

2020 年上海市普陀区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上

1.（4 分）下列计算中，正确的是（ ）

- A. $-2^2 = 4$ B. $16\frac{1}{2} = 8$ C. $3^{-1} = -3$ D. $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$

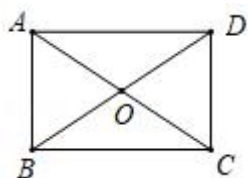
2.（4 分）下列二次根式中，与 $\sqrt{2a}$ ($a > 0$) 属同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{2a^2}$ B. $\sqrt{4a}$ C. $\sqrt{8a^3}$ D. $\sqrt{4a^2}$

3.（4 分）关于函数 $y = -\frac{2}{x}$ ，下列说法中错误的是（ ）

- A. 函数的图象在第二、四象限
B. y 的值随 x 的值增大而增大
C. 函数的图象与坐标轴没有交点
D. 函数的图象关于原点对称

4.（4 分）如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于点 O ，如果 $OB = 4$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ，那么矩形 $ABCD$ 的面积等于（ ）

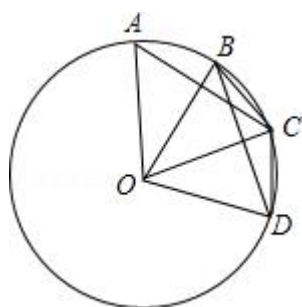


- A. 8 B. 16 C. $8\sqrt{3}$ D. $16\sqrt{3}$

5.（4 分）一个事件的概率不可能是（ ）

- A. 1.5 B. 1 C. 0.5 D. 0

6.（4 分）如图，已知 A 、 B 、 C 、 D 四点都在 $\odot O$ 上， $OB \perp AC$ ， $BC = CD$ ，在下列四个说法中，① $\widehat{AC} = 2\widehat{CD}$ ；② $AC = 2CD$ ；③ $OC \perp BD$ ；④ $\angle AOD = 3\angle BOC$ ，正确的个数是（ ）



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

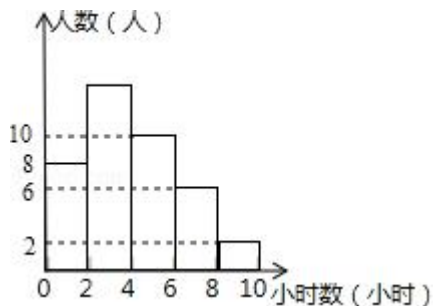
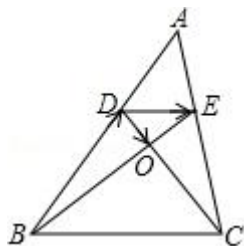
D. 4 个

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. (4 分) 计算： $a \cdot (3a)^2 =$ _____.8. (4 分) 函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的定义域是_____.9. (4 分) 方程 $\sqrt{5x} = -x$ 的解是_____.10. (4 分) 已知一个样本 1、3、2、5、 x 的平均数是 3，那么 $x =$ _____.11. (4 分) 如果把二次方程 $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ 化成两个一次方程，那么所得的两个一次方程分别是_____.12. (4 分) 已知一件商品的进价为 a 元，超市标价 b 元出售，后因季节原因超市将此商品打八折促销，如果促销后这件商品还有盈利，那么此时每件商品盈利_____元。(用含有 a 、 b 的代数式表示)13. (4 分) 如果关于 x 的方程 $(x-2)^2 = m-1$ 没有实数根，那么 m 的取值范围是_____.

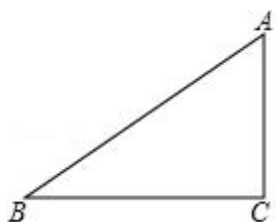
14. (4 分) 已知正方形的半径是 4，那么这个正方形的边心距是_____.

15. (4 分) 今年 3 月，上海市开展了在线学习，同时号召同学们在家要坚持体育锻炼，已知某班学生一周内在家锻炼时间的频数分布直方图如图所示. 如果锻炼时间在 0-2 小时的学生的频率是 20%，那么锻炼时间在 4-6 小时的学生的频率是_____.

16. (4 分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， DC 、 BE 交于点 O ， $AB = 3AD$ ，设 $\overrightarrow{BD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DE} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{DO}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示是_____.17. (4 分) 将正比例函数 $y = kx$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的图象，沿着 y 轴的一个方向平移 $|k|$ 个单位后与 x 轴、 y 轴围成一个三角形，我们称这个三角形为正比例函数 $y = kx$ 的坐标轴三

角形，如果一个正比例函数的图象经过第一、三象限，且它的坐标轴三角形的面积为 5，那么这个正比例函数的解析式是_____.

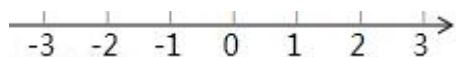
18. (4 分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $\cot B = \frac{4}{3}$ ，点 P 为边 AB 上一点，将 $\triangle BPC$ 沿着 PC 翻折得到 $\triangle B'PC$ ， $B'C$ 与边 AB 的交于点 D ，如果 $\triangle B'PD$ 恰好为直角三角形，那么 $BP =$ _____.



三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. (10 分) 先化简，再求值： $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} \div \frac{x-1}{x^2-2x+1}$ ，其中 $x = \sqrt{3}+1$.

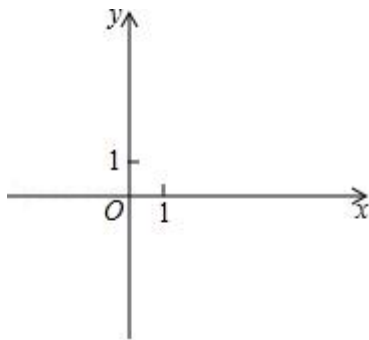
20. (10 分) 解不等式组： $\begin{cases} 3(x-2) \leq 8-(x+6) \\ \frac{x+1}{2} < \frac{2x-1}{3} + 1 \end{cases}$ ，并把解集在数轴上表示出来.



