

2020 年上海市浦东新区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 下列各数是无理数的是 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{4}$ C. $\frac{22}{7}$ D. $0.\dot{1}$

2. (4 分) 下列二次根式中，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{9}$ C. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ D. $\sqrt{18}$

3. (4 分) 一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象经过 ()

- A. 第一、二、三象限 B. 第二、三、四象限
C. 第一、三、四象限 D. 第一、二、四象限

4. (4 分) 如果一个正多边形的中心角等于 72° ，那么这个多边形的内角和为 ()

- A. 360° B. 540° C. 720° D. 900°

5. (4 分) 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，那么下列条件中，不能判断它是等腰梯形的是 ()

- A. $AB = DC$ B. $\angle DAB = \angle ABC$ C. $\angle ABC = \angle DCB$ D. $AC = DB$

6. (4 分) 矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 12$ ，如果分别以 A 、 C 为圆心的两圆外切，且点 D 在圆 C 内，点 B 在圆 C 外，那么圆 A 的半径 r 的取值范围是 ()

- A. $5 < r < 12$ B. $18 < r < 25$ C. $1 < r < 8$ D. $5 < r < 8$

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 函数 $y = \frac{2}{x-1}$ 的定义域是_____.

8. (4 分) 方程 $\sqrt{3-2x} = x$ 的根是_____.

9. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} x+5 \geq -1 \\ 2x < 5 \end{cases}$ 的解集是_____.

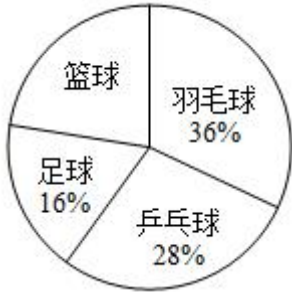
10. (4 分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + k = 0$ 有两个相等的实数根，则 k 值为_____.

11. (4 分) 一个不透明的口袋中有五个完全相同的小球，分别标号为 1、2、3、4、5，从中随机抽取一个小球，其标号是素数的概率是_____.

12. (4 分) 如果点 $A(3, y_1)$ 、 $B(4, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上，那么 y_1 _____ y_2 . (填“>”、“<”或“=”)

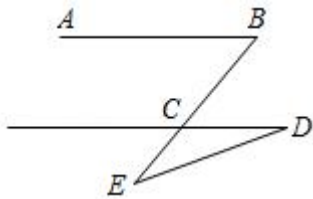
13. (4 分) 某校计划在“阳光体育”活动课程中开设乒乓球、羽毛球、篮球、足球四个体育活动项目. 为了了解全校学生对这四个活动项目的选择情况，体育老师从全体学生中

随机抽取了部分学生进行调查（规定每人必须并且只能选择其中一个项目），并把调查结果绘制成如图所示的统计图，根据这个统计图可以估计该学校 1500 名学生中选择篮球项目的学生约为_____名．



14.（4 分）已知向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 的方向相反， $|\vec{a}| = 3$ ，那么向量 $\vec{a}$ 用单位向量 $\vec{e}$ 表示为_____．

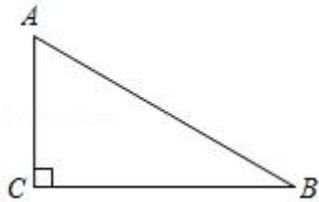
15.（4 分）如图， $AB \parallel CD$ ，如果 $\angle B = 50^\circ$ ， $\angle D = 20^\circ$ ，那么 $\angle E =$ _____．



16.（4 分）在地面上离旗杆底部 15 米处的地方用测角仪测得旗杆顶端的仰角为 α ，如果测角仪的高为 1.5，那么旗杆的高位_____米．（用含 α 的三角比表示）

17.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ， $BC = 6$ ，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上．如果 D 为 AB 中点，且 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ ，那么 AE 的长度为_____．

18.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $BC = \sqrt{3}$ ， D 是 BC 边上一点，沿直线 AD 翻折 $\triangle ABD$ ，点 B 落在点 E 处，如果 $\angle ABE = 45^\circ$ ，那么 BD 的长为_____．



三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

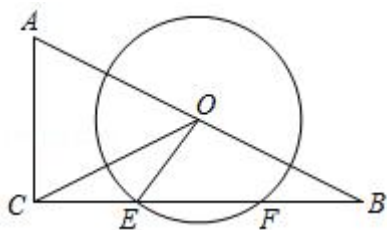
19.（10 分）计算： $(\sqrt{2020} - 1)^0 + |1 - \sqrt{3}| + (\frac{1}{3})^{-1} + 8\frac{1}{3}$ ．

20. (10 分) 先化简, 再求值: $\frac{2}{a-1} \div \frac{2a-4}{a^2-1} - \frac{a}{a-2}$, 其中 $a = \sqrt{5}+2$.

21. (10 分) 已知: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 16$, 点 O 为斜边 AB 的中点, 以 O 为圆心, 5 为半径的圆与 BC 相交于 E 、 F 两点, 联结 OE 、 OC .

(1) 求 EF 的长;

(2) 求 $\angle COE$ 的正弦值.

