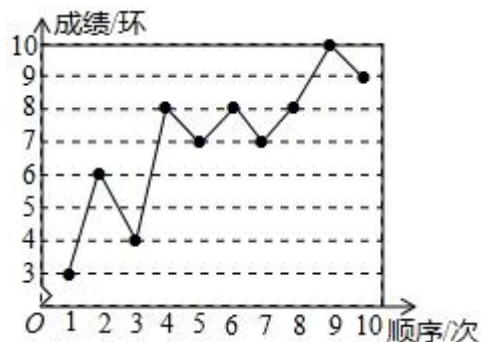
【点评】本题主要考查根的判别式, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系:

①当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的两个实数根;

②当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的两个实数根;

③当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根.

4. (4分) 如图为某队员射击 10 次的成绩统计图, 该队员射击成绩的众数与中位数分别是 ()



A. 8, 7.5 B. 8, 7 C. 7, 7.5 D. 7, 7

【分析】先根据折线图将这 10 个数据从小到大排列, 再根据众数和中位数的概念求解可得.

【解答】解: 由折线图知, 这 10 个数据分别为 3、4、6、7、7、8、8、8、9、10,

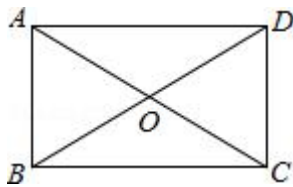
所以这组数据的众数为 8, 中位数为 $\frac{7+8}{2} = 7.5$,

故选: A.

【点评】本题主要考查众数和中位数, 将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后,

最中间的那个数（最中间两个数的平均数），叫做这组数据的中位数；一组数据中出现次数最多的数据叫做众数．

5.（4分）如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 交于点 O ，以下说法错误的是（ ）



- A. $\angle ABC = 90^\circ$ B. $AC = BD$ C. $OA = OB$ D. $OA = AB$

【分析】利用排除法解决问题即可，只要证明 A 、 B 、 C 正确即可．

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \quad AC = BD, \quad OA = OC, \quad OB = OD,$$

$$\therefore OA = OB,$$

故 A 、 B 、 C 正确，

故错误的是 D ，

故选： D ．

【点评】本题考查矩形的性质，解题的关键是熟练掌握矩形的性质解决问题，属于基础题．

6.（4分）已知在 $\triangle ABC$ 中，小明按照下列作图步骤进行尺规作图（示意图与作图步骤如表），那么交点 O 是 $\triangle ABC$ 的（ ）

示意图	作图步骤
	(1) 分别以点 B、C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BC$ 长为半径作圆弧，两弧分别交于点 M、N，联结 MN 交 BC 于点 D； (2) 分别以点 A、C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AC$ 长为半径作圆弧，两弧分别交于点 P、Q，联结 PQ 交 AC 于点 E； (3) 联结 AD、BE，相交于点 O

- A. 外心 B. 内切圆的圆心
C. 重心 D. 中心

【分析】根据尺规作图得到 AD 、 BE 是 $\triangle ABC$ 的中线，根据重心的概念判断即可．

【解答】解：由尺规作图可知， MN 、 PQ 分别是线段 BC 、 AC 的垂直平分线，

$\therefore$ 点 D 、 E 分别是 BC 、 AC 的中点，

$\therefore AD$ 、 BE 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，

故选：C.

【点评】本题考查的是尺规作图、三角形的重心的概念，掌握三角形的重心是三角形三条中线的交点是解题的关键.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) $(a^2)^3 = \underline{a^6}$.

【分析】直接根据幂的乘方法则运算即可.

【解答】解：原式 $= a^6$.

故答案为 a^6 .

【点评】本题考查了幂的乘方与积的乘法： $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是正整数)； $(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数).

8. (4 分) 化简： $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = \underline{\sqrt{3}-1}$.

【分析】根据二次根式的性质，算术平方根的值必须是正数，所以开方所得结果是 $|1 - \sqrt{3}|$ ，然后再去绝对值.

【解答】解：因为 $\sqrt{3} > 1$,

所以 $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3} - 1$

故答案为： $\sqrt{3} - 1$.

【点评】本题主要考查二次根式的化简，其中必须符合二次根式的性质.

9. (4 分) 方程 $\sqrt{2-x} = 1$ 的解为 $\underline{x=1}$.

【分析】方程两边平方即可去掉绝对值符号，解方程求得 x 的值，然后把 x 的值代入进行检验即可.

【解答】解：方程两边平方，得： $2 - x = 1$,

解得： $x = 1$.

经检验： $x = 1$ 是方程的解.

故答案是： $x = 1$.