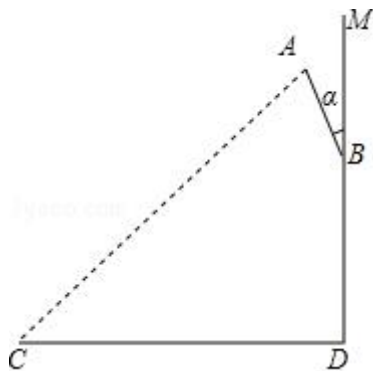
21. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知一次函数 $y = 2x + m$ 与 $y = -\frac{1}{2}x + n$ 的图象都经过点 $A(-2, 0)$, 且分别与 y 轴交于点 B 和点 C .

(1) 求 B 、 C 两点的坐标;

(2) 设点 D 在直线 $y = -\frac{1}{2}x + n$ 上, 且在 y 轴右侧, 当 $\triangle ABD$ 的面积为 15 时, 求点 D 的坐标.



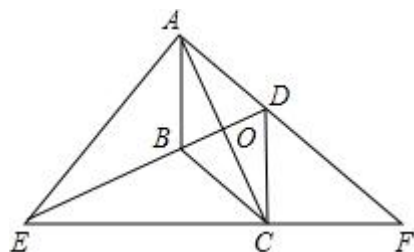
22. (10 分) 一块显示屏斜挂在展示厅的墙面上, 如图是显示屏挂在墙面 MD 的正侧面示意图, 其中 AB 表示显示屏的宽, AB 与墙面 MD 的夹角 α 的正切值为 $\frac{2}{5}$, 在地面 C 处测得显示屏顶部 A 的仰角为 45° , 屏幕底部 B 与地面 CD 的距离为 2 米, 如果 C 处与墙面之间的水平距离 CD 为 3.4 米, 求显示屏的宽 AB 的长. (结果保留根号)



23. (12分) 已知: 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , 点 E 是 DB 延长线上的一点, 且 $EA = EC$, 分别延长 AD 、 EC 交于点 F .

(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 为菱形;

(2) 如果 $\angle AEC = 2\angle BAC$, 求证: $EC \cdot CF = AF \cdot AD$.

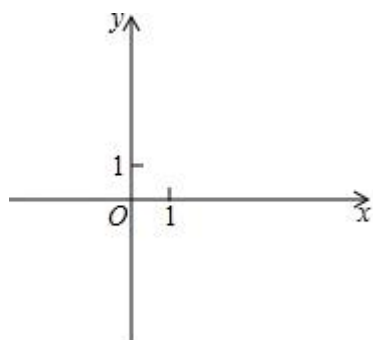


24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知点 A 在 x 轴的正半轴上, 且与原点的距离为 3, 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 3$ ($a \neq 0$) 经过点 A , 其顶点为 C , 直线 $y = 1$ 与 y 轴交于点 B , 与抛物线交于点 D (在其对称轴右侧), 联结 BC 、 CD .

(1) 求抛物线的表达式及点 C 的坐标;

(2) 点 P 是 y 轴的负半轴上的一点, 如果 $\triangle PBC$ 与 $\triangle BCD$ 相似, 且相似比不为 1, 求点 P 的坐标;

(3) 将 $\angle CBD$ 绕着点 B 逆时针方向旋转, 使射线 BC 经过点 A , 另一边与抛物线交于点 E (点 E 在对称轴的右侧), 求点 E 的坐标.

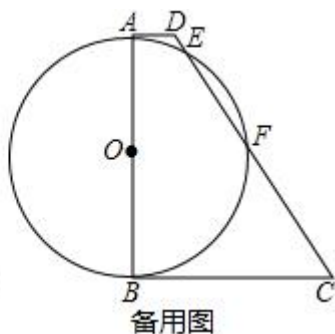
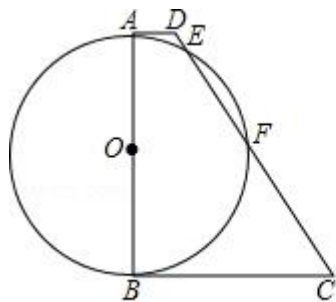


25. (14 分) 如图, 已知在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交边 DC 于 E 、 F 两点, $AD = 1$, $BC = 5$, 设 $\odot O$ 的半径长为 r .

(1) 联结 OF , 当 $OF \parallel BC$ 时, 求 $\odot O$ 的半径长;

(2) 过点 O 作 $OH \perp EF$, 垂足为点 H , 设 $OH = y$, 试用 r 的代数式表示 y ;

(3) 设点 G 为 DC 的中点, 联结 OG 、 OD , $\triangle ODG$ 是否能成为等腰三角形? 如果能, 试求出 r 的值; 如不能, 试说明理由.



2020 年上海市普陀区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上

1.（4 分）下列计算中，正确的是（ ）

A. $-2^2 = 4$ B. $16\frac{1}{2} = 8$ C. $3^{-1} = -3$ D. $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$

【分析】根据分数指数幂、负整数指数幂计算，判断即可．

【解答】解：A、 $-2^2 = -4$ ，本选项计算错误；

B、 $16\frac{1}{2} = \sqrt{16} = 4$ ，本选项计算错误；

C、 $3^{-1} = \frac{1}{3}$ ，本选项计算错误；

D、 $(\frac{1}{2})^{-2} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 4$ ，本选项计算正确；

故选：D．

【点评】本题考查的是分数指数幂、负整数指数幂的运算，掌握 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 、 $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ 是

解题的关键．

2.（4 分）下列二次根式中，与 $\sqrt{2a}$ （ $a > 0$ ）属同类二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{2a^2}$ B. $\sqrt{4a}$ C. $\sqrt{8a^3}$ D. $\sqrt{4a^2}$

【分析】先化简，再根据同类二次根式的定义解答．

【解答】解：A、 $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$ ，与 $\sqrt{2a}$ 的被开方数不同，则它们不是同类二次根式，故本选项不合题意；

B、 $\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$ ，与 $\sqrt{2a}$ 的被开方数不同，则它们不是同类二次根式，故本选项不合题意；

C、 $\sqrt{8a^3} = 2a\sqrt{2a}$ ，与 $\sqrt{2a}$ 的被开方数相同，则它们是同类二次根式，故本选项正确；

D、 $\sqrt{4a^2} = 2a$ 与 $\sqrt{2a}$ 的被开方数不同，则它们不是同类二次根式，故本选项不合题意．

故选：C．

【点评】此题主要考查了同类二次根式的定义，即：二次根式化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式．

