

2020 年上海市徐汇区中考数学二模试卷

一、选择题

1. (3 分) 下列实数中, 有理数是 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{22}{7}$ D. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

2. (3 分) 下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

- A. $\sqrt{a^2+b^2}$ B. $\sqrt{(a+b)^2}$ C. $\sqrt{4a+4b}$ D. $\sqrt{a^2(b+4)}$

3. (3 分) 下列方程中, 有实数根的是 ()

- A. $x^2+1=0$ B. $x^2-1=0$ C. $\sqrt{x-1}=-1$ D. $\frac{1}{x-1}=0$

4. (3 分) 关于抛物线 $y = -x^2+2x-3$ 的判断, 下列说法正确的是 ()

- A. 抛物线的开口方向向上
B. 抛物线的对称轴是直线 $x = -1$
C. 抛物线对称轴左侧部分是下降的
D. 抛物线顶点到 x 轴的距离是 2

5. (3 分) 如果从货船 A 测得小岛 B 在货船 A 的北偏东 30° 方向 500 米处, 那么从小岛 B 看货船 A 的位置, 此时货船 A 在小岛 B 的 ()

- A. 南偏西 30° 方向 500 米处
B. 南偏西 60° 方向 500 米处
C. 南偏西 30° 方向 $250\sqrt{3}$ 米处
D. 南偏西 60° 方向 $250\sqrt{3}$ 米处

6. (3 分) 下列命题中, 假命题是 ()

- A. 顺次联结任意四边形四边中点所得的四边形是平行四边形
B. 顺次联结对角线相等的四边形四边中点所得的四边形是菱形
C. 顺次联结对角线互相垂直的四边形四边中点所得的四边形是矩形
D. 顺次联结两组邻边互相垂直的四边形四边中点所得的四边形是矩形

二、填空题

7. (3 分) 计算: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} =$ _____.

8. (3 分) 分解因式: $m^2+2m-3 =$ _____.

9. (3分) 方程组 $\begin{cases} y=2x \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 的解是_____.

10. (3分) 已知正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的函数值 y 随着自变量 x 的值增大而减小, 那么符合条件的正比例函数可以是_____. (只需写出一个)

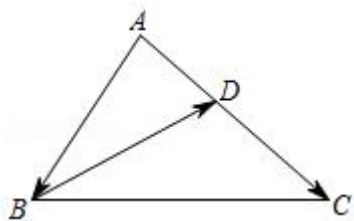
11. (3分) 如果关于 x 的方程 $3x^2+4x+m=0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 的值是_____.

12. (3分) 已知直线 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 与 x 轴和 y 轴的交点分别是 $(1, 0)$ 和 $(0, -2)$, 那么关于 x 的不等式 $kx+b < 0$ 的解集是_____.

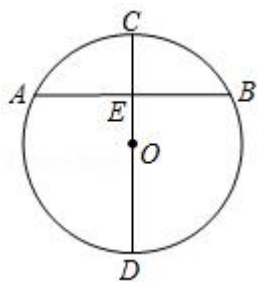
13. (3分) 如果从长度分别为 2、4、6、7 的四条线段中随机抽取三条线段, 那么抽取的三条线段能构成三角形的概率是_____.

14. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, 已知 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的面积比是 2:3,

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{BD}$ (用向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示) 是_____.



15. (3分) 如图, $\odot O$ 的弦 AB 和直径 CD 交于点 E , 且 CD 平分 AB , 已知 $AB=8$, $CE=2$, 那么 $\odot O$ 的半径长是_____.

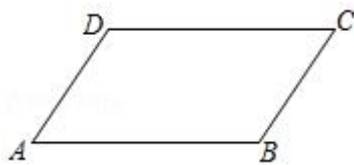


16. (3分) 某种花卉每盆的盈利与每盆的株数有一定的关系, 每盆植 3 株时, 平均每株盈利 4 元; 若每盆增加 1 株, 平均每株盈利减少 0.5 元, 要使每盆的盈利达到 15 元, 每盆应多植多少株? 设每盆多植 x 株, 可列出的方程是_____.

17. (3分) 已知正三角形 ABC 的边长为 R , 那么 $\triangle ABC$ 的周长是_____. (用含 R 的式子表示)

18. (3分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=3$, $AB=5$, $\sin A = \frac{4}{5}$, 将平行四边形 $ABCD$ 绕着点 B 顺时针旋转 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) 后, 点 A 的对应是点 A' , 联结 $A'C$, 如果 $A'C \perp$

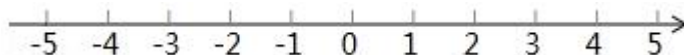
BC, 那么 $\cos\theta$ 的值是_____.