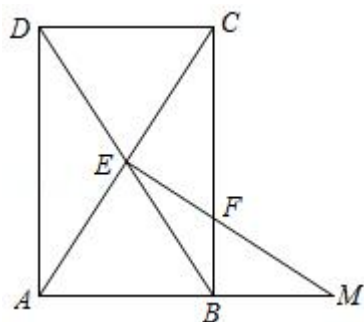


22. (10 分) 学校开展“书香校园”活动, 购买了一批图书. 已知购买科普类图书花费了 10000 元, 购买文学类图书花费了 9000 元, 其中科普类图书平均每本的价格比文学类图书平均每本的价格贵 5 元, 且购买科普类图书的数量比购买文学类图书数量少 100 本, 科普类图书平均每本的价格是多少元?

23. (12分) 已知: 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 E , 过点 E 作 AC 的垂线交边 BC 于点 F , 与 AB 的延长线交于点 M , 且 $AB \cdot AM = AE \cdot AC$.

求证: (1) 四边形 $ABCD$ 是矩形;

(2) $DE^2 = EF \cdot EM$.



24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 B (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 对称轴是直线 $x = 1$.

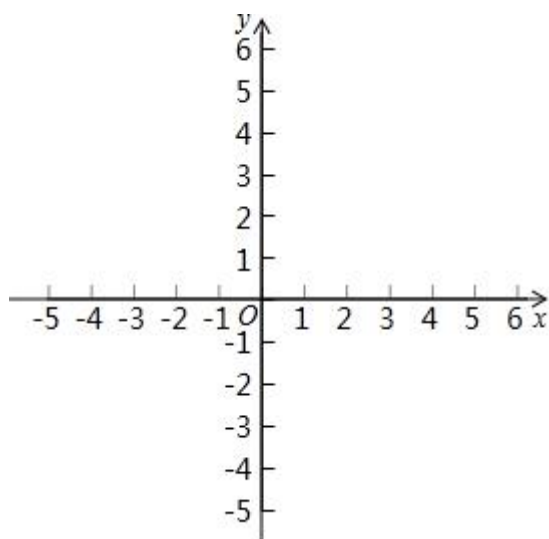
(1) 求抛物线的表达式;

(2) 直线 MN 平行于 x 轴, 与抛物线交于 M, N 两点 (点 M 在点 N 的左侧), 且 $MN = \frac{3}{4}AB$,

点 C 关于直线 MN 的对称点为 E , 求线段 OE 的长;

(3) 点 P 是该抛物线上一点, 且在第一象限内, 联结 CP, EP , EP 交线段 BC 于点 F ,

当 $S_{\triangle CPF} : S_{\triangle CEF} = 1 : 2$ 时, 求点 P 的坐标.

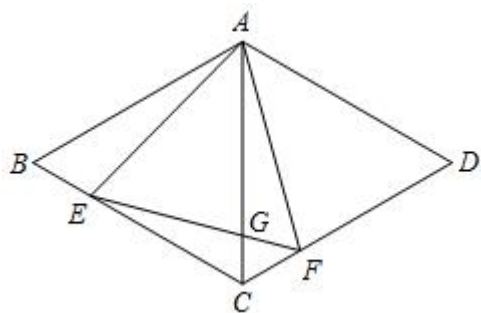


25. (14分) 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AC=2$ ， $\angle B=60^\circ$. 点 E 为边 BC 上的一个动点（与点 B 、 C 不重合）， $\angle EAF=60^\circ$ ， AF 与边 CD 相交于点 F ，联结 EF 交对角线 AC 于点 G . 设 $CE=x$ ， $EG=y$.

(1) 求证： $\triangle AEF$ 是等边三角形；

(2) 求 y 关于 x 的函数解析式，并写出 x 的取值范围；

(3) 点 O 是线段 AC 的中点，联结 EO ，当 $EG=EO$ 时，求 x 的值.



2020 年上海市浦东新区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列各数是无理数的是（ ）

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{4}$

C. $\frac{22}{7}$

D. $0.\dot{1}$

【分析】无理数就是无限不循环小数．理解无理数的概念，一定要同时理解有理数的概念，有理数是整数与分数的统称．即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数．由此即可判定选择项．

【解答】解：A. $\sqrt{5}$ 是无理数；

B. $\sqrt{4}=2$ ，是整数，属于有理数；

C. $\frac{22}{7}$ 是分数，属于有理数；

D. $0.\dot{1}$ 是循环小数，属于有理数．

故选：A．

【点评】此题主要考查了无理数的定义，其中初中范围内学习的无理数有： π ， 2π 等；开方开不尽的数；以及像 $0.1010010001\cdots$ ，等有这样规律的数．

2.（4 分）下列二次根式中，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{6}$

B. $\sqrt{9}$

C. $\sqrt{\frac{1}{3}}$

D. $\sqrt{18}$

【分析】各项化简后，利用同类二次根式定义判断即可．

【解答】解：与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ，

故选：C．

【点评】此题考查了同类二次根式，熟练掌握同类二次根式的定义是解本题的关键．

3.（4 分）一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象经过（ ）

A. 第一、二、三象限

B. 第二、三、四象限

C. 第一、三、四象限

D. 第一、二、四象限

【分析】根据一次函数的性质即可求得．

【解答】解： $\because$ 一次函数 $y = -2x + 3$ 中， $k = -2 < 0$ ， $b = 3 > 0$ ，

$\therefore$ 一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象经过第一、二、四象限．

故选：D.

【点评】本题考查了一次函数图象与系数的关系，牢记“ $k < 0$ ， $b > 0 \Leftrightarrow$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、四象限”是解题的关键.

4. (4分) 如果一个正多边形的中心角等于 72° ，那么这个多边形的内角和为 ()

- A. 360° B. 540° C. 720° D. 900°

【分析】根据正多边形的中心角和为 360° 和正多边形的中心角相等，列式计算即可求得边数，然后代入内角和公式求解即可.

