

2020 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 2020 的相反数是 ()

A. 2020

B. -2020

C. $\frac{1}{2020}$

D. $-\frac{1}{2020}$

2. (4 分) 下列计算中，正确的是 ()

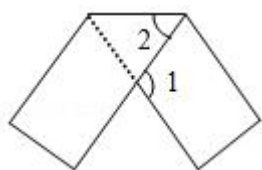
A. $a^2 \cdot a^4 = a^8$

B. $(a^3)^4 = a^7$

C. $(ab)^4 = ab^4$

D. $a^6 \div a^3 = a^3$

3. (4 分) 若将一个长方形纸条折成如图的形状，则图中 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的数量关系是 ()



A. $\angle 1 = 2\angle 2$

B. $\angle 1 = 3\angle 2$

C. $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

D. $\angle 1 + 2\angle 2 = 180^\circ$

4. (4 分) 已知两圆的半径分别为 2 和 5，如果这两圆内含，那么圆心距 d 的取值范围是 ()

A. $0 < d < 3$

B. $0 < d < 7$

C. $3 < d < 7$

D. $0 \leq d < 3$

5. (4 分) 如果正十边形的边长为 a ，那么它的半径是 ()

A. $\frac{a}{\sin 36^\circ}$

B. $\frac{a}{\cos 36^\circ}$

C. $\frac{a}{2\sin 18^\circ}$

D. $\frac{a}{2\cos 18^\circ}$

6. (4 分) 已知在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，那么下列条件中能判定这个四边形是矩形的是 ()

A. $AD = BC$, $AC = BD$

B. $AC = BD$, $\angle BAD = \angle BCD$

C. $AO = CO$, $AB = BC$

D. $AO = OB$, $AC = BD$

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. (4 分) 分解因式： $2mx - 6my =$ _____.

8. (4 分) 函数 $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

9. (4 分) 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 这七个数中，任意抽取一个数，那么抽到素数的概率是_____.

10. (4分) 一组数据: 2, 2, 5, 5, 6, 那么这组数据的方差是_____.

11. (4分) 不等式组 $\begin{cases} -2x+1 < 0 \\ x-2 \leq 1 \end{cases}$ 的解集是_____.

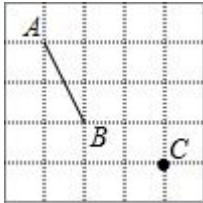
12. (4分) 方程 $\sqrt{x+2} = x$ 的根是_____.

13. (4分) 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 m 的取值范围是_____.

14. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, $DE \parallel BC$, DE 经过 $\triangle ABC$ 的重心,

如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$, 那么 $\overrightarrow{DE} =$ _____. (用 $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 表示)

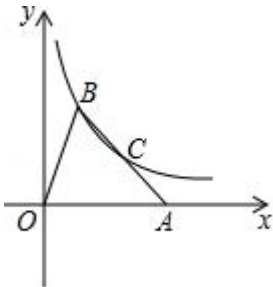
15. (4分) 如图, 已知在 5×5 的正方形网格中, 点 A 、 B 、 C 在小正方形的顶点上, 如果小正方形的边长都为 1, 那么点 C 到线段 AB 所在直线的距离是_____.



16. (4分) 如图, 已知在平面直角坐标系中, 点 A 在 x 轴正半轴上, 点 B 在第一象限内,

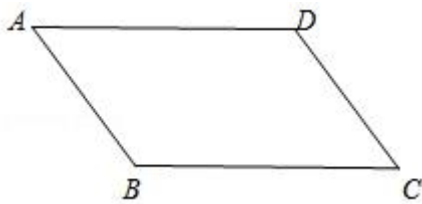
反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过 $\triangle OAB$ 的顶点 B 和边 AB 的中点 C , 如果 $\triangle OAB$ 的面积为 6,

那么 k 的值是_____.



17. (4分) 定义: 对于函数 $y = f(x)$, 如果当 $a \leq x \leq b$ 时, $m \leq y \leq n$, 且满足 $n - m = k$ ($b - a$) (k 是常数), 那么称此函数为“ k 级函数”. 如: 正比例函数 $y = -3x$, 当 $1 \leq x \leq 3$ 时, $-9 \leq y \leq -3$, 则 $-3 - (-9) = k(3 - 1)$, 求得 $k = 3$, 所以函数 $y = -3x$ 为“3 级函数”. 如果一次函数 $y = 2x - 1$ ($1 \leq x \leq 5$) 为“ k 级函数”, 那么 k 的值是_____.

18. (4分) 如图, 已知在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 10$, $BC = 15$, $\tan \angle A = \frac{4}{3}$, 点 P 是边 AD 上一点, 联结 PB , 将线段 PB 绕着点 P 逆时针旋转 90° 得到线段 PQ , 如果点 Q 恰好落在平行四边形 $ABCD$ 的边上, 那么 AP 的值是_____.



三.解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

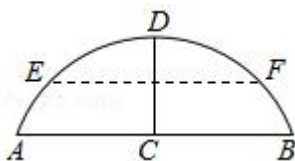
19.（10 分）先化简，再求值： $(\frac{1}{a+2} + \frac{2}{a-2}) \div \frac{3a+2}{a^2+2a}$ ，其中 $a = \sqrt{5}+1$.

20.（10 分）解方程组：
$$\begin{cases} x+2y=12 \\ x^2-3xy+2y^2=0 \end{cases}$$
.

21.（10 分）如图，有一拱桥的桥拱是圆弧形，已知桥拱的水面跨度 AB （弧所对的弦的长）为 8 米，拱高 CD （弧的中点到弦的距离）为 2 米.

（1）求桥拱所在圆的半径长；

（2）如果水面 AB 上升到 EF 时，从点 E 测得桥顶 D 的仰角为 α ，且 $\cot \alpha = 3$ ，求水面上升的高度.



22. (10 分) 某社区为了加强居民对新型冠状病毒肺炎防护知识的了解, 鼓励社区居民在线参与作答《2020 年新型冠状病毒肺炎的防护全国统一考试(全国卷)》试卷(满分 100 分), 社区管理员随机从该社区抽取 40 名居民的答卷, 并对他们的成绩(单位: 分)进行整理、分析, 过程如下:

收集数据

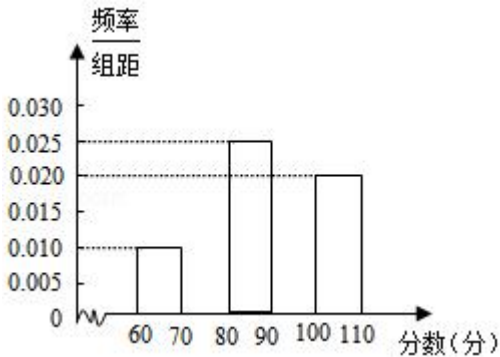
85 65 95 100 90 95 85 65 75 85 100 90 70 90 100 80 80 100 95 75 80 100 80 95 65 100 90 95
85 80 100 75 60 90 70 80 95 75 100 90

整理数据(每组数据可含最低值, 不含最高值)

分组(分)	频数	频率
60 ~ 70	4	0.1
70 ~ 80	a	b
80 ~ 90	10	0.25
90 ~ 100	c	d
100 ~ 110	8	0.2

分析数据

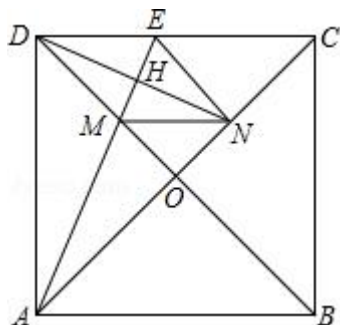
- (1) 填空: $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____, $d =$ _____;
- (2) 补全频率分布直方图;
- (3) 由此估计该社区居民在线答卷成绩在_____ (分) 范围内的人数最多;
- (4) 如果该社区共有 800 人参与答卷, 那么可估计该社区成绩在 90 分及以上约为_____人.