三、解答题

19. 计算: $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + |\sqrt{2}-2| - 2\cos 30^\circ + 3\frac{1}{2}$.

20. 解不等式组: $\begin{cases} -3(x-2) > -x-4 \\ -x-\frac{7}{3} \leq \frac{1-x}{3} \end{cases}$, 并将解集在数轴上表示出来.



21. 在抗击“新冠肺炎疫情”的日子里, 上海全市学生积极响应号召开展“停课不停学”的线上学习活动, 某中学为了了解全校 1200 名学生一周内平均每天进行在家体育锻炼时间的情况, 随机调查了该校 100 名学生一周内平均每天在家体育锻炼时间的情况, 结果如下表:

时间 (分)	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
人数	16	24	14	10	8	6	8	4	6	4

完成下列各题:

(1) 根据上述统计表中的信息, 可知这 100 名学生一周内平均每天在家体育锻炼时间的众数是_____分, 中位数是_____分;

(2) 小李根据上述统计表中的信息, 制作了频数分布表和频数分布直方图 (不完整), 那么:

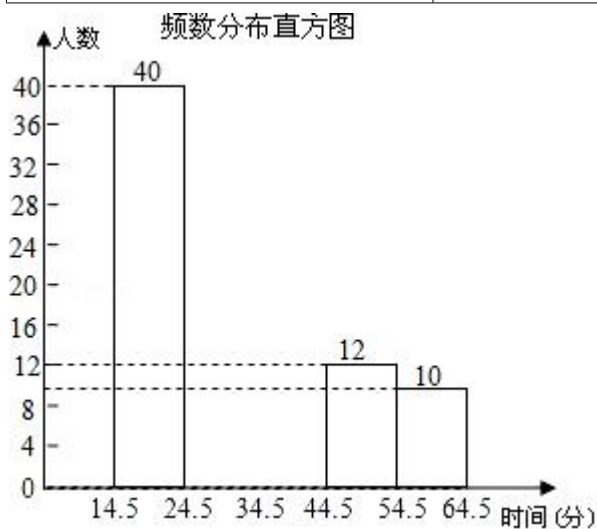
①频数分布表中 $m =$ _____, $n =$ _____;

②请补全频数分布直方图.

(3) 请估计该学校平均每天在家体育锻炼时间不少于 35 分钟的学生大约有_____人.

频数分布表

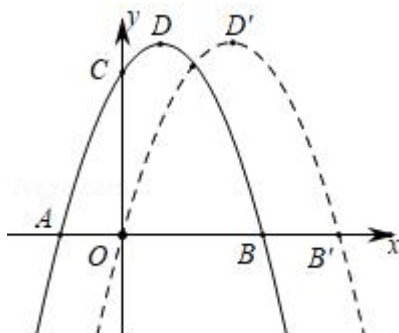
分组（时间：分钟）	频数
14.5 - 24.5	40
24.5 - 34.5	m
34.5 - 44.5	n
44.5 - 54.5	12
54.5 - 64.5	10
合计	100



22. 如图，抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 3$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和 B ，与 y 轴交于点 C ，顶点为点 D 。

(1) 求抛物线的表达式、点 B 和点 D 的坐标；

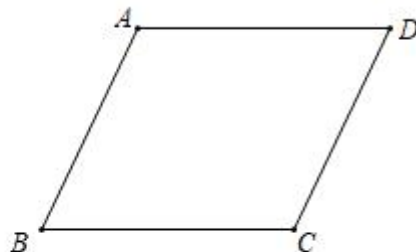
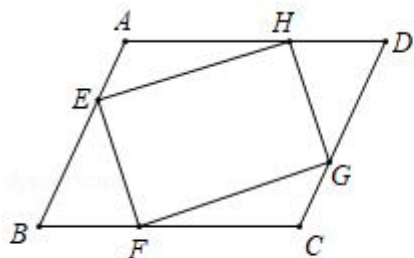
(2) 将抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 3$ 向右平移后所得新抛物线经过原点 O ，点 B 、 D 的对应点分别是点 B' 、 D' ，联结 $B'C$ ， $B'D'$ ， CD' ，求 $\triangle CB'D'$ 的面积。



23. 已知：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 、 G 、 H 分别在边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上， $BE = DG$ ， $BF = DH$ 。