3. (4分) 关于函数 $y = -\frac{2}{x}$ ，下列说法中错误的是 ()

- A. 函数的图象在第二、四象限
- B. y 的值随 x 的值增大而增大
- C. 函数的图象与坐标轴没有交点
- D. 函数的图象关于原点对称

【分析】根据题目中的函数解析式和反比例函数的性质，可以判断各个选项中的说法是否正确，从而可以解答本题．

【解答】解：∵ 函数 $y = -\frac{2}{x}$ ，

∴ 该函数的图象在第二、四象限，故选项 A 正确；

在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，故选项 B 错误；

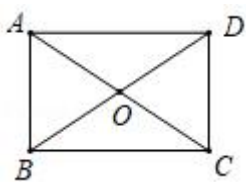
函数的图象与坐标轴没有交点，故选项 C 正确；

函数的图象关于原点对称，故选项 D 正确；

故选：B．

【点评】本题考查反比例函数的性质，解答本题的关键是明确题意，利用反比例函数的性质解答．

4. (4分) 如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于点 O ，如果 $OB = 4$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ，那么矩形 $ABCD$ 的面积等于 ()



- A. 8
- B. 16
- C. $8\sqrt{3}$
- D. $16\sqrt{3}$

【分析】由矩形的性质得出 $OA = BO$ ，证 $\triangle AOB$ 是等边三角形，得出 $AB = OB = 4$ ，由勾股定理求出 AD ，即可求出矩形的面积．

【解答】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ, \quad AO = CO = \frac{1}{2}AC, \quad BO = DO = \frac{1}{2}BD, \quad AC = BD = 2OB = 8,$$

$$\therefore OA = BO,$$

$$\because \angle AOB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形,

$$\therefore AB = OB = 4,$$

$$\therefore AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 的面积} = AB \times AD = 4 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3};$$

故选: D.

【点评】 本题考查了矩形的性质, 等边三角形的判定和性质, 勾股定理等知识; 熟练掌握矩形的性质和勾股定理, 证明 $\triangle AOB$ 为等边三角形是解题的关键.

5. (4分) 一个事件的概率不可能是 ()

A. 1.5

B. 1

C. 0.5

D. 0

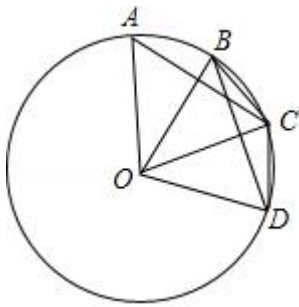
【分析】 根据概率的知识, 可以得到概率的最大与最小值, 从而可以解答本题.

【解答】 解: 一个事件的概率最大是 1, 最小是 0, 故选项 A 错误,

故选: A.

【点评】 本题考查概率的意义、概率公式, 解答本题的关键是明确概率的意义, 知道概率的最大与最小值.

6. (4分) 如图, 已知 A、B、C、D 四点都在 $\odot O$ 上, $OB \perp AC$, $BC = CD$, 在下列四个说法中, ① $\widehat{AC} = 2\widehat{CD}$; ② $AC = 2CD$; ③ $OC \perp BD$; ④ $\angle AOD = 3\angle BOC$, 正确的个数是 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【分析】 根据题意和垂径定理, 可以得到 $AC = BD$, $\widehat{AB} = \widehat{BC}$, $\widehat{BC} = \widehat{CD}$, 然后即可判断各个小题中的结论是否正确, 从而可以解答本题.

【解答】 解: $\because OB \perp AC$, $BC = CD$,

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC}, \widehat{BC} = \widehat{CD},$$

$$\therefore \widehat{AC} = 2\widehat{CD}, \text{ 故①正确;}$$

$AC < AB + BC = BC + CD = 2CD$, 故②错误;

$OC \perp BD$, 故③正确;

$\angle AOD = 3\angle BOC$, 故④正确;

故选: C.

【点评】 本题考查圆周角定理、垂径定理、圆心角、弧、弦的关系, 解答本题的关键是明确题意, 利用数形结合的思想解答.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 计算: $a \cdot (3a)^2 = \underline{9a^3}$.

【分析】 先根据积的乘方法则计算, 再根据单项式乘以单项式法则计算.

【解答】 解: 原式 $= a \cdot 9a^2 = 9a^3$,

故答案为: $9a^3$.

【点评】 本题主要考查了积的乘方法则, 单项式乘以单项式的法则, 同底数幂的乘法法则, 熟记各项法则是解题的关键.

8. (4 分) 函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的定义域是 $\underline{x \neq -1}$.

【分析】 根据分式的意义, 分母不等于 0, 可以求出 x 的范围.

【解答】 解: 根据题意得: $x+1 \neq 0$,

解得: $x \neq -1$.

故答案为 $x \neq -1$.

【点评】 本题考查了函数自变量的取值范围问题, 函数自变量的范围一般从三个方面考虑:

(1) 当函数表达式是整式时, 自变量可取全体实数;

(2) 当函数表达式是分式时, 考虑分式的分母不能为 0;

(3) 当函数表达式是二次根式时, 被开方数非负.

9. (4 分) 方程 $\sqrt{5x} = -x$ 的解是 $\underline{x=0}$.

【分析】 先两边平方得到 $x^2 - 5x = 0$, 再把方程左边进行因式分解得到 $x(x-5) = 0$, 方程转化为两个一元一次方程: $x=0$ 或 $x-5=0$, 即可得到原方程的解为 $x_1=0$, $x_2=5$, 检验原方程的解为 $x=0$.

【解答】 解: 把方程 $\sqrt{5x} = -x$ 两边平方, 得

$5x = x^2$,

$$\therefore x^2 - 5x = 0,$$

$$\therefore x(x - 5) = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x - 5 = 0,$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = 5.$$

检验：把 $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ 代入方程 $\sqrt{5x} = -x$,

可知 $x_1 = 0$ 是原方程的根, $x_2 = 5$ 是原方程的增根,

所以原方程的解为 $x = 0$.

故答案为: $x = 0$.