【点评】本题考查了无理方程的解法，在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换

元法，本题用了平方法．

10. (4分) 函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 的定义域为 $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$ ．

【分析】根据二次根式被开方数是非负数、分式的分母不为 0 列出不等式，解不等式得到答案．

【解答】解：由题意得， $x+1 \geq 0$ ， $x \neq 0$ ，

解得， $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$ ，

故答案为： $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$ ．

【点评】本题考查的是函数自变量的取值范围的确定，掌握二次根式被开方数是非负数、分式的分母不为 0 是解题的关键．

11. (4分) 如果抛物线 $y = (k-1)x^2 + 9$ 在 y 轴左侧的部分是上升的，那么 k 的取值范围是 $k < 1$ ．

【分析】利用二次函数的性质得到抛物线开口向下，则 $k-1 < 0$ ，然后解不等式即可．

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = (k-1)x^2 + 9$ 在 y 轴左侧的部分是上升的，

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$\therefore k-1 < 0$ ，

解得 $k < 1$ ．

故答案为： $k < 1$ ．

【点评】本题考查了二次函数图象与系数的关系：二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小．当 $a > 0$ 时，抛物线开口向上；当 $a < 0$ 时，抛物线开口向下．

12. (4分) 从一副 52 张没有大小王的扑克牌中任意抽取一张牌，抽到梅花的概率是 $\frac{1}{4}$ ．

【分析】直接利用概率公式计算．

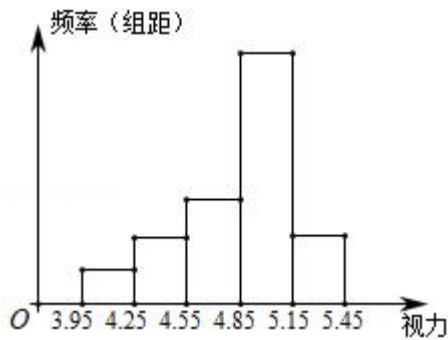
【解答】解：任意抽取一张牌，抽到梅花的概率 $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ ．

故答案为 $\frac{1}{4}$ ．

【点评】本题考查了概率公式：随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$ ．

13. (4分) 某中学为了解初三学生的视力情况，对全体初三学生的视力进行了检测，将所得数据整理后画出频率分布直方图（如图），已知图中从左到右第一、二、三、五小组的频率分别为 0.05，0.1，0.25，0.1，如果第四小组的频数是 180 人，那么该校初三共有 360

位学生.



【分析】先根据频率之和为 1 求出第四组的频率，再结合第四组的频数，利用总数 = 频数 $\div$ 频率求解可得.

【解答】解： $\because$ 图中从左到右第一、二、三、五小组的频率分别为 0.05, 0.1, 0.25, 0.1,
 $\therefore$ 第四小组的频率为 $1 - (0.05 + 0.1 + 0.25 + 0.1) = 0.5$,

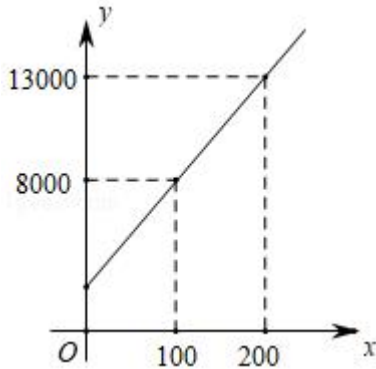
又 $\because$ 第四小组的频数是 180 人,

$\therefore$ 该校初三学生人数为 $180 \div 0.5 = 360$ (位),

故答案为: 360.

【点评】本题主要考查频数(率)分布直方图, 解题的关键是掌握频率之和为 1、总数 = 频数 $\div$ 频率.

14. (4 分) 某公司市场营销部的个人月收入 y (元) 与其每月的销售量 x (件) 成一次函数关系, 其图象如图所示, 根据图中给出的信息可知, 当营销人员的月销售量为 0 件时, 他的月收入是 3000 元.



【分析】根据函数图象中的数据, 可以求得 y 与 x 的函数关系式, 然后令 $x = 0$, 求出相应的 y 的值, 即可解答本题.

【解答】解: 设 y 与 x 的函数关系式为 $y = kx + b$,

$$\begin{cases} 100k + b = 8000 \\ 200k + b = 13000 \end{cases},$$

解得, $\begin{cases} k=50 \\ b=3000 \end{cases}$,

即 y 与 x 的函数关系式为 $y = 50x + 3000$,

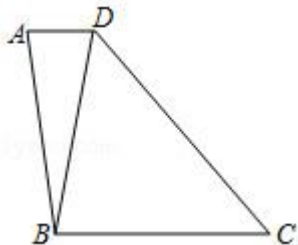
当 $x = 0$ 时, $y = 3000$,

即当营销人员的月销售量为 0 件时, 他的月收入是 3000 元,

故答案为: 3000.

【点评】 本题考查一次函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

15. (4 分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = BD = BC$, 如果 $\angle C = 50^\circ$, 那么 $\angle ABD$ 的度数是 20° .