23. (12分) 如图, 已知在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , 点 M 在线段 OD 上, 联结 AM 并延长交边 DC 于点 E , 点 N 在线段 OC 上, 且 $ON = OM$, 联结 DN 与线段 AE 交于点 H , 联结 EN 、 MN .

(1) 如果 $EN \parallel BD$, 求证: 四边形 $DMNE$ 是菱形;

(2) 如果 $EN \perp DC$, 求证: $AN^2 = NC \cdot AC$.

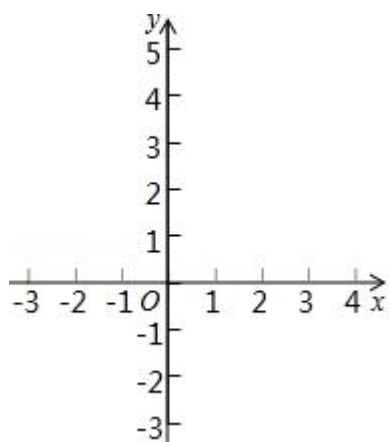


24. (12分) 如图, 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 经过点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(3, 2)$, 与 y 轴相交于点 C .

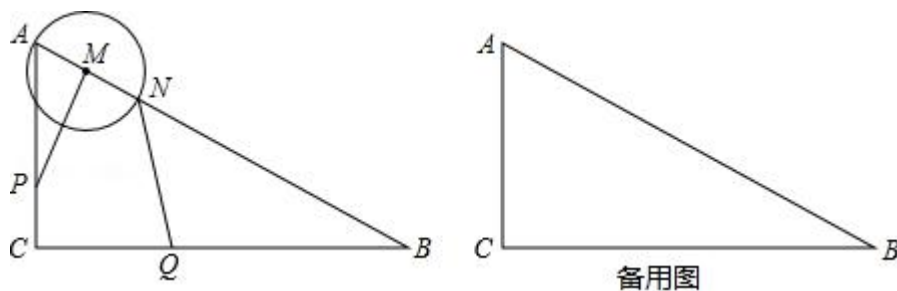
(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 点 P 是抛物线在第一象限内一点, 联结 AP , 如果点 C 关于直线 AP 的对称点 D 恰好落在 x 轴上, 求直线 AP 的截距;

(3) 在 (2) 小题的条件下, 如果点 E 是 y 轴正半轴上一点, 点 F 是直线 AP 上一点. 当 $\triangle EAO$ 与 $\triangle EAF$ 全等时, 求点 E 的纵坐标.



25. (14分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 8$, 点 P 是射线 AC 上一点(不与点 A 、 C 重合), 过 P 作 $PM \perp AB$, 垂足为点 M , 以 M 为圆心, MA 长为半径的 $\odot M$ 与边 AB 相交的另一个交点为点 N , 点 Q 是边 BC 上一点, 且 $CQ = 2CP$, 联结 NQ .
- (1) 如果 $\odot M$ 与直线 BC 相切, 求 $\odot M$ 的半径长;
- (2) 如果点 P 在线段 AC 上, 设线段 $AP = x$, 线段 $NQ = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式及定义域;
- (3) 如果以 NQ 为直径的 $\odot O$ 与 $\odot M$ 的公共弦所在直线恰好经过点 P , 求线段 AP 的长.



2020 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 2020 的相反数是 ()

- A. 2020 B. - 2020 C. $\frac{1}{2020}$ D. $-\frac{1}{2020}$

【分析】直接利用相反数的定义得出答案.

【解答】解：2020 的相反数是：- 2020.

故选：B.

【点评】此题主要考查了相反数，正确把握相反数的定义是解题关键.

2. (4 分) 下列计算中，正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a^4 = a^8$ B. $(a^3)^4 = a^7$ C. $(ab)^4 = ab^4$ D. $a^6 \div a^3 = a^3$

【分析】结合幂的乘方与积的乘方、同底数幂的乘法和除法的概念和运算法则进行求解即可.

【解答】解：A、 $a^2 \cdot a^4 = a^6 \neq a^8$ ，本选项错误；

B、 $(a^3)^4 = a^{12} \neq a^7$ ，本选项错误；

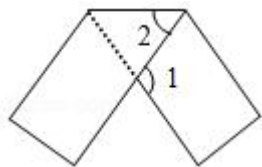
C、 $(ab)^4 = a^4b^4 \neq ab^4$ ，本选项错误；

D、 $a^6 \div a^3 = a^3$ ，本选项正确.

故选：D.

【点评】本题考查了幂的乘方与积的乘方，解答本题的关键在于熟练掌握该知识点的概念和运算法则.

3. (4 分) 若将一个长方形纸条折成如图的形状，则图中 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的数量关系是 ()



- A. $\angle 1 = 2\angle 2$ B. $\angle 1 = 3\angle 2$
C. $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ D. $\angle 1 + 2\angle 2 = 180^\circ$

【分析】由折叠可得， $\angle 2 = \angle ABC$ ，再根据平行线的性质，即可得出 $\angle 1 = \angle ABD = 2\angle 2$

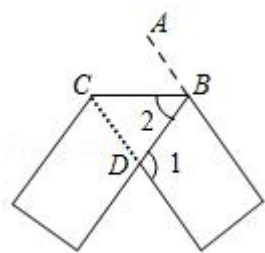
2.

【解答】解：如图，由折叠可得， $\angle 2 = \angle ABC$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle ABD = 2\angle 2$ ，

故选：A.



【点评】本题考查了平行线的性质，翻折变换的性质，熟记各性质并准确识图是解题的关键.

4. (4分) 已知两圆的半径分别为2和5，如果这两圆内含，那么圆心距 d 的取值范围是 ()

A. $0 < d < 3$

B. $0 < d < 7$

C. $3 < d < 7$

D. $0 \leq d < 3$

【分析】本题直接告诉了两圆的半径及两圆的位置的关系，根据数量关系与两圆位置关系的对应情况便可直接得出答案.

【解答】解：由题意知，

两圆内含，则 $0 \leq d < 5 - 2$ ，

即如果这两圆内含，那么圆心距 d 的取值范围是 $0 \leq d < 3$ ，

故选：D.

【点评】本题主要考查圆与圆的位置关系，①外离，则 $d > R + r$ ；②外切，则 $d = R + r$ ；

③相交，则 $R - r < d < R + r$ ；④内切，则 $d = R - r$ ；⑤内含，则 $d < R - r$.