【点评】 本题考查了解无理方程和一元二次方程. 解题的关键是掌握解一元二次方程的方法: 把一元二次方程变形为一般式, 再把方程左边进行因式分解, 然后把方程转化为两个一元一次方程, 解这两个一元一次方程得到原方程的解; 要注意解无理方程要检验.

10. (4分) 已知一个样本 1、3、2、5、 x 的平均数是 3, 那么 $x = \underline{4}$.

【分析】 根据一个样本 1、3、2、5、 x 的平均数是 3, 可以求得 x 的值, 本题得以解决.

【解答】 解: $\because$ 一个样本 1、3、2、5、 x 的平均数是 3,

$$\therefore (1+3+2+5+x) \div 5 = 3,$$

解得, $x = 4$,

故答案为: 4.

【点评】 本题考查算术平均数, 解答本题的关键是明确算术平均数的计算方法.

11. (4分) 如果把二次方程 $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ 化成两个一次方程, 那么所得的两个一次方程分别是 $x - 2y = 0$ 或 $x + y = 0$.

【分析】 由于二元二次方程 $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ 进行因式分解可以变为 $(x - 2y)(x + y) = 0$, 即可解决问题.

【解答】 解: $\because x^2 - xy - 2y^2 = 0$,

$$\therefore (x - 2y)(x + y) = 0,$$

$$\therefore x - 2y = 0 \text{ 或 } x + y = 0.$$

故答案为: $x - 2y = 0$ 或 $x + y = 0$

【点评】 此题主要考查了二元二次方程降次的方法, 正确进行因式分解是解题的关键.

12. (4分) 已知一件商品的进价为 a 元, 超市标价 b 元出售, 后因季节原因超市将此商品打八折促销, 如果促销后这件商品还有盈利, 那么此时每件商品盈利 $(0.8b - a)$ 元. (用含有 a 、 b 的代数式表示)

【分析】根据“标价 $\times\frac{\text{折数}}{10}$ =售价”用代数式表示出售价，再根据“售价-进价=利润”

用代数式表示盈利.

【解答】解：根据题意得，每件商品盈利 $(0.8b-a)$ 元，

故答案为： $(0.8b-a)$.

【点评】本题主要考查了列代数式，熟练掌握“标价 $\times\frac{\text{折数}}{10}$ =售价，售价-进价=利润”

这些数量之间的关系式是解题的关键.

13. (4分) 如果关于 x 的方程 $(x-2)^2=m-1$ 没有实数根，那么 m 的取值范围是 $m < 1$.

【分析】根据直接开平方定义即可求得 m 的取值范围.

【解答】解： $\because$ 关于 x 的方程 $(x-2)^2=m-1$ 没有实数根，

$$\therefore m-1 < 0,$$

解得 $m < 1$,

所以 m 的取值范围是 $m < 1$.

故答案为： $m < 1$.

【点评】本题考查了解一元二次方程-直接开平方，解决本题的关键是掌握直接开平方方法.

14. (4分) 已知正方形的半径是4，那么这个正方形的边心距是 $2\sqrt{2}$.

【分析】正方形的边心距就是正方形的中心到正方形的边的距离，利用边长的一半和边心距、半径围成直角三角形求解即可.

【解答】解：如图，根据正方形的性质知： $\triangle BOC$ 是等腰直角三角形，

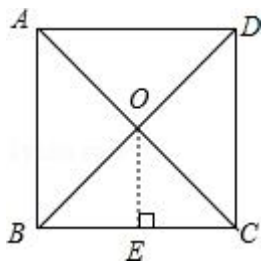
过 O 作 $OE \perp BC$ 于 E ,

$\because$ 正方形的半径是4，

$$\therefore BO = 4,$$

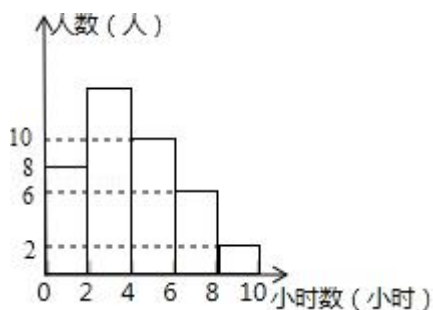
$$\therefore OE = BE = \frac{\sqrt{2}}{2}BO = 2\sqrt{2},$$

故答案为： $2\sqrt{2}$.



【点评】本题考查了正多边形的和圆的知识，解题的关键是了解正多边形的半径、边心距及边长的一半构成特殊的直角三角形．

15. (4分) 今年3月，上海市开展了在线学习，同时号召同学们在家要坚持体育锻炼，已知某班学生一周内在家锻炼时间的频数分布直方图如图所示．如果锻炼时间在0-2小时的学生的频率是20%，那么锻炼时间在4-6小时的学生的频率是 0.25 ．

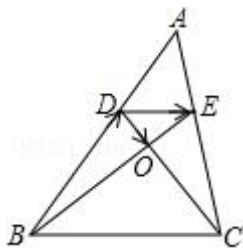


【分析】先由锻炼时间在0-2小时的学生的频率是20%，人数为8求出被调查的总人数，再根据频率=频数÷总人数可得答案．

【解答】解：∵锻炼时间在0-2小时的学生的频率是20%，人数为8，
 ∴被调查的总人数为 $8 \div 20\% = 40$ (人)，
 则锻炼时间在4-6小时的学生的频率是 $10 \div 40 = 0.25$ ，
 故答案为：0.25．

【点评】本题主要考查频数(率)分布直方图，解题的关键是掌握频率=频数÷总人数．

16. (4分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，点D、E分别在边AB、AC上， $DE \parallel BC$ ，DC、BE交于点O， $AB = 3AD$ ，设 $\overrightarrow{BD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DE} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{DO}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示是 $-\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ ．



【分析】利用平行线分线段成比例定理求出 $\overrightarrow{BC}$ ，根据三角形法则求出 $\overrightarrow{DC}$ ，证明 $DO = \frac{1}{4}DC$

即可.