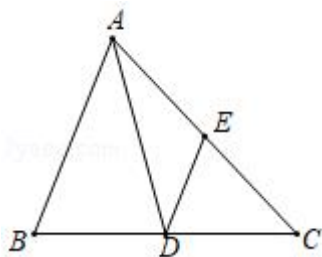
【分析】 根据题意可得三角形 BDC 和三角形 ABD 是等腰三角形, 再根据 $AD \parallel BC$, 可得 $\angle BDA = \angle DBC$, 再根据三角形内角和即可求出 $\angle ABD$ 的度数.

【解答】 解: $\because BD = BC$,
 $\therefore \angle BDC = \angle C = 50^\circ$,
 $\therefore \angle DBC = 180^\circ - 2\angle C = 80^\circ$,
 $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle BDA = \angle DBC = 80^\circ$,
 $\because AB = BD$,
 $\therefore \angle A = \angle BDA = 80^\circ$,
 $\therefore \angle ABD = 180^\circ - 2\angle A = 20^\circ$.

故答案为: 20° .

【点评】 本题考查了梯形, 解决本题的关键是掌握梯形的性质.

16. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为边 BC 上的中线, $DE \parallel AB$, 已知 $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD} = \underline{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}}$.



【分析】利用三角形法则可知： $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ ，求出 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{BD}$ 即可解决问题.

【解答】解： $\because AD$ 是中线，

$$\therefore BD = DC,$$

$$\therefore DE \parallel AB,$$

$$\therefore AE = EC,$$

$$\therefore AB \parallel DE, AB = 2DE,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = 2\vec{a},$$

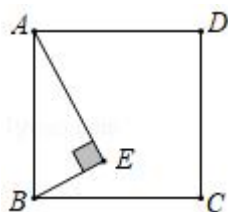
$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\text{故答案为: } 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

【点评】本题考查平面向量，三角形法则，平行线等分线段定理，三角形的中位线定理等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

17. (4分) 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 10$ ，点 E 在正方形内部，且 $AE \perp BE$ ， $\cot \angle BAE = 2$ ，如果以 E 为圆心， r 为半径的 $\odot E$ 与以 CD 为直径的圆相交，那么 r 的取值范围为 $3\sqrt{5}-5 < r < 3\sqrt{5}+5$.



【分析】设 AB 的中点为 G ，连接 EG ，延长 BE 交 CD 于 H ，根据直角三角形的性质得到 $EG = \frac{1}{2}AB = 5$ ，根据三角函数的定义得到 $CH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}CD = 5$ ，推出点 H 是以 CD 为直径的圆的圆心，设 $BE = k$ ， $AE = 2k$ ，得到 $BE = 2\sqrt{5}$ ，根据勾股定理得到 $BH =$

$\sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{5}$, 求得 $EH = BH - BE = 3\sqrt{5}$, 于是得到结论.

【解答】解: 设 AB 的中点为 G ,

连接 EG , 延长 BE 交 CD 于 H ,

$\because AE \perp BE$,

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$,

$\therefore EG = \frac{1}{2}AB = 5$,

$\because$ 在正方形 $ABCD$ 中, $\angle C = \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAE + \angle ABE = \angle ABE + \angle CBH = 90^\circ$,

$\therefore \angle CBH = \angle BAE$,

$\therefore \cot \angle BAE = \cot \angle CBH = \frac{BC}{CH} = 2$,

$\therefore CH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}CD = 5$,

$\therefore$ 点 H 是以 CD 为直径的圆的圆心,

设 $BE = k$, $AE = 2k$,

$\therefore AB = \sqrt{5}k = 10$,

$\therefore k = 2\sqrt{5}$,

$\therefore BE = 2\sqrt{5}$,

$\because \angle C = 90^\circ$, $BC = 10$, $CH = 5$,

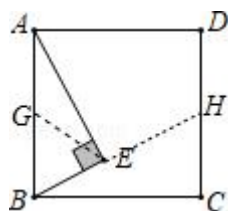
$\therefore BH = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{5}$,

$\therefore EH = BH - BE = 3\sqrt{5}$,

$\because r$ 为半径的 $\odot E$ 与以 CD 为直径的圆相交,

$\therefore r$ 的取值范围为 $3\sqrt{5} - 5 < r < 3\sqrt{5} + 5$,

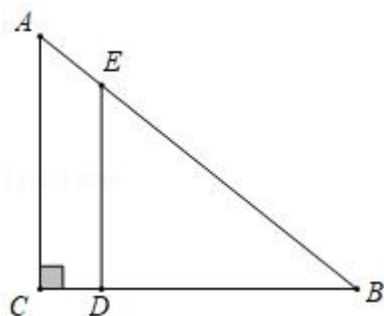
故答案为: $3\sqrt{5} - 5 < r < 3\sqrt{5} + 5$.



【点评】本题主要考查圆与圆的位置关系, 解题的关键是掌握圆周角定理、圆心角定理、三角形中位线定理、勾股定理、矩形的性质及圆与圆的位置关系等知识点.

18. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$, 点 D 、 E 分别是边 BC 、

AB 上一点, $DE \parallel AC$, $BD = 5\sqrt{2}$, 把 $\triangle BDE$ 绕着点 B 旋转得到 $\triangle BD'E'$ (点 D 、 E 分别与点 D' 、 E' 对应), 如果点 A 、 D' 、 E' 在同一直线上, 那么 AE' 的长为 $\frac{35\sqrt{2}}{4}$ 或 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$.



【分析】分两种情形分别求解：如图 1 中，当点 D' 在线段 AE' 上时，解直角三角形求出 AD' ， $D'E'$ 即可．如图 2 中，当 E' 在线段 AD' 上时，同法可得．

【解答】解：如图 1 中，当点 D' 在线段 AE' 上时，

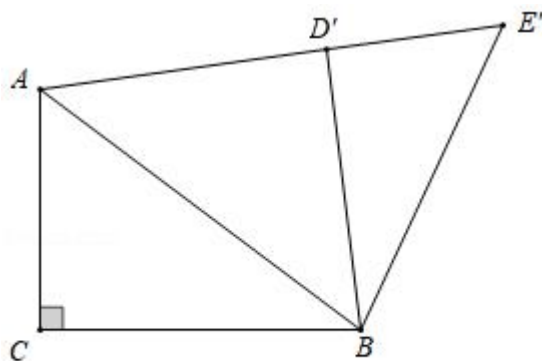


图1

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$\because DE \parallel AC$,

$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BCA$,

$$\therefore \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC},$$

$$\therefore \frac{DE}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{8},$$

$$\therefore DE = \frac{15\sqrt{2}}{4},$$

$\because \angle AD'B = 90^\circ$,

$$\therefore AD' = \sqrt{AB^2 - D'B^2} = \sqrt{10^2 - (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2},$$

$$\therefore AE' = AD' + D'E' = 5\sqrt{2} + \frac{15\sqrt{2}}{4} = \frac{35\sqrt{2}}{4},$$

如图2中, 当 E' 在线段 AD' 上时, 同法可得 $AE' = AD' - D'E' = 5\sqrt{2} - \frac{15\sqrt{2}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$

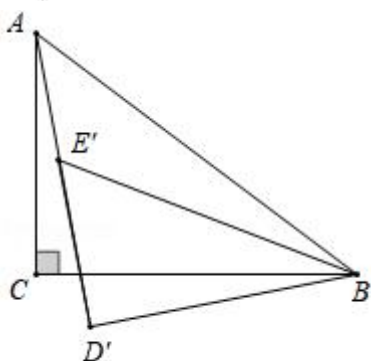


图2

综上所述, 满足条件的 AE' 的长为 $\frac{35\sqrt{2}}{4}$ 或 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

故答案为 $\frac{35\sqrt{2}}{4}$ 或 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

【点评】 本题考查旋转变换, 解直角三角形, 解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题, 属于中考常考题型.

三、解答题(本大题共7题, 满分78分)

19. (10分) 先化简, 再求值: $(1 - \frac{1}{x-1}) \div \frac{x^2-4x+4}{x^2-1}$, 其中 $x = \sqrt{5}+2$.

【分析】 先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式, 再将 x 的值代入计算可得.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= (\frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1}) \div \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x+1}{x-2}, \end{aligned}$$

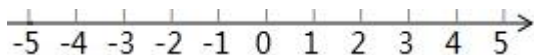
当 $x = \sqrt{5}+2$ 时,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\sqrt{5}+2+1}{\sqrt{5}+2-2} \\ &= \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

【点评】 本题主要考查分式的化简求值, 解题的关键是掌握分式的混合运算顺序和运算

法则.

20. (10 分) 解不等式组:
$$\begin{cases} 6(\frac{2}{3}x-2) < x-3 \text{ ①} \\ \frac{1-x}{2}-2 \leq x \text{ ②} \end{cases}$$
 并把解集在数轴上表示出来.



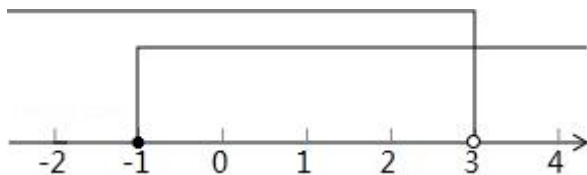
【分析】 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

【解答】 解: 解不等式①, 得: $x < 3$,

解不等式②, 得: $x \geq -1$,

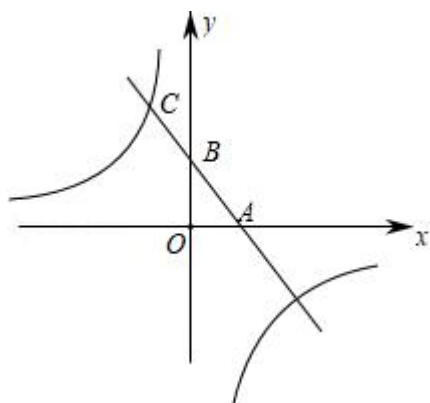
则不等式组的解集为 $-1 \leq x < 3$,

将不等式组的解集表示在数轴上如下:



【点评】 本题考查的是解一元一次不等式组, 正确求出每一个不等式解集是基础, 熟知“同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

21. (10 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = kx+3$ 与 x , y 轴分别交于点 A , B , 与双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 交于点 $C(a, 6)$, 已知 $\triangle AOB$ 的面积为 3, 求直线与双曲线的表达式.



【分析】 先利用一次函数解析式确定 B 点坐标, 再利用三角形面积公式求出 OA 得到 A 点坐标为 $(2, 0)$, 接着把 A 点坐标代入 $y = kx+3$ 中求出 k 得到一次函数解析式为 $y = -\frac{3}{2}x+3$, 然后利用一次函数解析式确定 C 点坐标, 最后利用待定系数法求反比例函数解析式.

【解答】解：当 $x=0$ 时， $y=kx+3=3$ ，则 $B(0, 3)$ ，

$\because \triangle AOB$ 的面积为 3，

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times OA = 3, \text{ 解得 } OA = 2,$$

$\therefore A$ 点坐标为 $(2, 0)$ ，

把 $A(2, 0)$ 代入 $y=kx+3$ 得 $2k+3=0$ ，解得 $k=-\frac{3}{2}$ ，

$$\therefore \text{一次函数解析式为 } y = -\frac{3}{2}x+3,$$

把 $C(a, 6)$ 代入得 $-\frac{3}{2}a+3=6$ ，解得 $a=-2$ ，

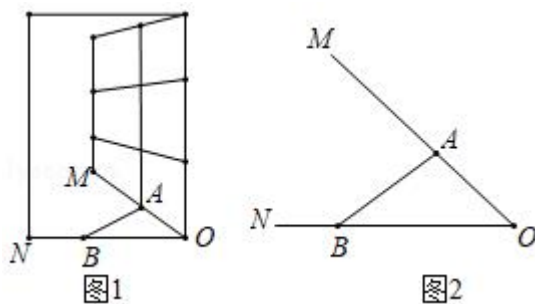
$\therefore C$ 点坐标为 $(-2, 6)$ ，

把 $C(-2, 6)$ 代入 $y=\frac{m}{x}$ 得 $m=-2 \times 6 = -12$ ，

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = -\frac{12}{x}.$$

【点评】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题：求反比例函数与一次函数的交点坐标，把两个函数关系式联立成方程组求解，若方程组有解则两者有交点，方程组无解，则两者无交点．也考查了待定系数法求函数解析式．

22. (10 分) 如图 1，一扇窗户打开一定角度，其中一端固定在窗户边 OM 上的点 A 处，另一端 B 在边 ON 上滑动，图 2 为某一位置从上往下看的平面图，测得 $\angle ABO$ 为 37° ， $\angle AOB$ 为 45° ， OB 长为 35 厘米，求 AB 的长（参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.6$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.8$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ）



【分析】作 $AC \perp OB$ 于点 C ，然后根据题意和锐角三角函数可以求得 AC 和 BC 的长，再根据勾股定理即可得到 AB 的长，本题得以解决．

【解答】解：作 $AC \perp OB$ 于点 C ，如右图 2 所示，

则 $\angle ACO = \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\because \angle AOC = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOC = \angle COA = 45^\circ,$$

$$\therefore AC = OC,$$

设 $AC = x$, 则 $OC = x$, $BC = 35 - x$,

$$\because \angle ABC = 37^\circ, \tan 37^\circ \approx 0.75,$$

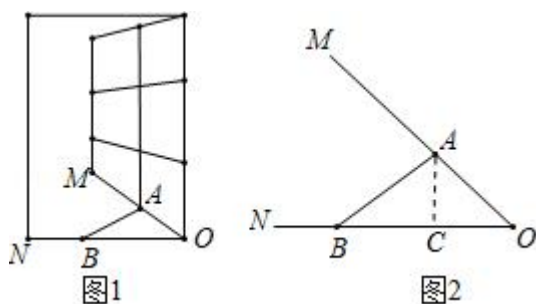
$$\therefore \frac{x}{35-x} = 0.75,$$

解得, $x = 15$,

$$\therefore 35 - x = 20,$$

$$\therefore AB = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ (厘米)},$$

即 AB 的长为 25 厘米.

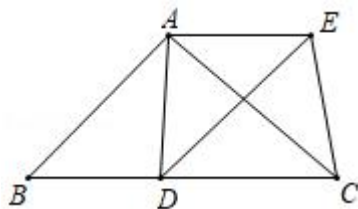


【点评】 本题考查解直角三角形的应用, 解答本题的关键是明确题意, 利用锐角三角函数解答.