5. (4分) 如果正十边形的边长为 a ，那么它的半径是 ()

A. $\frac{a}{\sin 36^\circ}$

B. $\frac{a}{\cos 36^\circ}$

C. $\frac{a}{2\sin 18^\circ}$

D. $\frac{a}{2\cos 18^\circ}$

【分析】设 AB 是圆内接正十边形的边长，连接 OA 、 OB ，过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C ，解直角三角形即可得到结论.

【解答】解：设 AB 是圆内接正十边形的边长，

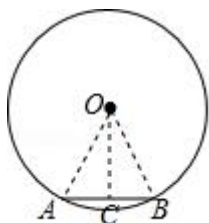
连接 OA 、 OB ，过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C ，

$$\text{则 } \angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB = 18^\circ , \quad AC = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2} ,$$

$$\therefore OA = \frac{AC}{\sin \angle AOC} = \frac{a}{2 \sin 18^\circ} ,$$

故选：C.



【点评】 本题考查了正多边形和圆，等腰三角形的性质，解直角三角形，正确的理解题意是解题的关键．

6. (4分) 已知在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，那么下列条件中能判定这个四边形是矩形的是 ()

A. $AD = BC, AC = BD$

B. $AC = BD, \angle BAD = \angle BCD$

C. $AO = CO, AB = BC$

D. $AO = OB, AC = BD$

【分析】 根据矩形的判定方法，一一判断即可解决问题．

【解答】 解：A、 $AB \parallel DC, AD = BC$ ，无法得出四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故无法判断四边形 $ABCD$ 是矩形．故错误；

B、 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle BAD + \angle ABC = \angle ADC + \angle BCD = 180^\circ ,$$

$$\because \angle BAD = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ADC,$$

$\therefore$ 得出四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\because AC = BD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形．故正确；

C、 $\because AO = CO, AB = BC$,

$$\therefore BD \perp AC, \angle ABD = \angle CBD,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CDB,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle CDB,$$

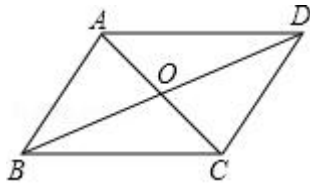
$$\therefore BC = CD,$$

$$\therefore AB = CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，无法判断四边形 $ABCD$ 是矩形．故错误；

D 、 $AO = OB$ ， $AC = BD$ 可无法判断四边形 $ABCD$ 是矩形，故错误；

故选：B．



【点评】 本题考查矩形的判定方法、熟练掌握矩形的判定方法是解决问题的关键，记住对角线相等的平行四边形是矩形，有一个角是 90 度的平行四边形是矩形，有三个角是 90 度的四边形是矩形，属于中考常考题型．

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7.（4 分）分解因式： $2mx - 6my = \underline{2m(x - 3y)}$ ．

【分析】 原式提取公因式即可得到结果．

【解答】 解：原式 $= 2m(x - 3y)$ ．

故答案为： $2m(x - 3y)$ ．

【点评】 此题考查了因式分解 - 提公因式法，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键．

8.（4 分）函数 $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ 中自变量 x 的取值范围是 $\underline{x > 1}$ ．

【分析】 根据二次根式的性质和分式的意义，被开方数大于或等于 0，分母不等于 0，可以求出 x 的范围．

【解答】 解：根据题意得： $x - 1 > 0$ ，

解得： $x > 1$ ．

故答案为： $x > 1$ ．

【点评】 本题考查了函数自变量的取值范围．函数自变量的范围一般从三个方面考虑：（1）当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；（2）当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；（3）当函数表达式是二次根式时，被开方数非负．

9.（4 分）从 1，2，3，4，5，6，7，这七个数中，任意抽取一个数，那么抽到素数的概率

是 $\frac{4}{7}$.

【分析】根据素数定义，让素数的个数除以数的总数即为所求的概率.

【解答】解： $\because 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 这 7 个数有 4 个素数是 2, 3, 5, 7;

$\therefore$ 抽到素数的概率是 $\frac{4}{7}$.

故答案为: $\frac{4}{7}$.

【点评】本题考查的是概率公式. 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$; 找到素数的个数为易错点.

10. (4 分) 一组数据: 2, 2, 5, 5, 6, 那么这组数据的方差是 $\frac{14}{5}$.

【分析】先求出这组数据的平均数, 然后根据方差公式计算得出答案.

【解答】解: $\because \bar{x} = \frac{1}{5}(2+2+5+5+6) = 4$,

$\therefore S^2 = \frac{1}{5}[(4-2)^2 + (4-2)^2 + (4-5)^2 + (4-5)^2 + (4-6)^2] = \frac{14}{5}$,

故答案为: $\frac{14}{5}$.

【点评】本题考查了方差, 熟练掌握方差的计算公式是解题的关键.

11. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} -2x+1 < 0 \\ x-2 \leq 1 \end{cases}$ 的解集是 $\frac{1}{2} < x \leq 3$.

【分析】分别求出各不等式的解集, 再求出其公共解集即可.

【解答】解: $\begin{cases} -2x+1 < 0 \text{ ①} \\ x-2 \leq 1 \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式①, 得 $x > \frac{1}{2}$;

解不等式②, 得 $x \leq 3$;

所以原不等式组的解集为: $\frac{1}{2} < x \leq 3$,

故答案为: $\frac{1}{2} < x \leq 3$.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组, 熟知“同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

12. (4 分) 方程 $\sqrt{x+2} = x$ 的根是 $x = 2$.

【分析】先把方程两边平方, 使原方程化为整式方程 $x+2 = x^2$, 解此一元二次方程得到

$x_1 = 2, x_2 = -1$, 把它们分别代入原方程得到 $x_2 = -1$ 是原方程的增根, 由此得到原方程的根为 $x = 2$.

【解答】解: 方程两边平方得, $x+2 = x^2$,

解方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 得 $x_1 = 2, x_2 = -1$,

经检验 $x_2 = -1$ 是原方程的增根,

所以原方程的根为 $x = 2$.

故答案为: $x = 2$.

【点评】本题考查了无理方程: 根号内含有未知数的方程叫无理方程; 解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解, 常常采用平方法去根号.

13. (4分) 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 m 的取值范围是 $m < 1$ 且 $m \neq 0$.

【分析】根据二次项系数非零及根的判别式 $\Delta > 0$, 即可得出关于 m 的一元一次不等式组, 解之即可得出 m 的取值范围.

【解答】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (-2)^2 - 4m > 0 \end{cases},$$

解得: $m < 1$ 且 $m \neq 0$.

故答案为: $m < 1$ 且 $m \neq 0$.

【点评】本题考查了根的判别式以及一元二次方程的定义, 根据二次项系数非零及根的判别式 $\Delta > 0$, 找出关于 m 的一元一次不等式组是解题的关键.

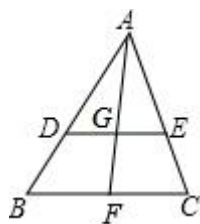
14. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别在边 AB, AC 上, $DE \parallel BC$, DE 经过 $\triangle ABC$ 的重心,

如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$, 那么 $\overrightarrow{DE} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}\vec{n} - \frac{2}{3}\vec{m}}}$. (用 $\vec{m}, \vec{n}$ 表示)

【分析】由 $DE \parallel BC$ 推出 $AD: AB = AG: AF = DE: BC = 2: 3$, 推出 $DE = \frac{2}{3}BC$, 求出 $\overrightarrow{BC}$

即可解决问题.