【解答】解：这个多边形的边数是 $360 \div 72 = 5$ ，

所以内角和为 $(5 - 2) \times 180^\circ = 540^\circ$

故选：B.

【点评】本题考查的是正多边形的中心角的有关计算，掌握正多边形的中心角和为 360° 和正多边形的中心角相等是解题的关键.

5. (4分) 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，那么下列条件中，不能判断它是等腰梯形的是 ()

- A. $AB = DC$ B. $\angle DAB = \angle ABC$ C. $\angle ABC = \angle DCB$ D. $AC = DB$

【分析】等腰梯形的判定定理有：①有两腰相等的梯形是等腰梯形，②对角线相等的梯形是等腰梯形，③在同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形，根据以上内容判断即可.

【解答】解：A、 $\because AD \parallel BC$ ， $AB = DC$ ，

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 是等腰梯形，故本选项错误；

B、根据 $\angle DAB = \angle ABC$ ，不能推出四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，故本选项正确；

C、 $\because \angle ABC = \angle DCB$ ，

$\therefore BD = BC$ ，

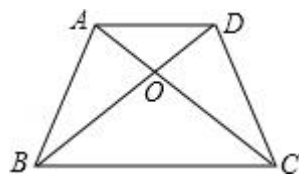
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，故本选项错误；

D、 $\because AC = BD$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，故本选项错误.

故选：B.



【点评】本题考查了对等腰梯形的判定定理的应用，主要考查学生的推理能力和辨析能

力，注意：等腰梯形的判定定理有：①有两腰相等的梯形是等腰梯形，②对角线相等的梯形是等腰梯形，③在同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形。

6. (4分) 矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 12$ ，如果分别以 A 、 C 为圆心的两圆外切，且点 D 在圆 C 内，点 B 在圆 C 外，那么圆 A 的半径 r 的取值范围是 ()

A. $5 < r < 12$ B. $18 < r < 25$ C. $1 < r < 8$ D. $5 < r < 8$

【分析】首先根据点 D 在 $\odot C$ 内，点 B 在 $\odot C$ 外，求得 $\odot C$ 的半径是大于 5 而小于 12；再根据勾股定理求得 $AC = 13$ ，最后根据两圆外切的位置关系得到其数量关系。

【解答】解：∵ 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 12$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 13,$$

∵ 点 D 在 $\odot C$ 内，点 B 在 $\odot C$ 外，

∴ $\odot C$ 的半径 R 的取值范围为： $5 < R < 12$ ，

当 $\odot A$ 和 $\odot C$ 外切时，圆心距等于两圆半径之和是 13，设 $\odot C$ 的半径是 R_c ，即 $R_c + r = 13$ ，

又 $\because 5 < R_c < 12$ ，

则 r 的取值范围是 $1 < r < 8$ 。

故选：C。

【点评】此题综合运用了点和圆的位置关系以及两圆的位置关系与数量关系之间的等价关系。同时注意勾股定理的运用。特别注意两圆相切，可能内切或外切。

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4分) 函数 $y = \frac{2}{x-1}$ 的定义域是 $x \neq 1$ 。

【分析】根据分式有意义的条件是分母不为 0；分析原函数式可得关系式 $x - 1 \neq 0$ ，解可得自变量 x 的取值范围。

【解答】解：根据题意，有 $x - 1 \neq 0$ ，

解可得 $x \neq 1$ 。

故答案为 $x \neq 1$ 。

【点评】本题主要考查了分式有意义的条件是分母不等于 0。

8. (4分) 方程 $\sqrt{3-2x} = x$ 的根是 1 。

【分析】此题需把方程两边平方去根号后求解，然后把求得的值进行检验即可得出答案。

【解答】解：两边平方得： $3 - 2x = x^2$ ，

整理得： $x^2 + 2x - 3 = 0$ ，

$$(x+3)(x-1)=0,$$

解得： $x_1 = -3$ ， $x = 1$ ，

检验：当 $x = -3$ 时，原方程的左边 $\neq$ 右边，

当 $x = 1$ 时，原方程的左边 = 右边，

则 $x = 1$ 是原方程的根．

故答案为：1．

【点评】 本题主要考查解无理方程，在解无理方程时最常用的方法是两边平方法及换元法，本题用了平方法．注意要把求得的 x 的值代入原方程进行检验．

9. (4分) 不等式组 $\begin{cases} x+5 \geq -1 \\ 2x < 5 \end{cases}$ 的解集是 $-6 \leq x < \frac{5}{2}$ ．

【分析】 分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集．

【解答】 解：解不等式 $x+5 \geq -1$ ，得： $x \geq -6$ ，

解不等式 $2x < 5$ ，得： $x < \frac{5}{2}$ ，

则不等式组的解集为 $-6 \leq x < \frac{5}{2}$ ，

故答案为： $-6 \leq x < \frac{5}{2}$ ．

【点评】 本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键．

10. (4分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + k = 0$ 有两个相等的实数根，则 k 值为 3．

【分析】 根据判别式的意义得到 $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4k = 0$ ，然后解关于 k 的一元一次方程即可．

【解答】 解：根据题意得 $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4k = 0$ ，

解得 $k = 3$ ．

故答案为：3．

【点评】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ：当 $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根．

11. (4分) 一个不透明的口袋中有五个完全相同的小球，分别标号为 1、2、3、4、5，从中随机抽取一个小球，其标号是素数的概率是 $\frac{3}{5}$ ．

【分析】从袋子中随机抽取 1 个小球共有 5 种等可能结果,其中抽出的标号是素数的有 2、3、5 这 3 种结果,再利用概率公式可得.