23. (12 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 在边 BC 上, 联结 AD , 以 AD 为一边作 $\triangle ADE$, 满足 $AD = AE$, $\angle DAE = \angle BAC$, 联结 EC .

(1) 求证: CA 平分 $\angle DCE$;

(2) 如果 $AB^2 = BD \cdot BC$, 求证: 四边形 $ABDE$ 是平行四边形.



【分析】 (1) 根据等腰三角形的性质得到 $\angle B = \angle ACB$, 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 根据全等三角形的性质得到 $\angle B = \angle ACE$, 根据角平分线的定义证明结论;

(2) 根据相似三角形的判定定理得到 $\triangle ABD \sim \triangle CBA$, 得到 $\angle BAD = \angle ACB$, 分别证明 $AE \parallel BD$, $AB \parallel DE$, 根据平行四边形的判定定理证明.

【解答】 (1) 证明: $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle ACB,$$

$$\because \angle DAE = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC, \text{ 即 } \angle BAD = \angle CAE,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle B = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ACE,$$

$$\therefore CA \text{ 平分 } \angle DCE;$$

$$(2) \text{ 证明: } \because AB^2 = BD \cdot BC,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB},$$

$$\text{又 } \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ACB,$$

$$\because \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ACB,$$

$$\therefore AE \parallel BD,$$

$$\because AB = AC, AD = AE, \angle DAE = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ADE,$$

$$\therefore AB \parallel DE,$$

$$\because AE \parallel BD, AB \parallel DE,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABDE \text{ 是平行四边形.}$$

【点评】 本题考查的是相似三角形的判定和性质、全等三角形的判定和性质、平行四边形的判定, 掌握等腰三角形的性质、相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

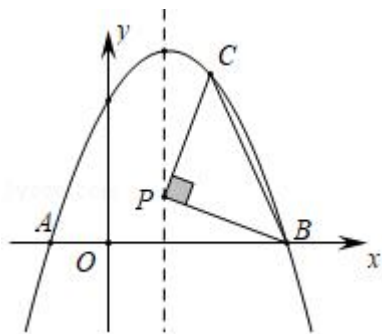
24. (12分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(3, 0)$, 该抛物线对称轴上的点 P 在 x 轴上方, 线段 PB 绕着点 P 逆时针旋转 90°

至 PC (点 B 对应点 C), 点 C 恰好落在抛物线上.

(1) 求抛物线的表达式并写出抛物线的对称轴;

(2) 求点 P 的坐标;

(3) 点 Q 在抛物线上, 联结 AC , 如果 $\angle QAC = \angle ABC$, 求点 Q 的坐标.



【分析】 (1) 将点 A 、 B 坐标代入抛物线表达式, 即可求解;

(2) 证明 $\triangle PMC \cong \triangle BNP$ (AAS), 则 $PM = BN$, $MC = PN$, 即可求解;

(3) 设 $MH = 3x$, 用 x 表示 AM 、 GM , 利用 $AG = AM + GM = \sqrt{2}$, 求出 x 的值; 在 $\triangle AOH$ 中, $OH = \sqrt{AH^2 - OA^2}$, 求得点 H 的坐标, 即可求解.

【解答】 解: (1) 将点 A 、 B 坐标代入抛物线表达式得: $\begin{cases} a-b+3=0 \\ 9a+3b+3=0 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$,

故抛物线的表达式为: $y = -x^2 + 2x + 3$ ①;

函数的对称轴为: $x = 1$;

(2) 设点 $C(m, n)$, 则 $n = -m^2 + 2m + 3$, 点 $P(1, s)$,

如图 1, 设抛物线对称轴交 x 轴于点 N , 过点 C 作 $CM \perp PN$ 交抛物线对称轴于点 M ,

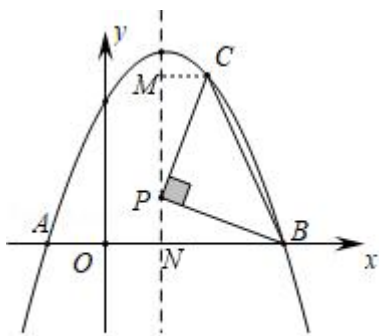


图1

$\because \angle PBN + \angle BPN = 90^\circ$, $\angle BPN + \angle MPC = 90^\circ$,

$\therefore \angle MPC = \angle PBN$,

$\because \angle PMC = \angle BNP = 90^\circ$, $PB = PC$,

$$\therefore \triangle PMC \cong \triangle BNP \text{ (AAS)},$$

$$\therefore PM = BN, MC = PN,$$

$$\therefore \begin{cases} m-1=s \\ n-s=2 \\ n=-m^2+2m+3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} m=2 \\ n=3 \\ s=1 \end{cases}$$