【解答】解: 如图设 G 是重心, 作中线 AF .



$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore AD:AB = AG:AF = DE:BC = 2:3,$$

$$\therefore DE = \frac{2}{3}BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC},$$

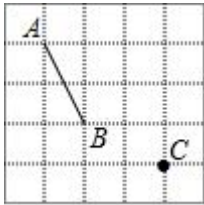
$$\therefore \overrightarrow{BC} = \vec{n} - \vec{\pi},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}(\vec{n} - \vec{\pi}) = \frac{2}{3}\vec{n} - \frac{2}{3}\vec{\pi}$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}\vec{n} - \frac{2}{3}\vec{\pi}.$$

【点评】 本题考查三角形的重心、平行线的性质、平面向量等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

15. (4分) 如图，已知在 5×5 的正方形网格中，点 A 、 B 、 C 在小正方形的顶点上，如果小正方形的边长都为 1，那么点 C 到线段 AB 所在直线的距离是 $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ ．



【分析】 根据题意，作出合适的辅助线，然后根据每个小正方形的边长为 1，利用勾股定理，可以得到 AC 、 CD 、 AD 的长，然后即可得到 $\triangle ACD$ 的形状，再利用等积法，即可求得 CE 的长．

【解答】 解：连接 AD 、 AC ，作 $CE \perp AD$ 于点 E ，

$\because$ 小正方形的边长都为 1，

$$\therefore AD = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \quad AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}, \quad CD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\because (2\sqrt{5})^2 = (3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2,$$

$\therefore \triangle ACD$ 是直角三角形， $\angle ACD = 90^\circ$ ，

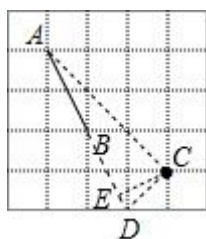
$$\therefore \frac{AC \cdot CD}{2} = \frac{AD \cdot CE}{2},$$

$$\text{即 } \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{5} \times CE}{2},$$

$$\text{解得, } CE = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

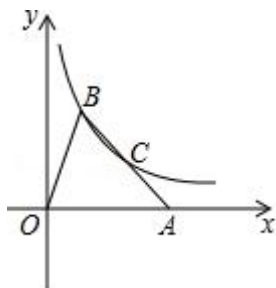
即点 C 到线段 AB 所在直线的距离是 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$,

故答案为: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.



【点评】 本题考查勾股定理，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答．

16. (4分) 如图，已知在平面直角坐标系中，点 A 在 x 轴正半轴上，点 B 在第一象限内，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过 $\triangle OAB$ 的顶点 B 和边 AB 的中点 C ，如果 $\triangle OAB$ 的面积为 6，那么 k 的值是 4．



【分析】 过 B 作 $BD \perp OA$ 于 D ，设 $B(m, n)$ ，根据三角形的面积公式得到 $OA = \frac{12}{n}$ ，

求得 $A(\frac{12}{n}, 0)$ ，求得 $C(\frac{mn+12}{2n}, \frac{n}{2})$ ，列方程即可得到结论．

【解答】 解：过 B 作 $BD \perp OA$ 于 D ，

$\because$ 点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，

$\therefore$ 设 $B(m, n)$ ，

$\because \triangle OAB$ 的面积为 6，

$\therefore OA = \frac{12}{n}$ ，

$\therefore A(\frac{12}{n}, 0)$ ，

$\because$ 点 C 是 AB 的中点，

$\therefore C(\frac{mn+12}{2n}, \frac{n}{2})$ ，

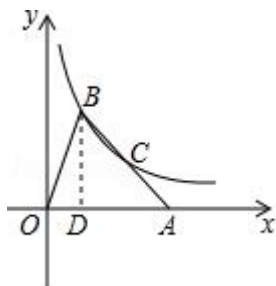
$\because$ 点 C 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，

$$\therefore \frac{mn+12}{2n} \cdot \frac{n}{2} = mn,$$

$$\therefore mn = 4,$$

$$\therefore k = 4,$$

故答案为：4.



【点评】 本题考查了反比例函数系数 k 的几何意义，三角形的面积公式，中点坐标的求法，正确的理解题意是解题的关键.

17. (4分) 定义：对于函数 $y=f(x)$ ，如果当 $a \leq x \leq b$ 时， $m \leq y \leq n$ ，且满足 $n-m=k(b-a)$ (k 是常数)，那么称此函数为“ k 级函数”. 如：正比例函数 $y=-3x$ ，当 $1 \leq x \leq 3$ 时， $-9 \leq y \leq -3$ ，则 $-3-(-9)=k(3-1)$ ，求得 $k=3$ ，所以函数 $y=-3x$ 为“3 级函数”. 如果一次函数 $y=2x-1$ ($1 \leq x \leq 5$) 为“ k 级函数”，那么 k 的值是 2.

【分析】 根据一次函数 $y=2x-1$ ($1 \leq x \leq 5$) 为“ k 级函数”解答即可.

【解答】 解：对于一次函数 $y=2x-1$ ($1 \leq x \leq 5$)，

当 $x=1$ 时， $y=1$ ；

当 $x=5$ 时， $y=9$.

因为 $y=2x-1$ ($1 \leq x \leq 5$) 是“ k 级函数”，

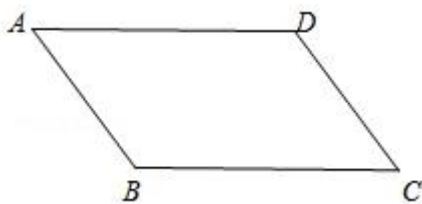
所以有 $9-1=k(5-1)$ ，

解得 $k=2$.

故答案为 2

【点评】 本题考查一次函数的性质；理解题意得出 k 的值是解题的关键.

18. (4分) 如图，已知在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=10$ ， $BC=15$ ， $\tan \angle A = \frac{4}{3}$ ，点 P 是边 AD 上一点，联结 PB ，将线段 PB 绕着点 P 逆时针旋转 90° 得到线段 PQ ，如果点 Q 恰好落在平行四边形 $ABCD$ 的边上，那么 AP 的值是 6 或 10.