【解答】解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BC = 3DE,$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = 3\vec{b},$$

$$\because \triangle DOE \sim \triangle COB,$$

$$\therefore \frac{OD}{OC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore OD = \frac{1}{3}OC = \frac{1}{4}CD,$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC},$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = -\vec{a} + 3\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}.$$

【点评】本题考查平面向量, 平行线分线段成比例定理, 相似三角形的判定和性质, 三角形法则等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

17. (4分) 将正比例函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象, 沿着 y 轴的一个方向平移 $|k|$ 个单位后与 x 轴、 y 轴围成一个三角形, 我们称这个三角形为正比例函数 $y = kx$ 的坐标轴三角形, 如果一个正比例函数的图象经过第一、三象限, 且它的坐标轴三角形的面积为 5, 那么这个正比例函数的解析式是 $y = 10x$.

【分析】分别求出向上和向下平移时, 与坐标轴的交点坐标, 再根据它的坐标轴三角形的面积为 5, 求出 k 的值即可.

【解答】解: $\because$ 正比例函数的图象经过第一、三象限,

$$\therefore k > 0,$$

$\therefore$ 当正比例函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象, 沿着 y 轴向上平移 $|k|$ 个单位时, 所得函数的解析式为 $y = kx + k$,

$$\therefore \text{与 } x \text{ 轴的交点坐标为 } (-1, 0), \text{ 与 } y \text{ 轴的交点坐标为 } (0, k),$$

$$\therefore \text{它的坐标轴三角形的面积为 } 5,$$

$$\therefore \frac{1 \times k}{2} = 5,$$

$$\therefore k = 10,$$

$\therefore$ 这个正比例函数的解析式是 $y = 10x$,

$\therefore$ 当正比例函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象, 沿着 y 轴向下平移 $|k|$ 个单位时, 所得函数的解析式为 $y = kx - k$,

$\therefore$ 与 x 轴的交点坐标为 $(1, 0)$, 与 y 轴的交点坐标为 $(0, -k)$,

$\therefore$ 它的坐标轴三角形的面积为 5,

$$\therefore \frac{1 \times k}{2} = 5,$$

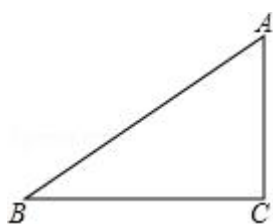
$$\therefore k = 10,$$

$\therefore$ 这个正比例函数的解析式是 $y = 10x$,

故答案为: $y = 10x$.

【点评】 此题考查了一次函数, 用到的知识点是正比例函数、一次函数的图象与性质, 关键是求出与坐标轴的交点坐标, 注意分两种情况讨论.

18. (4 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$, $\cot B = \frac{4}{3}$, 点 P 为边 AB 上一点, 将 $\triangle BPC$ 沿着 PC 翻折得到 $\triangle B'PC$, $B'C$ 与边 AB 的交于点 D , 如果 $\triangle B'PD$ 恰好为直角三角形, 那么 $BP = \underline{4 \text{ 或 } \frac{8}{5}}$.



【分析】 分两种情形: 如图 1 中, 当 $\angle DPB' = 90^\circ$ 时, 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于 H . 如图 2 中, 当 $\angle PDB' = 90^\circ$ 时, 设 $BP = PB' = x$. 分别求解即可解决问题.

【解答】 解: 如图 1 中, 当 $\angle DPB' = 90^\circ$ 时, 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于 H .

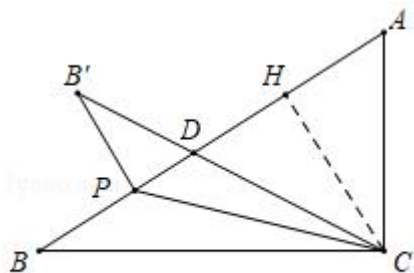


图1

$$\because \cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}, \quad AC = 6,$$

$$\therefore BC = 8,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\because \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH,$$

$$\therefore CH = \frac{24}{5},$$

$$\because \angle B + \angle A = 90^\circ, \quad \angle B' + \angle PDB' = 90^\circ, \quad \angle B = \angle B', \quad \angle PDB' = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle A,$$

$$\therefore AC = CD = 6,$$

$$\because CH \perp AD,$$

$$\therefore AH = DH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{18}{5},$$

$$\therefore BD = AB - AD = 10 - \frac{36}{5} = \frac{14}{5}, \quad DB' = CB' - CD = CB - CA = 2, \quad \text{设 } PB = x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PDB' \text{ 中, 则有 } x^2 + \left(\frac{14}{5} - x\right)^2 = 2^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{8}{5} \text{ 或 } \frac{6}{5} \text{ (舍去),}$$

如图 2 中, 当 $\angle PDB' = 90^\circ$ 时, 设 $BP = PB' = x$.

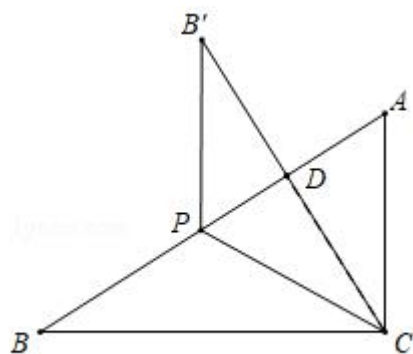


图2

$$\text{在 Rt}\triangle PDB' \text{ 中, 则有 } x^2 = \left(\frac{32}{5} - x\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2,$$

$$\text{解得 } x = 4,$$

综上所述, 满足条件的 PB 的值为 $\frac{8}{5}$ 或 4.

故答案为 4 或 $\frac{8}{5}$.

【点评】 本题考查解直角三角形, 翻折变换等知识, 解题的关键是学会用分类讨论的思

想思考问题，学会利用参数构建方程解决问题，属于中考填空题中的压轴题．

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（10 分）先化简，再求值： $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} \div \frac{x-1}{x^2-2x+1}$ ，其中 $x = \sqrt{3}+1$ ．

【分析】先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式，再将 x 的值代入计算可得．

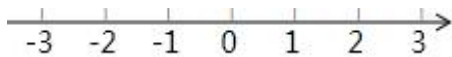
$$\begin{aligned} \text{【解答】解：原式} &= \frac{x}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{x-1} \\ &= \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x-1}{x+1}, \end{aligned}$$

当 $x = \sqrt{3}+1$ 时，

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\sqrt{3}+1-1}{\sqrt{3}+1+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} \\ &= 2\sqrt{3}-3. \end{aligned}$$