故点 $C(2, 3)$, 点 $P(1, 1)$;

故点 P 的坐标为 $(1, 1)$;

(3) 设直线 AC 交 y 轴于点 G , 直线 AQ 交 y 轴于点 H ,

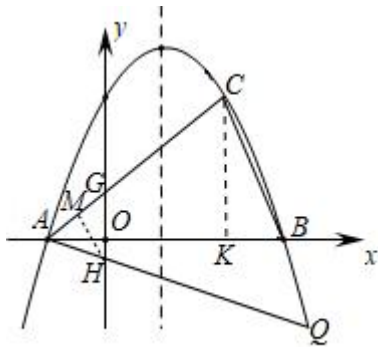


图2

由(2)知, 点 $C(2, 3)$, 而点 $A(-1, 0)$,

过点 C 作 $CK \perp x$ 轴于点 K , 则 $CK = AK = 3$,

故直线 AC 的倾斜角为 45° , 故 $\angle AGO = \angle GAO = 45^\circ$,

$$\therefore \tan \angle ABC = \frac{CK}{BK} = \frac{3}{3-2} = 3$$

$$\therefore \angle QAC = \angle ABC,$$

$$\therefore \tan \angle QAC = 3;$$

在 $\triangle AGH$ 中, 过点 H 作 $HM \perp AG$ 于点 M , 设 $MH = 3x$,

$$\therefore \angle AGO = 45^\circ, \text{ 则 } GO = AO = 1,$$

$$\therefore MG = MH = 3x,$$

$$\therefore \tan \angle QAC = 3, \text{ 则 } AM = x,$$

$$AG = AM + GM = x + 3x = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\text{解得: } x = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{在 } \triangle AHM \text{ 中, } AH = \sqrt{AM^2 + MH^2} = \sqrt{10}x = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

在 $\triangle AOH$ 中, $OH = \sqrt{AH^2 - OA^2} = \frac{1}{2}$, 故点 $H(0, -\frac{1}{2})$,

由点 A 、 H 的坐标得, 直线 AH 的表达式为: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ②,

联立①②并解得: $x = -1$ (舍去) 或 $\frac{7}{2}$,

故点 Q 的坐标为: $(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4})$.

【点评】 本题考查的是二次函数综合运用, 涉及到一次函数的性质、等腰三角形的性质、三角形全等、解直角三角形等, 本题的难点是用解三角形的方法求点 H 的坐标.

25. (14 分) 如图 1, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\cos C = \frac{3}{5}$, $DC = 5$, $BC = 6$, 以点 B 为圆心, BD 为半径作圆弧, 分别交边 CD 、 BC 于点 E 、 F .

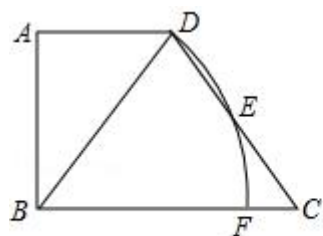


图1

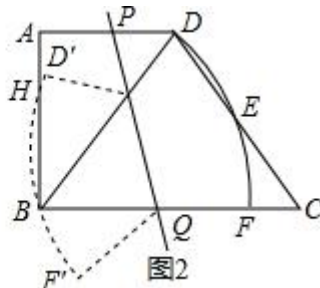


图2

- (1) 求 $\sin \angle BDC$ 的值;
- (2) 联结 BE , 设点 G 为射线 DB 上一动点, 如果 $\triangle ADG$ 相似于 $\triangle BEC$, 求 DG 的长;
- (3) 如图 2, 点 P 、 Q 分别为边 AD 、 BC 上动点, 将扇形 DBF 沿着直线 PQ 折叠, 折叠后的弧 $D'F'$ 经过点 B 与 AB 上的一点 H (点 D 、 F 分别对应点 D' 、 F'), 设 $BH = x$, $BQ = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式 (不需要写定义域).

【分析】 (1) 如图 1 中, 连接 BE , 过点 D 作 $DK \perp BC$ 于 K , 过点 B 作 $BJ \perp CD$ 于 J . 想办法求出 BJ , BD 即可解决问题.

(2) 分两种情形分别求解: ①当 $\triangle ADG \sim \triangle BCE$ 时. ②当 $\triangle ADG \sim \triangle ECB$ 时, 分别利用相似三角形的性质求解即可.

(3) 如图 3 中, 过点 B 作 $BJ \perp PQ$ 交 $\widehat{D'F'}$ 于 J , 连接 BJ , JH , JQ , 过点 J 作 $JG \perp BH$ 于 G , 过点 Q 作 $QK \perp JH$ 于 K . 由题意 $BQ = QJ = y$, 求出 QK , KJ , 在 $\text{Rt} \triangle QKJ$ 中, 利用勾股定理即可解决问题.