【分析】如图 1 中，当点 Q 落在 CD 上时，作 $BE \perp AD$ 于 E ， $QF \perp AD$ 交 AD 的延长线于 F 。设 $PE = x$ 。如图 2，当点 Q 落在 AD 上时，如图 3 中，当点 Q 落在直线 BC 上时，作 $BE \perp AD$ 于 E ， $PF \perp BC$ 于 F 。则四边形 $BEPF$ 是矩形，根据旋转的性质和平行四边形的性质以及三角函数的定义即可得到结论。

【解答】解：如图 1 中，当点 Q 落在 CD 上时，作 $BE \perp AD$ 于 E ， $QF \perp AD$ 交 AD 的延长线于 F 。设 $PE = x$ 。

在 $\text{Rt}\triangle AEB$ 中， $\because \tan A = \frac{BE}{AE} = \frac{4}{3}$ ， $AB = 10$ ，

$$\therefore BE = 8, AE = 6,$$

$\because$ 将线段 PB 绕着点 P 逆时针旋转 90° 得到线段 PQ ，

$$\therefore \angle BPQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBP + \angle BPE = \angle BPE + \angle FPQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBP = \angle FPQ,$$

$$\because PB = PQ, \angle PEB = \angle PFQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PBE \cong \triangle QPF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore PE = QF = x, EB = PF = 8,$$

$$\therefore DF = AE + PE + PF - AD = x - 1,$$

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle FDQ = \angle A,$$

$$\therefore \tan \angle FDQ = \tan A = \frac{4}{3} = \frac{FQ}{DF},$$

$$\therefore \frac{x}{x-1} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore x = 4,$$

$$\therefore PE = 4,$$

$$\therefore AP = 6 + 4 = 10;$$

如图 2，当点 Q 落在 AD 上时，

$\because$ 将线段 PB 绕着点 P 逆时针旋转 90° 得到线段 PQ ，

$$\therefore \angle BPQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle BPQ = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle APB \text{ 中, } \because \tan A = \frac{AP}{BP} = \frac{4}{3}, AB = 10,$$

$$\therefore AP = 6;$$

如图 3 中, 当点 Q 落在直线 BC 上时, 作 $BE \perp AD$ 于 E , $PF \perp BC$ 于 F . 则四边形 $BEPF$ 是矩形.

$$\text{在 Rt}\triangle AEB \text{ 中, } \because \tan A = \frac{BE}{AE} = \frac{4}{3}, AB = 10,$$

$$\therefore BE = 8, AE = 6,$$

$$\therefore PF = BE = 8,$$

$$\because \triangle BPQ \text{ 是等腰直角三角形, } PF \perp BQ,$$

$$\therefore PF = BF = FQ = 8,$$

$$\therefore PB = PQ = 8\sqrt{2}, BQ = \sqrt{2}PB = 16 > 15 \text{ (不合题意舍去),}$$

综上所述, AP 的值是 6 或 10,

故答案为: 6 或 10.

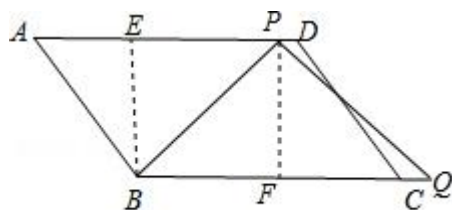


图3

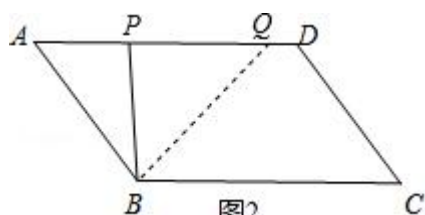


图2

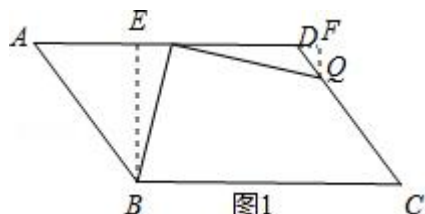


图1

【点评】 本题考查了平行四边形的性质、锐角三角函数、勾股定理、解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题.

三.解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 先化简, 再求值: $(\frac{1}{a+2} + \frac{2}{a-2}) \div \frac{3a+2}{a^2+2a}$, 其中 $a = \sqrt{5}+1$.

【分析】先化简分式, 然后将中 $a = \sqrt{5}+1$ 代入求值.

【解答】解: 原式 $= \frac{a-2+2(a+2)}{(a+2)(a-2)} \cdot \frac{a(a+2)}{3a+2}$

$$= \frac{a}{a-2}.$$

当 $a = \sqrt{5}+1$ 时,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1-2} \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

【点评】本题考查了分式的化简求值, 熟练分解因式、化简二次根式是解题的关键.

20. (10分) 解方程组: $\begin{cases} x+2y=12 \\ x^2-3xy+2y^2=0 \end{cases}$.

【分析】首先把第二个方程左边分解因式, 即可转化为两个一次方程, 分别与第一个方程, 即可组成方程组, 即可求解.

【解答】解: 由 (2) 得 $(x-y)(x-2y) = 0$.

$\therefore x-y=0$ 或 $x-2y=0$. (4分)

原方程组可化为 $\begin{cases} x+2y=12 \\ x-y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y=12 \\ x-2y=0 \end{cases}$ (4分)

解这两个方程组, 得原方程组的解为 $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=6 \\ y_2=3 \end{cases}$ (2分)

另解: 由 (1) 得 $x = 12 - 2y$. (3) (2分)

把 (3) 代入 (2), 得 $(12 - 2y)^2 - 3(12 - 2y)y + 2y^2 = 0$. (2分)

整理, 得 $y^2 - 7y + 12 = 0$. (2分)

解得 $y_1 = 4$, $y_2 = 3$. (2分)

分别代入 (3), 得 $x_1 = 4$, $x_2 = 6$. (1分)

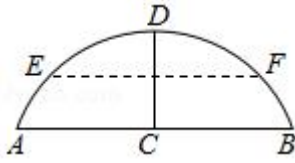
$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=6 \\ y_2=3 \end{cases}$ (1分)

【点评】本题主要考查了高次方程组的解法, 解决的基本思想是降次.

21. (10分) 如图, 有一拱桥的桥拱是圆弧形, 已知桥拱的水面跨度 AB (弧所对的弦的长) 为 8 米, 拱高 CD (弧的中点到弦的距离) 为 2 米.

(1) 求桥拱所在圆的半径长;

(2) 如果水面 AB 上升到 EF 时, 从点 E 测得桥顶 D 的仰角为 α , 且 $\cot \alpha = 3$, 求水面上升的高度.



【分析】(1) 联结 OA , 设半径 $OA = OD = R$, $OC = OD - DC = R - 2$, 在 $\text{Rt}\triangle ACO$ 中, 利用勾股定理构建方程求解即可.

(2) 设水面上升的高度为 x 米, 即 $CG = x$, 则 $DG = 2 - x$, $EG = 6 - 3x$, 在 $\text{Rt}\triangle EGO$ 中, 根据 $EG^2 + OG^2 = OE^2$, 构建方程求解即可.

【解答】解: (1) $\because$ 点 D 是 $\widehat{AB}$ 的中点, $DC \perp AB$,

$\therefore AC = BC$, DC 经过圆心,

设拱桥的桥拱弧 AB 所在圆的圆心为 O ,

$\because AB = 8$,

$\therefore AC = BC = 4$,

联结 OA , 设半径 $OA = OD = R$, $OC = OD - DC = R - 2$,

$\because OD \perp AB$,

$\therefore \angle ACO = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ACO$ 中, $\because OA^2 = AC^2 + OC^2$,

$\therefore R^2 = (R - 2)^2 + 4^2$,

解之得 $R = 5$.

答: 桥拱所在圆的半径长为 5 米.