【点评】本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是熟练掌握分式的混合运算顺序和运算法则．

20.（10 分）解不等式组： $\begin{cases} 3(x-2) \leq 8-(x+6) \\ \frac{x+1}{2} < \frac{2x-1}{3} + 1 \end{cases}$ ，并把解集在数轴上表示出来．



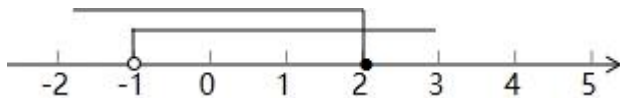
【分析】先求出每个不等式的解集，再求出不等式组的解集即可．

$$\text{【解答】解：} \begin{cases} 3(x-2) \leq 8-(x+6) \text{ ①} \\ \frac{x+1}{2} < \frac{2x-1}{3} + 1 \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①，得： $x \leq 2$ ，

解不等式②，得： $x > -1$ ，

将不等式解集表示在数轴上如下：



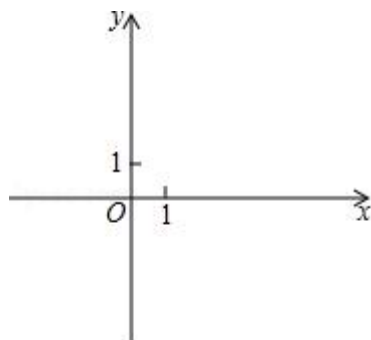
所以不等式组的解集为 $-1 < x \leq 2$ ．

【点评】本题考查了解一元一次不等式组和在数轴上表示不等式组的解集，能根据不等式的解集求出不等式组的解集是解此题的关键．

21. (10分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知一次函数 $y = 2x + m$ 与 $y = -\frac{1}{2}x + n$ 的图象都经过点 $A(-2, 0)$, 且分别与 y 轴交于点 B 和点 C .

(1) 求 B 、 C 两点的坐标;

(2) 设点 D 在直线 $y = -\frac{1}{2}x + n$ 上, 且在 y 轴右侧, 当 $\triangle ABD$ 的面积为 15 时, 求点 D 的坐标.



【分析】 (1) 依据一次函数 $y = 2x + m$ 与 $y = -\frac{1}{2}x + n$ 的图象都经过点 $A(-2, 0)$, 即可得到 m 和 n 的值, 进而得出 B 、 C 两点的坐标;

(2) 依据 $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD} = 15$, 即可得到点 D 的横坐标, 进而得出点 D 的坐标.

【解答】 解: (1) 将 $A(-2, 0)$ 代入 $y = 2x + m$, 解得 $m = 4$,

$$\therefore y = 2x + 4,$$

令 $x = 0$, 则 $y = 4$, 即 $B(0, 4)$,

将 $A(-2, 0)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + n$, 解得 $n = -1$,

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x - 1,$$

令 $x = 0$, 则 $y = -1$, 即 $C(0, -1)$,

(2) 如图, 过 D 作 $DE \perp BC$ 于 E ,

当 $\triangle ABD$ 的面积为 15 时, $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD} = 15$,

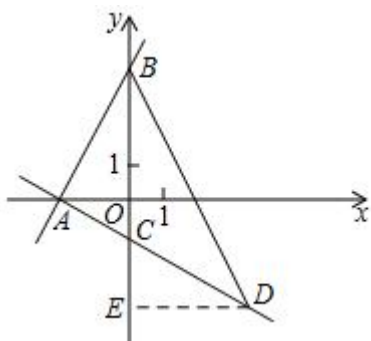
$$\text{即 } \frac{1}{2}AO \times BC + \frac{1}{2}DE \times BC = 15,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times 5 + \frac{1}{2} \times DE \times 5 = 15,$$

$$\therefore DE = 4,$$

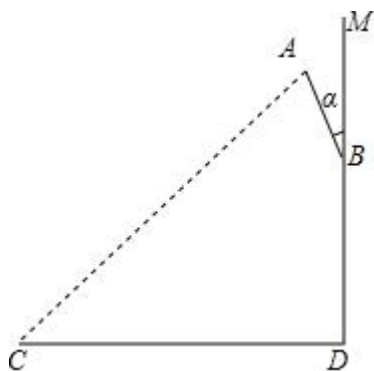
$y = -\frac{1}{2}x - 1$ 中, 令 $x = 4$, 则 $y = -3$,

$$\therefore D(4, -3).$$



【点评】 本题主要考查了两条直线相交问题，解决问题的关键是掌握一次函数图象上点的坐标特征．

22. (10 分) 一块显示屏斜挂在展示厅的墙面上，如图是显示屏挂在墙面 MD 的正侧面示意图，其中 AB 表示显示屏的宽， AB 与墙面 MD 的夹角 α 的正切值为 $\frac{2}{5}$ ，在地面 C 处测得显示屏顶部 A 的仰角为 45° ，屏幕底部 B 与地面 CD 的距离为 2 米，如果 C 处与墙面之间的水平距离 CD 为 3.4 米，求显示屏的宽 AB 的长．（结果保留根号）



【分析】 过 A 作 $AP \perp DM$ 于 P ， $AH \perp CD$ 于 H ，过 B 作 $BN \perp AH$ 于 N ，设 $AP = BN = 2x$ ， $AN = PB = 5x$ ，解直角三角形即可得到结论．

【解答】 解：过 A 作 $AP \perp DM$ 于 P ， $AH \perp CD$ 于 H ，过 B 作 $BN \perp AH$ 于 N ，

$$\because \tan \angle ABM = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \text{设 } AP = BN = 2x, AN = PB = 5x,$$

$$\because BD = 2, CD = 3.4,$$

$$\therefore HN = 2, CH = 3.4 - 2x,$$

$$\therefore AH = 5x + 2,$$

$$\because \angle ACD = 45^\circ,$$

$$\therefore AH = CH,$$

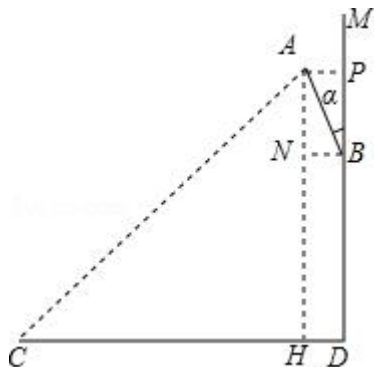
$$\therefore 3.4 - 2x = 5x + 2,$$

解得： $x = 0.2$ ，

$$\therefore PB = 1, AP = 0.4,$$

$$\therefore AB = \sqrt{PB^2 - AP^2} = \sqrt{0.4^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{29}}{5} \text{ (米)},$$