【解答】 解: (1) 如图 1 中, 连接 BE , 过点 D 作 $DK \perp BC$ 于 K , 过点 B 作 $BJ \perp CD$ 于 J .

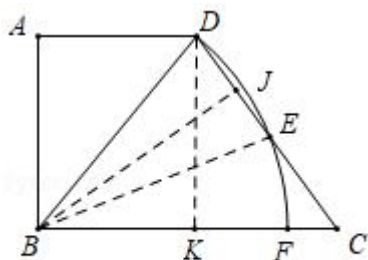


图1

在 $\text{Rt}\triangle CDK$ 中, $\because \angle DKC = 90^\circ$, $CD = 5$, $\cos \angle C = \frac{CK}{CD} = \frac{3}{5}$,

$$\therefore CK = 3,$$

$$\because BC = 6,$$

$$\therefore BK = CK = 3,$$

$$\because AD \parallel BC, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ$$

$$\because DK \perp BC,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABC = \angle DKB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABKD$ 是矩形,

$$\therefore AD = BK = 3,$$

$$\therefore DB = DC = 5, DK = \sqrt{CD^2 - CK^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\because S_{\triangle DCB} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot BJ,$$

$$\therefore BJ = \frac{24}{5},$$

$$\therefore DJ = \sqrt{BD^2 - BJ^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{7}{5},$$

$$\because BD = BE, BJ \perp DE,$$

$$\therefore DJ = JE = \frac{7}{5},$$

$$\therefore EC = CD - DJ = JE = 5 - \frac{14}{5} = \frac{11}{5},$$

$$\therefore \sin \angle BDC = \frac{BJ}{BD} = \frac{\frac{24}{5}}{5} = \frac{24}{25}.$$

(2) 如图 2 中,

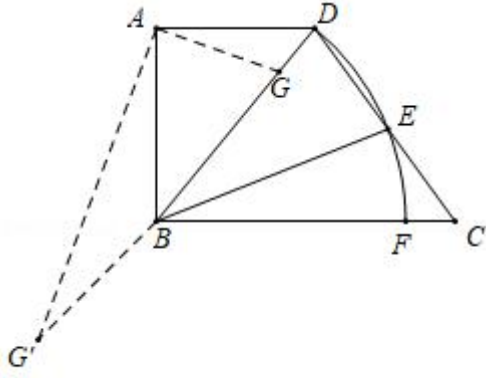


图2

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle DBC,$$

$$\because DB = DC,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle C,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle C,$$

$$\because \triangle ADG \text{ 相似 } \triangle BEC,$$

$\therefore$ 有两种情形：当 $\triangle ADG \sim \triangle BCE$ 时，

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DG}{EC},$$

$$\therefore \frac{3}{6} = \frac{DG}{\frac{11}{5}},$$

$$\therefore DG = \frac{11}{10},$$

当 $\triangle ADG \sim \triangle ECB$ 时，

$$\frac{AD}{EC} = \frac{DG}{BC},$$

$$\frac{3}{\frac{11}{5}} = \frac{DG}{6},$$

$$\therefore DG = \frac{90}{11}.$$

(3) 如图 3 中，过点 B 作 $BJ \perp PQ$ 交 $\widehat{DF}$ 于 J ，连接 BJ ， JH ， JQ ，过点 J 作 $JG \perp BH$ 于 G ，过点 Q 作 $QK \perp JH$ 于 K 。

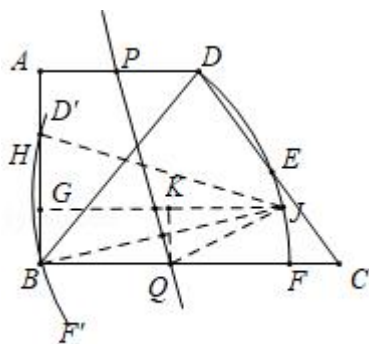


图3

由题意： $QB = QJ = y$ ， $BJ = BD = 5$ ，

$\therefore JB = JH$ ， $JG \perp BH$ ，

$$\therefore BG = GH = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore JG = \sqrt{BJ^2 - BG^2} = \sqrt{25 - \frac{1}{4}x^2},$$

$\therefore \angle GBQ = \angle BGK = \angle QKG = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $BGKQ$ 是矩形，

$$\therefore BQ = GK = y, \quad QK = GB = \frac{1}{2}x,$$

在 $\text{Rt}\triangle QKJ$ 中，

$$\therefore JQ^2 = QK^2 + KJ^2,$$

$$\therefore y^2 = \frac{1}{4}x^2 + \left(\sqrt{25 - \frac{1}{4}x^2} - y\right)^2,$$

$$\therefore y = \frac{25\sqrt{100 - x^2}}{100 - x^2}.$$

【点评】 本题属于圆综合题，考查了直角梯形的性质，矩形的判定和性质，解直角三角形，相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题，学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，属于中考常考题型．