【解答】解:从标号为 1、2、3、4、5 的 5 个小球中随机抽取 1 个小球共有 5 种等可能结果,其中抽出的标号是素数的有 2、3、5 这 3 种结果,
所以从中随机抽取一个小球,其标号是素数的概率是 $\frac{3}{5}$,
故答案为: $\frac{3}{5}$.

【点评】此题考查了概率公式的应用.注意用到的知识点为:概率=所求情况数与总情况数之比.

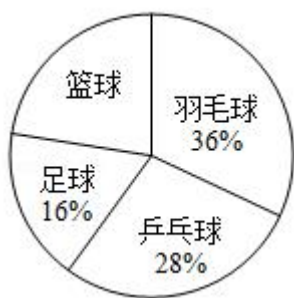
12. (4 分) 如果点 $A(3, y_1)$ 、 $B(4, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上,那么 y_1 > y_2 . (填“>”、“<”或“=”)

【分析】反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象在一、三象限,在每个象限内, y 随 x 的增大而减小,判断出 y 的值的大小关系.

【解答】解: $\because k = 2 > 0$,
 $\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象在一、三象限,且在每个象限内 y 随 x 的增大而减小,
 $\because A(3, y_1)$ 、 $B(4, y_2)$ 同在第一象限,且 $3 < 4$,
 $\therefore y_1 > y_2$,
故答案为 >.

【点评】本题考查反比例函数的图象和性质,掌握反比例函数的增减性是解决问题的关键,

13. (4 分) 某校计划在“阳光体育”活动课程中开设乒乓球、羽毛球、篮球、足球四个体育活动项目.为了了解全校学生对这四个活动项目的选择情况,体育老师从全体学生中随机抽取了部分学生进行调查(规定每人必须并且只能选择其中一个项目),并把调查结果绘制成如图所示的统计图,根据这个统计图可以估计该学校 1500 名学生中选择篮球项目的学生约为 300 名.



【分析】用整体1减去乒乓球、羽毛球、足球所占的百分比，求出篮球所占的百分比，再用该学校1500名学生乘以篮球所占的百分比即可得出答案。

【解答】解：根据题意得：

$$1500 \times (1 - 16\% - 28\% - 36\%) = 300 \text{ (名)},$$

答：该学校1500名学生中选择篮球项目的学生约为300名；

故答案为：300.

【点评】此题考查了用样本估计总体，求出篮球所占的百分比是解题的关键。

14. (4分) 已知向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 的方向相反， $|\vec{a}| = 3$ ，那么向量 $\vec{a}$ 用单位向量 $\vec{e}$ 表示为 $-3\vec{e}$ 。

【分析】根据向量的定义，确定模的大小，以及方向即可。

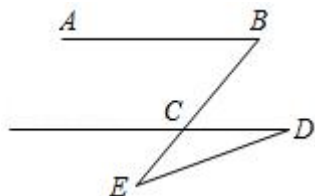
【解答】解： $\because$ 向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 的方向相反， $|\vec{a}| = 3$ ，

$$\therefore \vec{a} = -3\vec{e},$$

故答案为 $-3\vec{e}$ 。

【点评】本题考查平面向量的定义，解题的关键是理解题意，熟练掌握基本知识，属于中考常考题型。

15. (4分) 如图， $AB \parallel CD$ ，如果 $\angle B = 50^\circ$ ， $\angle D = 20^\circ$ ，那么 $\angle E = \underline{30^\circ}$ 。



【分析】根据平行线的性质得出 $\angle BCD = 50^\circ$ ，利用三角形外角性质解答即可。

【解答】解： $\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle BCD = \angle B = 50^\circ,$$

$$\because \angle D = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle E = \angle BCD - \angle D = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ,$$

故答案为: 30° .

【点评】 此题考查平行线的性质, 关键是根据平行线的性质得出 $\angle BCD = 50^\circ$ 解答.

16. (4分) 在地面上离旗杆底部 15 米处的地方用测角仪测得旗杆顶端的仰角为 α , 如果测角仪的高为 1.5, 那么旗杆的高位 $(1.5+15\tan\alpha)$ 米. (用含 α 的三角比表示)

【分析】 由题意得, 在直角三角形中, 知道了已知角的邻边求对边, 用正切值计算即可.

【解答】 解: 根据题意可得: 旗杆比仪器高 $15\tan\alpha$, 测角仪高为 1.5 米,

故旗杆的高为 $(1.5+15\tan\alpha)$ 米.

故答案为: $(1.5+15\tan\alpha)$

【点评】 本题考查仰角的定义, 要求学生能借助仰角构造直角三角形并解直角三角形.

17. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 8$, $BC = 6$, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上. 如果 D 为 AB 中点, 且 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$, 那么 AE 的长度为 5 或 $\frac{7}{5}$.

【分析】 先求出 DE 的长, 分两种情况讨论, 利用相似三角形的性质和等腰三角形的性质可求解.