(2) 设 OD 与 EF 相交于点 G , 联结 OE ,

$\because EF \parallel AB$, $OD \perp AB$,

$\therefore OD \perp EF$,

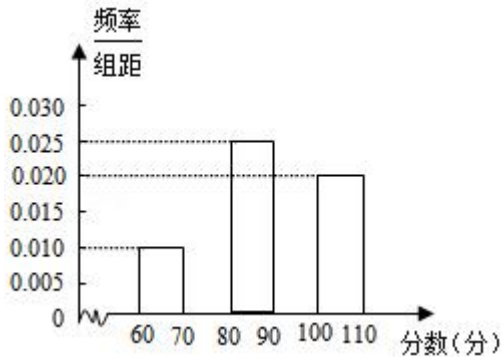
$\therefore \angle EGD = \angle EGO = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle EGD$ 中, $\cot \alpha = \frac{EG}{DG} = 3$,

$\therefore EG = 3DG$,

设水面上升的高度为 x 米, 即 $CG = x$, 则 $DG = 2 - x$,

- (3) 由此估计该社区居民在线答卷成绩在 90 ~ 100 (分) 范围内的人数最多;
- (4) 如果该社区共有 800 人参与答卷, 那么可估计该社区成绩在 90 分及以上约为 400 人.



【分析】(1) 根据题中数据即可求得 a 、 c 的值, 再根据频率 = 频数 ÷ 数据总数列式计算, 即可求得 b 、 d 的值;

- (2) 根据 (1) 中计算结果即可补全频率分布直方图;
- (3) 根据频率分布直方图可知第四组人数最多, 利用样本估总体求解即可;
- (4) 利用样本估总体, 用 800 乘以样本中成绩在 90 分及以上的频率即可.

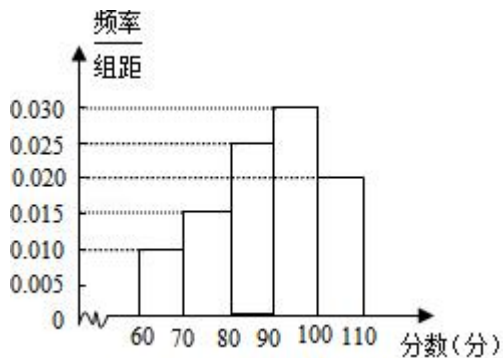
【解答】解: (1) 由题意可知:

第二组的频数 $a = 6$, 第四组的频数 $c = 12$,

$\therefore$ 第二组的频率为: $6 \div 40 = 0.15$, 第四组的频率为: $12 \div 40 = 0.3$.

故答案为: 6, 0.15, 12, 0.3;

- (2) 如下图即为补全的频率分布直方图;



- (3) 由此估计该社区居民在线答卷成绩在 90 ~ 100 (分) 范围内的人数最多.

故答案为: 90 ~ 100;

$$(4) 800 \times (0.3+0.2) = 400 \text{ (人)}.$$

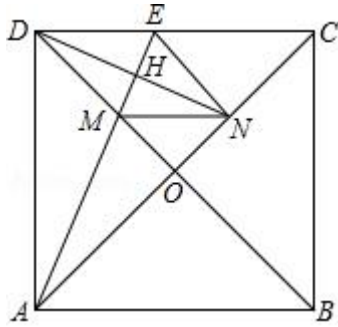
答: 如果该社区共有 800 人参与答卷, 那么可估计该社区成绩在 90 分及以上约为 400 人.
故答案为: 400.

【点评】 本题考查了频数(率)分布直方图、统计表、用样本估计总体, 解决本题的关键是利用统计图表获取信息.

23. (12 分) 如图, 已知在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , 点 M 在线段 OD 上, 联结 AM 并延长交边 DC 于点 E , 点 N 在线段 OC 上, 且 $ON = OM$, 联结 DN 与线段 AE 交于点 H , 联结 EN 、 MN .

(1) 如果 $EN \parallel BD$, 求证: 四边形 $DMNE$ 是菱形;

(2) 如果 $EN \perp DC$, 求证: $AN^2 = NC \cdot AC$.



【分析】 (1) 由四边形 $ABCD$ 是正方形, 推出 $\frac{ON}{OC} = \frac{OM}{OD}$, 所以 $MN \parallel CD$, 再根据 $EN \parallel BD$, 推出四边形 $DMNE$ 是平行四边形, 再证明 $\triangle AOM \cong \triangle DON$, 推出 $\angle OMA = \angle OND$, 由 $\angle OAM + \angle OMA = 90^\circ$, $\angle OAM + \angle OND = 90^\circ$ 得出 $\angle AHN = 90^\circ$, 即 $DN \perp ME$, 所以四边形 $DMNE$ 是菱形;

(2) 由 $MN \parallel CD$, 推出 $\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{ME}$, 由四边形 $ABCD$ 是正方形, 推出 $AB \parallel DC$, $AB = DC$, $\angle ADC = 90^\circ$, 即 $AD \perp DC$, 根据 $EN \perp DC$, 得出 $EN \parallel AD$, 所以 $\frac{AC}{AN} = \frac{DC}{DE}$, 根据 $AB \parallel DC$, 推出 $\frac{AM}{ME} = \frac{AB}{DE}$, 所以 $\frac{AN}{NC} = \frac{AC}{AN}$, 最后得出结论.

【解答】 证明: (1) 如图 1,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore OA = OB = OC = OD$, $AC \perp BD$,

$\because ON = OM$,

$$\therefore \frac{ON}{OC} = \frac{OM}{OD},$$

$\therefore MN \parallel CD$,

又 $\because EN \parallel BD$,

$\therefore$ 四边形 $DMNE$ 是平行四边形,

在 $\triangle AOM$ 和 $\triangle DON$ 中,

$\because \angle AOM = \angle DON = 90^\circ$, $OA = OD$, $OM = ON$,

$\therefore \triangle AOM \cong \triangle DON$ (SAS),

$\therefore \angle OMA = \angle OND$,

$\because \angle OAM + \angle OMA = 90^\circ$,

$\therefore \angle OAM + \angle OND = 90^\circ$

$\therefore \angle AHN = 90^\circ$.

$\therefore DN \perp ME$,

$\therefore$ 平行四边形 $DMNE$ 是菱形;

(2) 如图 2,

$\because MN \parallel CD$,

$$\therefore \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{ME},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB \parallel DC$, $AB = DC$, $\angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore AD \perp DC$,

又 $\because EN \perp DC$,

$\therefore EN \parallel AD$,

$$\therefore \frac{AC}{AN} = \frac{DC}{DE},$$

$\because AB \parallel DC$,

$$\therefore \frac{AM}{ME} = \frac{AB}{DE},$$

$$\therefore \frac{AN}{NC} = \frac{AC}{AN},$$

$$\therefore AN^2 = NC \cdot AC.$$

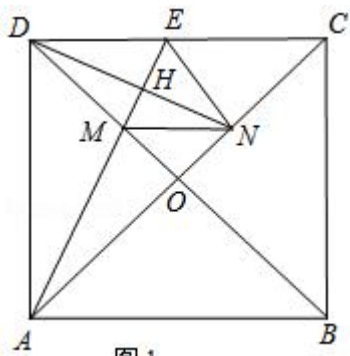


图 1

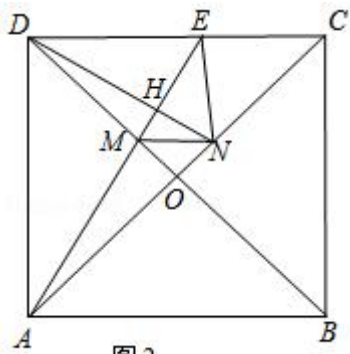


图 2

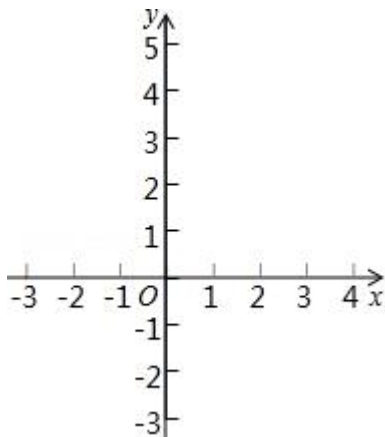
【点评】 本题考查了正方形与菱形，熟练运用正方形和菱形的性质是解题的关键．

24. (12 分) 如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 经过点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(3, 2)$ ，与 y 轴相交于点 C ．