答：显示屏的宽 AB 的长为 $\frac{\sqrt{29}}{5}$ 米。

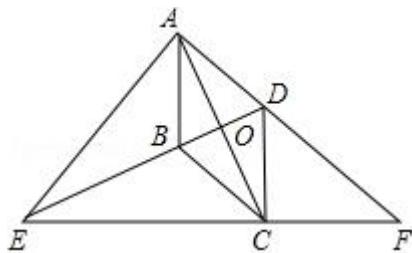


【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，解决此类问题要了解角之间的关系，找到与已知和未知相关联的直角三角形，当图形中没有直角三角形时，要通过作高或垂线构造直角三角形，另当问题以一个实际问题的形式给出时，要善于读懂题意，把实际问题划归为直角三角形中边角关系问题加以解决。

23. (12 分) 已知：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O ，点 E 是 DB 延长线上的一点，且 $EA = EC$ ，分别延长 AD 、 EC 交于点 F 。

(1) 求证：四边形 $ABCD$ 为菱形；

(2) 如果 $\angle AEC = 2\angle BAC$ ，求证： $EC \cdot CF = AF \cdot AD$ 。



【分析】 (1) 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形知 $OA = OC$ ，结合 $EA = EC$ 知 $EO \perp AC$ ，从而得证；

(2) 先由 $\angle AEB = \angle CEB = \frac{1}{2}\angle AEC$ ，平行四边形 $ABCD$ 为菱形得 $\angle CDF = \angle DAC + \angle DCA = \angle AEF$ ，据此可证 $\triangle FCD \sim \triangle FAE$ 得 $\frac{FC}{FA} = \frac{CD}{AE}$ ，结合 $CD = AD$ ， $AE = CE$ 可得答案。

【解答】 解：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore OA = OC,$$

又 $\because EA = EC$,

$\therefore EO \perp AC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形;

(2) $\because \angle AEB = \angle CEB = \frac{1}{2} \angle AEC$, 平行四边形 $ABCD$ 为菱形,

$\therefore \angle AEB = \angle CEB = \angle BAC = \angle BCA = \angle DAC = \angle DCA$,

$\angle CDF = \angle DAC + \angle DCA = \angle AEF$,

$\therefore \triangle FCD \sim \triangle FAE$,

$\therefore \frac{FC}{FA} = \frac{CD}{AE}$,

$\because CD = AD, AE = CE$,

$\therefore \frac{FC}{FA} = \frac{AD}{CE}$, 即 $EC \cdot CF = AF \cdot AD$.

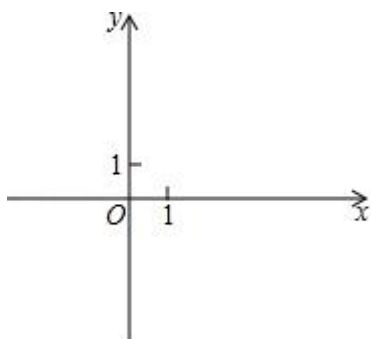
【点评】 本题主要考查相似三角形的判定与性质, 解题的关键是掌握平行四边形的性质、菱形的判定、等腰三角形的性质及相似三角形的判定与性质等知识点.

24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知点 A 在 x 轴的正半轴上, 且与原点的距离为 3, 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 3$ ($a \neq 0$) 经过点 A , 其顶点为 C , 直线 $y = 1$ 与 y 轴交于点 B , 与抛物线交于点 D (在其对称轴右侧), 联结 BC 、 CD .

(1) 求抛物线的表达式及点 C 的坐标;

(2) 点 P 是 y 轴的负半轴上的一点, 如果 $\triangle PBC$ 与 $\triangle BCD$ 相似, 且相似比不为 1, 求点 P 的坐标;

(3) 将 $\angle CBD$ 绕着点 B 逆时针方向旋转, 使射线 BC 经过点 A , 另一边与抛物线交于点 E (点 E 在对称轴的右侧), 求点 E 的坐标.



【分析】 (1) 把点 A 的坐标代入抛物线的解析式中可得: a 的值, 从而得抛物线的解析式, 配方得顶点 C 的坐标;

(2) 根据 $\angle DBC = \angle PBC = 45^\circ$, 且相似比不为 1, 所以只能 $\triangle CBP \sim \triangle DBC$, 列比例

式可得 BP 的长，从而得点 P 的坐标；

(3) 连接 AC ，过 E 作 $EH \perp BD$ 于 H ，先根据勾股定理的逆定理证明 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，且 $\angle ACB = 90^\circ$ ，由等角三角函数得 $\tan \angle ABC = \tan \angle EBD = \frac{1}{2} = \frac{EH}{BH}$ ，设 $EH = m$ ，则 $BH = 2m$ ，表示 $E(2m, m+1)$ ，代入抛物线的解析式，可得结论。

【解答】解：(1) $\because$ 点 A 在 x 轴的正半轴上，且与原点的距离为 3，

$$\therefore A(3, 0),$$

把 $A(3, 0)$ 代入抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 3$ 中得： $0 = 9a - 12a + 3$ ，