【解答】 解: $\because \angle ABC = 90^\circ$, $AB = 8$, $BC = 6$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{64 + 36} = 10,$$

$\because D$ 为 AB 中点,

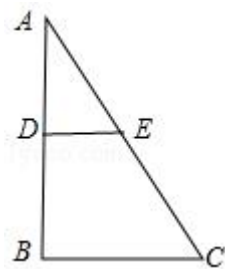
$$\therefore AD = 4,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC},$$

$$\therefore \frac{4}{8} = \frac{DE}{6}$$

$$\therefore DE = 3,$$

如图, $\angle ADE = \angle ABC = 90^\circ$ 时,

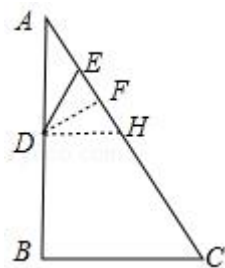


$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\therefore AE = 5,$$

如图, $\angle ADE \neq \angle ABC$ 时, 取 AC 中点 H , 连接 DH , 过点 D 作 $DF \perp AC$ 于 F ,



$\because$ 点 D 是 AB 中点, 点 H 是 AC 的中点,

$$\therefore DH = \frac{1}{2}BC = 3, AH = HC = 5, DH \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADH = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\because S_{\triangle ADH} = \frac{1}{2} \times AH \times DF = \frac{1}{2} \times AD \times DH,$$

$$\therefore 5 \times DF = 12,$$

$$\therefore DF = \frac{12}{5},$$

$$\therefore FH = \sqrt{DH^2 - DF^2} = \sqrt{9 - \frac{144}{25}} = \frac{9}{5},$$

$$\because DE = DH, DF \perp AC,$$

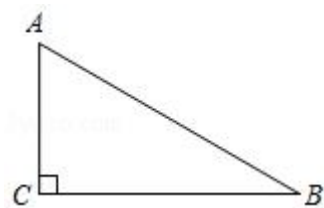
$$\therefore EF = FH = \frac{9}{5},$$

$$\therefore AE = AH - \frac{9}{5} - \frac{9}{5} = \frac{7}{5},$$

故答案为: 5 或 $\frac{7}{5}$.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质, 利用分类讨论思想解决问题是本题的关键.

18. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $BC = \sqrt{3}$, D 是 BC 边上一点, 沿直线 AD 翻折 $\triangle ABD$, 点 B 落在点 E 处, 如果 $\angle ABE = 45^\circ$, 那么 BD 的长为 $2\sqrt{3}-2$.



【分析】 过 D 作 $DF \perp AB$ 于 F , 根据折叠可得 $\angle ADF = \angle DAF = 45^\circ$, 设 $DF = AF = x$,

则 $BF = \sqrt{3}x$, $BD = 2x$, 根据 $AB = 2$, 即可得到 x 的值, 进而得出 BD 的长.

【解答】解: 如图所示, 过 D 作 $DF \perp AB$ 于 F ,

$\because$ $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $BC = \sqrt{3}$,

$\therefore AB = 2$, $\angle ABC = 30^\circ$,

由折叠可得, $AB = AE$, $\angle BAD = \angle EAD$,

$\therefore \angle ABE = \angle AEB = 45^\circ$,

$\therefore \angle BAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAE = 45^\circ$,

$\therefore \angle ADF = \angle DAF = 45^\circ$,

$\therefore AF = DF$,

设 $DF = AF = x$, 则 $BF = \sqrt{3}x$, $BD = 2x$,

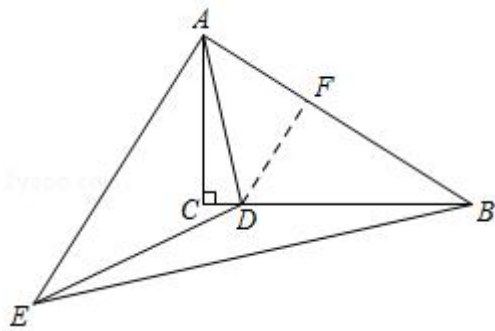
$\because AB = AF + BF$,

$\therefore 2 = x + \sqrt{3}x$,

解得 $x = \sqrt{3} - 1$,

$\therefore BD = 2x = 2\sqrt{3} - 2$,

故答案为: $2\sqrt{3} - 2$.



【点评】本题主要考查了折叠问题以及含 30° 角的直角三角形的性质, 在直角三角形中, 30° 角所对的直角边等于斜边的一半.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $(\sqrt{2020} - 1)^0 + |1 - \sqrt{3}| + (\frac{1}{3})^{-1} + 8\frac{1}{3}$.

【分析】直接利用绝对值的性质、负整数指数幂的性质、分数指数幂的性质分别化简得出答案.

【解答】解: 原式 $= 1 + \sqrt{3} - 1 + 3 + 2$

$$= 5 + \sqrt{3}.$$

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

20. (10分) 先化简，再求值： $\frac{2}{a-1} \div \frac{2a-4}{a^2-1} - \frac{a}{a-2}$ ，其中 $a = \sqrt{5}+2$.

【分析】先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式，再将 a 的值代入计算可得.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解：原式} &= \frac{2}{a-1} \cdot \frac{(a+1)(a-1)}{2(a-2)} - \frac{a}{a-2} \\ &= \frac{a+1}{a-2} - \frac{a}{a-2} \\ &= \frac{1}{a-2}, \end{aligned}$$

当 $a = \sqrt{5}+2$ 时，

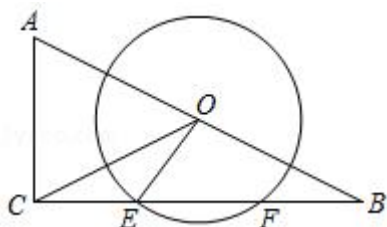
$$\text{原式} = \frac{1}{\sqrt{5}+2-2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【点评】本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

21. (10分) 已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $BC = 16$ ，点 O 为斜边 AB 的中点，以 O 为圆心，5 为半径的圆与 BC 相交于 E 、 F 两点，联结 OE 、 OC .