(1) 求这条抛物线的表达式；

(2) 点 P 是抛物线在第一象限内一点，联结 AP ，如果点 C 关于直线 AP 的对称点 D 恰好落在 x 轴上，求直线 AP 的截距；

(3) 在 (2) 小题的条件下，如果点 E 是 y 轴正半轴上一点，点 F 是直线 AP 上一点．当 $\triangle EAO$ 与 $\triangle EAF$ 全等时，求点 E 的纵坐标．



【分析】 (1) 把 $A(-3, 0)$ 和点 $B(3, 2)$ 代入抛物线的解析式，列方程组，可得结论；

(2) 如图 1，根据对称的性质得 $AD = AC = 5$ ，可得 $OD = 2$ ，设 $OH = a$ ，则 $HC = HD = 4$

$-a$ ，在 $\text{Rt}\triangle HOD$ 中，根据勾股定理得 $HD^2 = OH^2 + OD^2$ ，列方程可得结论；

(3) 分两种情况：先说明 $\triangle AOE$ 是直角三角形，所以 $\triangle EAF$ 也是直角三角形，根据 $\angle EFA = 90^\circ$ ，画图，由勾股定理列方程可解答．

【解答】解：(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 过点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(3, 2)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 9a - 3b + 4 = 0 \\ 9a + 3b + 4 = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4;$$

(2) 如图 1，连接 AC ， DH ，

$\because$ 点 C 关于直线 AP 的对称点 D ，

$$\therefore AD = AC,$$

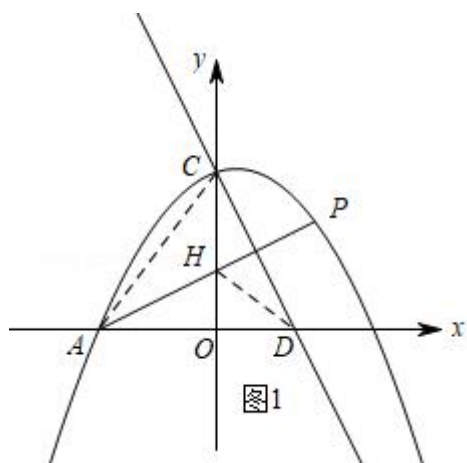
$$\because y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4 \text{ 与 } y \text{ 轴交于点 } C(0, 4), \text{ 与 } x \text{ 轴交于点 } A(-3, 0),$$

$$\therefore AC = 5,$$

$$\therefore AD = 5,$$

$$\therefore \text{点 } D(2, 0),$$

设直线 AP 与 y 轴交于点 H ，则 $HC = HD$ ，



设 $OH = a$ ，则 $HC = HD = 4 - a$ ，

在 $\text{Rt}\triangle HOD$ 中， $HD^2 = OH^2 + OD^2$ ，

$$\therefore (4 - a)^2 = a^2 + 2^2,$$

$$\therefore a = \frac{3}{2},$$

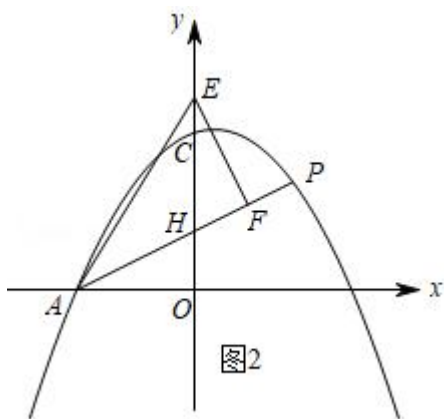
$\therefore$ 直线 AP 的截距为 $\frac{3}{2}$;

(3) $\because$ 点 E 是 y 轴正半轴上一点,

$\therefore \triangle AOE$ 是直角三角形, 且 $\angle AOE = 90^\circ$

当 $\triangle EAO$ 与 $\triangle EAF$ 全等时, 存在两种情况:

①如图 2, 当 $\angle EFA = \angle AOE = 90^\circ$, $\triangle EFA \cong \triangle AOE$,



$\therefore EF = OA$,

$\because \angle AHO = \angle EHF$, $\angle AOH = \angle EFH = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AOH \cong \triangle EFH$ (AAS),

$\therefore AH = EH$,

由 (2) 知: $OH = \frac{3}{2}$,

$\therefore EH = AH = OE - \frac{3}{2}$,

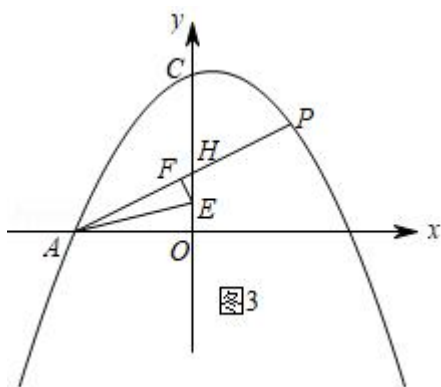
Rt $\triangle AHO$ 中, $AH^2 = AO^2 + OH^2$,

$\therefore \left(OE - \frac{3}{2}\right)^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$,

解得: $OE = \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{3-3\sqrt{5}}{2}$ (舍),

$\therefore$ 点 E 的纵坐标是 $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$;

②如图 3, 当 $\angle EFA = \angle AOE = 90^\circ$, $\triangle EFA \cong \triangle EOA$,



$$\therefore AF = AO = 3, EF = OE,$$

$$\text{Rt}\triangle AHO \text{ 中, } AH = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore FH = \frac{3\sqrt{5}}{2} - 3, EH = \frac{3}{2} - OE,$$

$$\text{Rt}\triangle EFH \text{ 中, 由勾股定理得: } EH^2 = FH^2 + EF^2,$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2} - OE\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{5}}{2} - 3\right)^2 + OE^2,$$

$$\text{解得: } OE = 3\sqrt{5} - 6,$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的纵坐标是 } 3\sqrt{5} - 6;$$

$$\text{综上, 点 } E \text{ 的纵坐标是 } \frac{3+3\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } 3\sqrt{5} - 6.$$