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为：} y = x^2 - 4x + 3,$$

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1,$$

$$\therefore C(2, -1);$$

$$(2) \text{ 当 } y = 1 \text{ 时, } x^2 - 4x + 3 = 1,$$

$$\text{解得: } x_1 = 2 - \sqrt{2}, x_2 = 2 + \sqrt{2},$$

$$\text{由题意得: } D(2 + \sqrt{2}, 1),$$

$$\therefore B(0, 1), C(2, -1),$$

$$\therefore BC = \sqrt{2^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}, BD = 2 + \sqrt{2},$$

$$\therefore \angle DBC = \angle PBC = 45^\circ, \text{ 且相似比不为 } 1,$$

只能 $\triangle CBP \sim \triangle DBC$ ，

$$\therefore \frac{CB}{DB} = \frac{BP}{BC}, \text{ 即 } \frac{2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{BP}{2\sqrt{2}},$$

$$\therefore BP = 8 - 4\sqrt{2},$$

$$\therefore P(0, 4\sqrt{2} - 7);$$

(3) 连接 AC ，过 E 作 $EH \perp BD$ 于 H ，

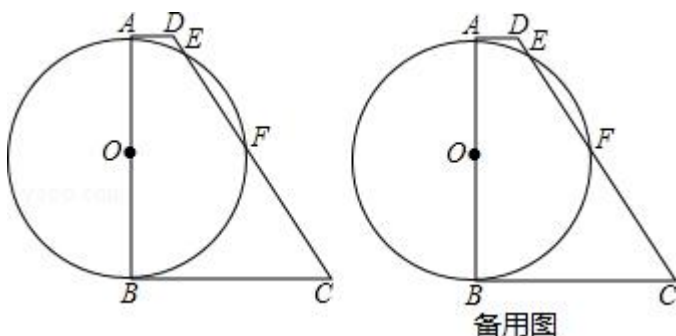
由旋转得： $\angle CBD = \angle ABE$ ，

$$\therefore \angle EBD = \angle ABC,$$

$$\therefore AB^2 = 3^2 + 1^2 = 10, BC^2 = 2^2 + 2^2 = 4, AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，且 $\angle ACB = 90^\circ$ ，



【分析】(1) 证 OF 为梯形 $ABCD$ 的中位线，得出 $r = OF = \frac{1}{2}(AD+BC) = 3$ 即可；

(2) 连接 OD 、 OC ，过点 D 作 $DM \perp BC$ 于 M ，则 $CM = BC - BM = 4$ ，由勾股定理得出 $DC = 2\sqrt{r^2+4}$ ，由四边形 $ABCD$ 的面积 = $\triangle DOC$ 的面积 + $\triangle AOD$ 的面积 + $\triangle BOC$ 的面积，进而得出答案；

(3) 证 OG 是梯形 $ABCD$ 的中位线，得出 $OG \parallel AD$ ， $OG = 3$ ， $DG = \frac{1}{2}CD = \sqrt{r^2+4}$ ，由勾股定理得 $OD = \sqrt{r^2+1}$ ，分三种情况，分别求解即可。

【解答】解：(1) $\because OF \parallel BC$ ， $OA = OB$ ，

$\therefore OF$ 为梯形 $ABCD$ 的中位线，

$$\therefore OF = \frac{1}{2}(AD+BC) = \frac{1}{2}(1+5) = 3,$$

即 $\odot O$ 的半径长为 3；

(2) 连接 OD 、 OC ，过点 D 作 $DM \perp BC$ 于 M ，如图 1 所示：

则 $BM = AD = 1$ ，

$$\therefore CM = BC - BM = 4,$$

$$\therefore DC = \sqrt{DM^2 + CM^2} = \sqrt{(2r)^2 + 4^2} = 2\sqrt{r^2 + 4},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 = $\triangle DOC$ 的面积 + $\triangle AOD$ 的面积 + $\triangle BOC$ 的面积，

$$\therefore \frac{1}{2}(1+5) \times 2r = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{r^2+4} \times y + \frac{1}{2} \times r \times 1 + \frac{1}{2} \times r \times 5,$$

$$\text{整理得：} y = \frac{3r\sqrt{r^2+4}}{r^2+4};$$

(3) $\triangle ODG$ 能成为等腰三角形，理由如下：

$\because$ 点 G 为 DC 的中点， $OA = OB$ ，

$\therefore OG$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线，

$$\therefore OG \parallel AD, \quad OG = \frac{1}{2}(AD+BC) = \frac{1}{2}(1+5) = 3,$$

$$DG = \frac{1}{2}CD = \sqrt{r^2+4},$$

$$\text{由勾股定理得: } OD = \sqrt{OA^2+AD^2} = \sqrt{r^2+1},$$

分三种情况:

$$\text{① } DG = DO \text{ 时, 则 } \sqrt{r^2+4} = \sqrt{r^2+1}, \text{ 无解;}$$

② $OD = OG$ 时, 如图 2 所示:

$$\sqrt{r^2+1} = 3,$$

$$\text{解得: } r = 2\sqrt{2};$$

③ $GD = GO$ 时, 作 $OH \perp CD$ 于 H , 如图 3 所示:

$$\angle GOD = \angle GDO,$$

$$\because OG \parallel AD,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle GOD,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle GDO,$$

$$\text{在 } \triangle ADO \text{ 和 } \triangle HDO \text{ 中, } \begin{cases} \angle DAO = \angle DHO = 90^\circ \\ \angle ADO = \angle HDO \\ OD = OD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADO \cong \triangle HDO \text{ (AAS)},$$

$$\therefore OA = OH,$$

则此时圆 O 和 CD 相切, 不合题意;

综上所述, $\triangle ODG$ 能成为等腰三角形, $r = 2\sqrt{2}$.

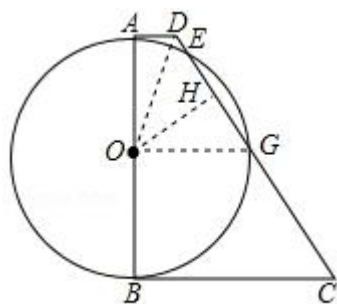


图 3

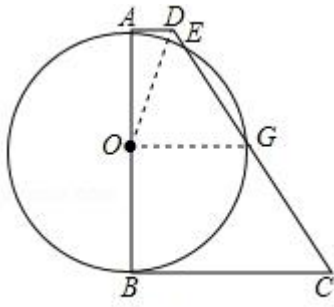


图 2

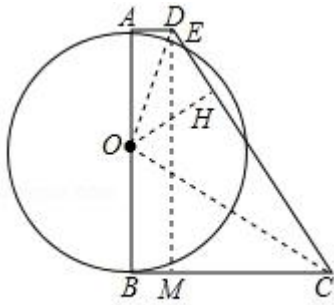


图 1

【点评】 本题考查了垂径定理、梯形中位线定理、勾股定理、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质等知识；熟练掌握垂径定理和梯形中位线定理是解题的关键．