(1) 求 EF 的长；

(2) 求 $\angle COE$ 的正弦值.



【分析】(1) 作 $OM \perp EF$ 于 M ，如图，根据垂径定理得到 $EM = FM$ ，利用三角形中位线性质得到 $OM = \frac{1}{2}AC = 4$ ，然后利用勾股定理计算出 EM ，从而得到 EF 的长；

(2) 利用 $CE = OE = 5$ 得到 $\angle OEC = \angle OCE$ ，在利用勾股定理计算出 $OC = 4\sqrt{5}$ ，然后利用正弦的定义求出 $\sin \angle OCM$ ，从而得到 $\angle COE$ 的正弦值.

【解答】解：(1) 作 $OM \perp EF$ 于 M ，如图，则 $EM = FM$ ，

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore OM \perp BC,$$

$$\therefore OM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle OEM$ 中, $EM = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$$\therefore EF = 2EM = 6;$$

$$(2) CM = \frac{1}{2}BC = 8,$$

$$\therefore CE = 8 - 3 = 5,$$

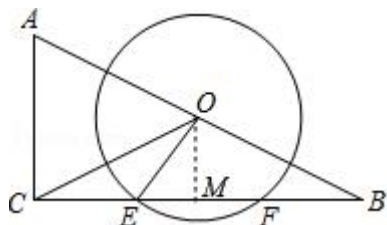
$$\therefore CE = OE,$$

$$\therefore \angle OEC = \angle OCE,$$

在 $\text{Rt}\triangle OCM$ 中, $OC = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$,

$$\therefore \sin \angle OCM = \frac{OM}{CM} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \angle COE \text{ 的正弦值为 } \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



【点评】 本题考查了圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半．也考查了垂径定理和解直角三角形．

22. (10 分) 学校开展“书香校园”活动，购买了一批图书．已知购买科普类图书花费了 10000 元，购买文学类图书花费了 9000 元，其中科普类图书平均每本的价格比文学类图书平均每本的价格贵 5 元，且购买科普类图书的数量比购买文学类图书数量少 100 本，科普类图书平均每本的价格是多少元？

【分析】 根据题意表示出科普类图书和文学类图书的平均价格，再利用购买科普类图书的数量比购买文学类图书数量少 100 本得出等式求出答案．

【解答】 解：设科普类图书平均每本的价格是 x 元，则文学类图书平均每本的价格为 $(x - 5)$ 元，根据题意可得：

$$\frac{10000}{x} = \frac{9000}{x-5} - 100,$$

解得： $x = 20$ ，

经检验得： $x = 20$ 是原方程的根，

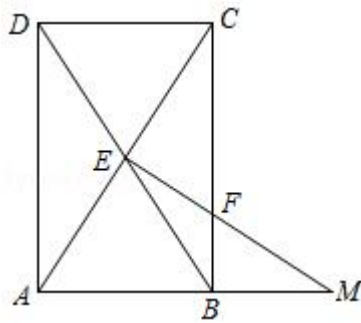
答：科普类图书平均每本的价格是 20 元．

【点评】 此题主要考查了分式方程的应用，正确得出等量关系是解题关键．

23. (12分) 已知：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 E ，过点 E 作 AC 的垂线交边 BC 于点 F ，与 AB 的延长线交于点 M ，且 $AB \cdot AM = AE \cdot AC$ 。

求证：(1) 四边形 $ABCD$ 是矩形；

$$(2) DE^2 = EF \cdot EM.$$



【分析】(1) 根据相似三角形的性质与判定可知 $\angle AME = \angle ACB$ ，从而可得 $\angle ACB + \angle BAC = 90^\circ$ ，所以 $\square ABCD$ 是矩形。

(2) 由 (1) 可知： $DE = EC$ ， $AE = EC$ ，易证 $\angle CME = \angle AME = \angle ECB$ ，所以 $\triangle CEF \sim \triangle MEC$ ，所以 $\frac{EC}{ME} = \frac{EF}{EC}$ ，从而得证。

【解答】 解：(1) $\because AB \cdot AM = AE \cdot AC$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AM},$$

$$\because \angle CAB = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle AME,$$

$$\therefore \angle AME = \angle ACB,$$

$$\text{由于 } \angle AME + \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\text{则 } \angle ACB + \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \square ABCD \text{ 是矩形.}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知: } DE = EC, AE = EC,$$

$$\because ME \perp AC,$$

$$\therefore ME \text{ 平分 } \angle AMC,$$

$$\therefore \angle CME = \angle AME = \angle ECB,$$

$$\because \angle MEC = \angle FEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle MEC,$$

$$\therefore \frac{EC}{ME} = \frac{EF}{EC},$$

$$\therefore EC^2 = EF \cdot EM,$$

$$\text{即 } DE^2 = EF \cdot EM$$

【点评】本题考查相似三角形的综合问题，解题的关键是熟练运用相似三角形的性质与判定，以及矩形的性质与判定，本题综合程度较高．

24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 B (点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 $C(0, 3)$ ，对称轴是直线 $x = 1$ ．