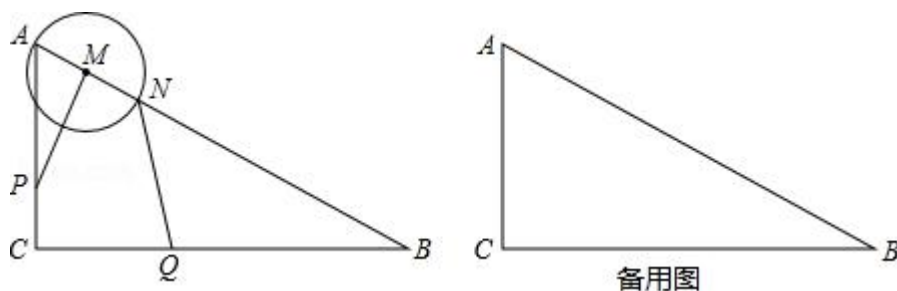
【点评】 本题是一道二次函数综合题，解答本题的关键是掌握二次函数的性质，对称的性质：对称轴是对称点连接的垂直平分线，三角形全等的性质和判定，当三角形全等不确定边的对应关系时，先确定三角形的特殊性，如直角三角形或等腰三角形等条件，再进一步分情况讨论。

25. (14分) 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 8$ ，点 P 是射线 AC 上一点（不与点 A 、 C 重合），过 P 作 $PM \perp AB$ ，垂足为点 M ，以 M 为圆心， MA 长为半径的 $\odot M$ 与边 AB 相交的另一个交点为点 N ，点 Q 是边 BC 上一点，且 $CQ = 2CP$ ，联结 NQ 。

(1) 如果 $\odot M$ 与直线 BC 相切，求 $\odot M$ 的半径长；

(2) 如果点 P 在线段 AC 上，设线段 $AP = x$ ，线段 $NQ = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式及定义域；

(3) 如果以 NQ 为直径的 $\odot O$ 与 $\odot M$ 的公共弦所在直线恰好经过点 P ，求线段 AP 的长。



【分析】(1) 先利用勾股定理求出 AB ，进而表示出 BM ，再判断出 $\triangle BHM \sim \triangle BCA$ ，即可得出结论；

(2) 先表示出 $BQ = 2x$ ，

过 Q 作 $QG \perp AB$ ，垂足为点 G ，再用三角函数表示出 $BG = \frac{4\sqrt{5}}{5}x$ ， $QG = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$ ，再用三角函数表示出 $MA = \frac{\sqrt{5}}{5}x$ ， $AN = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$ ，进而得出 $NG = 4\sqrt{5} - \frac{6\sqrt{5}}{5}x$ ，最后用勾股定理建立方程，即可得出结论；

(3) 先判断出 P 、 E 、 N 在同一直线上，再要判断出 $\angle PAN = \angle ANE$ 和 $\angle NMO = \angle B$ ，进而判断出 $QA = QB$ ，最后用勾股定理即可得出结论。

【解答】(1) 解：如图 1，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AC = 4, BC = 8,$$

$$\therefore AB = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

设 $\odot M$ 的半径长为 R ，则 $BM = 4\sqrt{5} - R$ ，

过 M 作 $MH \perp BC$ ，垂足为点 H ，

$$\therefore MH \parallel AC,$$

$$\therefore MH \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle BHM \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{MB}{AB} = \frac{MH}{AC},$$

$\because \odot M$ 与直线 BC 相切，

$$\therefore MA = MH,$$

$$\therefore \frac{4\sqrt{5} - R}{4\sqrt{5}} = \frac{R}{4},$$

$$\therefore R = 5 - \sqrt{5},$$

即 $\odot M$ 的半径长为 $5 - \sqrt{5}$ 。

(2) 如图 2,

$$\because AP = x,$$

$$\therefore CP = 4 - x,$$

$$\because CQ = 2CP,$$

$$\therefore CQ = 8 - 2x,$$

$$\therefore BQ = BC - CQ = 8 - (8 - 2x) = 2x,$$

过 Q 作 $QG \perp AB$, 垂足为点 G ,

$$\because \cos B = \frac{BG}{BQ} = \frac{BC}{AB},$$

$$\therefore \frac{BG}{2x} = \frac{8}{4\sqrt{5}},$$

$$\therefore BG = \frac{4\sqrt{5}}{5}x,$$

$$\text{同理: } QG = \frac{2\sqrt{5}}{5}x,$$

$$\because PM \perp AB,$$

$$\therefore \angle AMP = 90^\circ,$$

$$\therefore \cos A = \frac{AM}{AP} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\because AP = x,$$

$$\therefore MA = \frac{\sqrt{5}}{5}x, \quad AN = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$$

$$\therefore NG = 4\sqrt{5} - \frac{6\sqrt{5}}{5}x,$$

在 $\text{Rt}\triangle QNG$ 中, 根据勾股定理得, $QN^2 = NG^2 + QG^2$,

$$\therefore y^2 = \left(4\sqrt{5} - \frac{6}{5}\sqrt{5}x\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\sqrt{5}x\right)^2,$$

$$\therefore y = 2\sqrt{2x^2 - 12x + 20} \quad (0 < x < 4);$$

(3) 当点 P 在线段 AC 上, 如图 3,

设以 NQ 为直径的 $\odot O$ 与 $\odot M$ 的另一个交点为点 E , 连接 EN , MO ,

则 $MO \perp EN$,

$$\therefore \angle NMO + \angle ANE = 90^\circ,$$

$\because$ 以 NQ 为直径的 $\odot O$ 与 $\odot M$ 的公共弦所在直线恰好经过点 P ,

即 P 、 E 、 N 在同一直线上,

又 $\because PM \perp AB$, $MA = MN$,

$\therefore PN = PA$,

$\therefore \angle PAN = \angle ANE$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle PAN + \angle B = 90^\circ$,

$\therefore \angle NMO = \angle B$,

连接 AQ ,

$\because M$ 、 O 分别是线段 AN 、 NQ 的中点,

$\therefore MO \parallel AQ$

$\therefore \angle NMO = \angle BAQ$,

$\therefore \angle BAQ = \angle B$,

$\therefore QA = QB$,

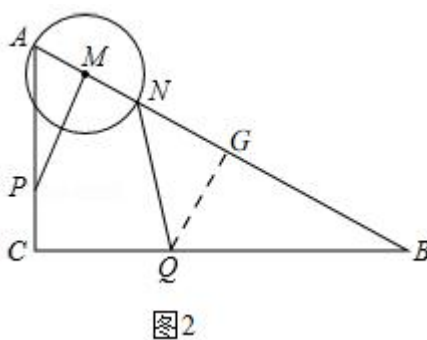
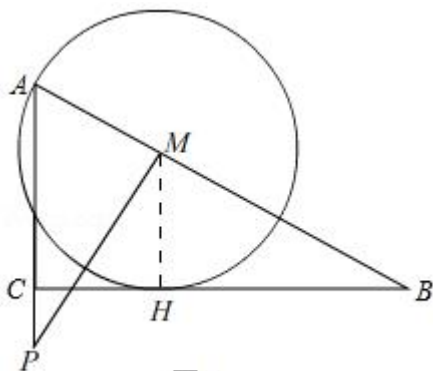
在 $\text{Rt}\triangle QAC$ 中, 根据勾股定理得, $QA^2 = AC^2 + QC^2$,

$\therefore (2x)^2 = 4^2 + (8 - 2x)^2$,

$\therefore x = \frac{5}{2}$,

同理: 当点 P 在线段 AC 的延长线上, $x = \frac{11}{2}$,

即线段 AP 的长为 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{11}{2}$.





第 31 页 (共 31 页)