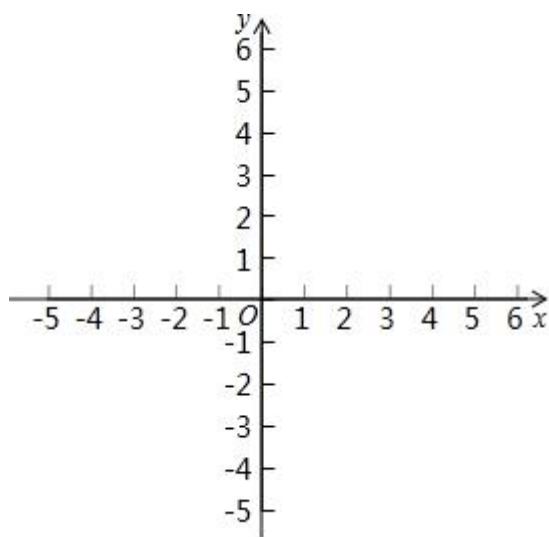
(1) 求抛物线的表达式；

(2) 直线 MN 平行于 x 轴，与抛物线交于 M 、 N 两点(点 M 在点 N 的左侧)，且 $MN = \frac{3}{4}AB$ ，

点 C 关于直线 MN 的对称点为 E ，求线段 OE 的长；

(3) 点 P 是该抛物线上一点，且在第一象限内，联结 CP 、 EP ， EP 交线段 BC 于点 F ，

当 $S_{\triangle CPF} : S_{\triangle CEF} = 1 : 2$ 时，求点 P 的坐标．



【分析】(1) 根据对称轴为直线 $x = 1$ 求出 $b = 2$ ，即可求解；

(2) 由抛物线的对称性知， $QM = QN = \frac{1}{2}MN = \frac{3}{2}$ ，则点 $N(\frac{5}{2}, \frac{7}{4})$ ，即 MN 在直线 $y = \frac{7}{4}$ 上，即可求解；

(3) $S_{\triangle CPF} : S_{\triangle CEF} = 1 : 2$ ，即 $\frac{PF}{EF} = \frac{1}{2}$ ，而 $\triangle PP'F \sim \triangle ECF$ ，则 $\frac{PF}{EF} = \frac{PP'}{EC}$ ，即 $\frac{-a^2 + 3a}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}$ ，

即可求解．

【解答】解：(1) 由题意得： $-\frac{b}{2 \times (-1)} = 1$ ，解得： $b = 2$ ，

$\therefore$ 抛物线与 y 轴交于点 $C(0, 3)$ ，故 $c = 3$ ，

故抛物线的表达式为： $y = -x^2 + 2x + 3$ ；

(2) 对于 $y = -x^2 + 2x + 3$, 令 $y = 0$, 则 $x = -1$ 或 3 ,

故点 A 、 B 的坐标分别为: $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$, 则 $AB = 4$, $MN = \frac{3}{4}AB = 3$,

如图 1, 作抛物线的对称轴交 MN 于点 Q ,

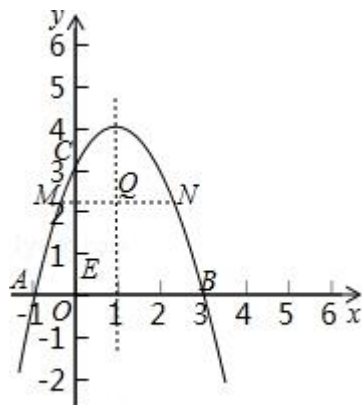


图1

由抛物线的对称性知, $QM = QN = \frac{1}{2}MN = \frac{3}{2}$,

则点 N 的横坐标为 $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, 故点 $N(\frac{5}{2}, \frac{7}{4})$, 即 MN 在直线 $y = \frac{7}{4}$ 上,

则点 C 关于 MN 的对称点 E 的坐标为: $(0, \frac{1}{2})$,

即 $OE = \frac{1}{2}$;

(3) 过点 P 作 $PP' \parallel OC$ 交 BC 于点 P' ,

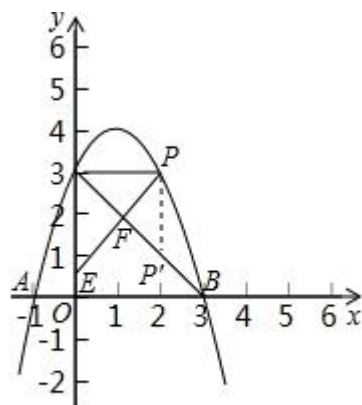


图2

设直线 BC 的表达式为: $y = mx + n$, 则 $\begin{cases} n=3 \\ 0=3m+n \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} m=-1 \\ n=3 \end{cases}$,

故直线 BC 的表达式为: $y = -x + 3$,

设点 $P(a, -a^2 + 2a + 3)$, 则点 $P'(a, -a + 3)$,

$$\text{则 } PP' = (-a^2 + 2a + 3) - (-a + 3) = -a^2 + 3a,$$

$$\because S_{\triangle CPF} : S_{\triangle CEF} = 1 : 2, \text{ 即 } \frac{PF}{EF} = \frac{1}{2},$$

$$\because PP' \parallel CE,$$

$$\therefore \triangle PP'F \sim \triangle ECF,$$

$$\therefore \frac{PF}{EF} = \frac{PP'}{EC}, \text{ 即 } \frac{-a^2 + 3a}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得: } a = \frac{5}{2} \text{ 或 } \frac{1}{2},$$

$$\text{故点 } P \text{ 的坐标为: } \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right) \text{ 或 } \left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right).$$

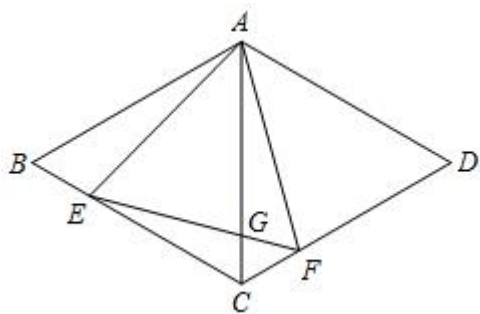
【点评】 本题考查的是二次函数综合运用，涉及到一次函数的性质、三角形相似、面积的计算等，综合性比较强，难度适中。

25. (14分) 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AC = 2$ ， $\angle B = 60^\circ$ 。点 E 为边 BC 上的一个动点（与点 B 、 C 不重合）， $\angle EAF = 60^\circ$ ， AF 与边 CD 相交于点 F ，联结 EF 交对角线 AC 于点 G 。设 $CE = x$ ， $EG = y$ 。

(1) 求证： $\triangle AEF$ 是等边三角形；

(2) 求 y 关于 x 的函数解析式，并写出 x 的取值范围；

(3) 点 O 是线段 AC 的中点，联结 EO ，当 $EG = EO$ 时，求 x 的值。



【分析】 (1) 根据菱形的性质得 $AB = BC$ ，而 $\angle B = 60^\circ$ ，则可判定 $\triangle ABC$ 为等边三角形，得到 $\angle BAC = 60^\circ$ ， $AC = AB$ ，易得 $\angle ACF = 60^\circ$ ， $\angle BAE = \angle CAF$ ，然后利用“ASA”可证明 $\triangle AEB \cong \triangle AFC$ ，得出 $AE = AF$ ，则结论可得出；

(2) 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ，求出 AE ，证明 $\triangle BAE \sim \triangle CEG$ ，得出 $\frac{EG}{AE} = \frac{EC}{AB}$ ，则可得答案；

(3) 证明 $\triangle COE \sim \triangle CEA$ ，由比例线段 $\frac{CE}{CO} = \frac{CA}{CE}$ 可得出答案。

【解答】 (1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$$\therefore AB = BC,$$

$$\because \angle B = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ, AC = AB,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle EAC = 60^\circ,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACF = 60^\circ,$$

$$\because \angle EAF = 60^\circ, \text{ 即 } \angle EAC + \angle CAF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAF,$$

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle AFC$ 中,

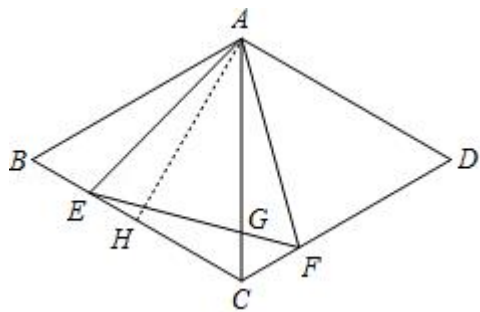
$$\begin{cases} \angle BAE = \angle CAF \\ AB = AC \\ \angle B = \angle ACD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle AFC \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AE = AF,$$

$\therefore \triangle AEF$ 为等边三角形;

(2) 解: 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ,



$\because \triangle AEF$ 为等边三角形,

$$\therefore AE = EF = \sqrt{AH^2 + EH^2}, \angle AEF = 60^\circ,$$

$$\because \angle ABH = 60^\circ,$$

$$\therefore AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{3}, BH = HC = 1,$$

$$\therefore EH = |x - HC| = |x - 1|,$$

$$\therefore EF = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (x-1)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 4},$$

$$\because \angle AEF = \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CEG + \angle AEB = \angle AEB + \angle BAE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle CEG = \angle BAE,$$

$$\because \angle B = \angle ACE = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle CEG,$$

$$\therefore \frac{EG}{AE} = \frac{EC}{AB},$$

$$\therefore \frac{EG}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} = \frac{x}{2},$$

$$\therefore y = EG = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 2x + 4} \quad (0 < x < 2),$$

(3) 解: $\because AB = 2$, $\triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore AC = 2,$$

$$\therefore OA = OC = 1,$$

$$\because EG = EO,$$

$$\therefore \angle EOG = \angle EGO,$$

$$\because \angle EGO = \angle ECG + \angle CEG = 60^\circ + \angle CEG,$$

$$\angle CEA = \angle CEG + \angle AEF = 60^\circ + \angle CEG,$$

$$\therefore \angle EGO = \angle CEA,$$

$$\therefore \angle EOG = \angle CEA,$$

$$\because \angle ECA = \angle OCE,$$

$$\therefore \triangle COE \sim \triangle CEA,$$

$$\therefore \frac{CE}{CO} = \frac{CA}{CE},$$

$$\therefore CE^2 = CO \cdot CA,$$

$$\therefore x^2 = 1 \times 2,$$

$$\therefore x = \sqrt{2} \quad (x = -\sqrt{2} \text{舍去}),$$

$$\text{即 } x = \sqrt{2}.$$

【点评】 本题是四边形综合题, 考查了菱形的性质、等边三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质; 熟练掌握菱形的性质, 证明三角形相似和等边三角形是解决问题的关键.