(1) 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

(2) 当 $AB = BC$ ，且 $BE = BF$ 时，求证：四边形 $EFGH$ 是矩形。



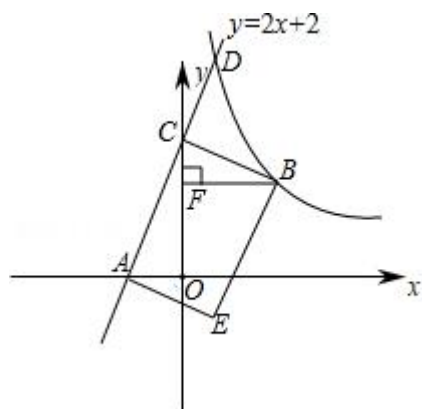
备用图

24. 如图，已知直线 $y = 2x + 2$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 C ，矩形 $ACBE$ 的顶点 B 在第一象限的反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 图象上，过点 B 作 $BF \perp OC$ ，垂足为 F ，设 $OF = t$ 。

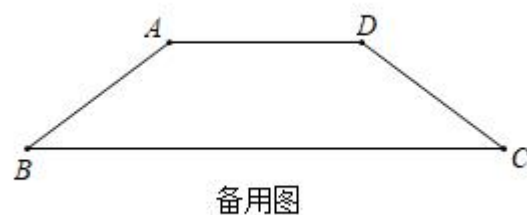
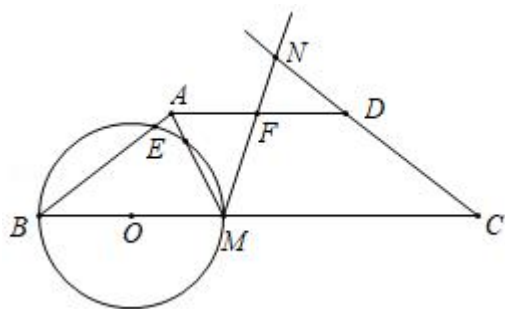
(1) 求 $\angle ACO$ 的正切值；

(2) 求点 B 的坐标 (用含 t 的式子表示)；

(3) 已知直线 $y = 2x + 2$ 与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 图象都经过第一象限的点 D ，联结 DE ，如果 $DE \perp x$ 轴，求 m 的值。



25. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD = AD = 5$, $\cos B = \frac{4}{5}$, 点 O 是边 BC 上的动点, 以 OB 为半径的 $\odot O$ 与射线 BA 和边 BC 分别交于点 E 和点 M , 联结 AM , 作 $\angle CMN = \angle BAM$, 射线 MN 与边 AD 、射线 CD 分别交于点 F 、 N .
- (1) 当点 E 为边 AB 的中点时, 求 DF 的长;
- (2) 分别联结 AN 、 MD , 当 $AN \parallel MD$ 时, 求 MN 的长;
- (3) 将 $\odot O$ 绕着点 M 旋转 180° 得到 $\odot O'$, 如果以点 N 为圆心的 $\odot N$ 与 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 都内切, 求 $\odot O$ 的半径长.



2020 年上海市徐汇区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题

1. (3 分) 下列实数中, 有理数是 ()

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{22}{7}$

D. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

【分析】有理数包括整数和分数; 无理数是无限不循环小数.

【解答】解: A、 $\frac{\pi}{2}$ 是无限不循环小数, 是无理数;

B、 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 是无限不循环小数, 是无理数;

C、 $\frac{22}{7}$ 是分数, 是有理数;

D、 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 是无限不循环小数, 是无理数.

故选: C.

【点评】此题考查了有理数和无理数. 解题的关键是掌握有理数和无理数的概念.

2. (3 分) 下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

A. $\sqrt{a^2+b^2}$

B. $\sqrt{(a+b)^2}$

C. $\sqrt{4a+4b}$

D. $\sqrt{a^2(b+4)}$

【分析】根据最简二次根式的定义即可求出答案.

【解答】解: (B) 原式 = $|a+b|$, 故 B 不是最简二次根式.

(C) 原式 = $2\sqrt{a+b}$, 故 C 不是最简二次根式.

(D) 原式 = $|a|\sqrt{b+4}$, 故 D 不是最简二次根式.

故选: A.

【点评】本题考查最简二次根式, 解题的关键是熟练运用最简二次根式的定义, 本题属于基础题型.

3. (3 分) 下列方程中, 有实数根的是 ()

A. $x^2+1=0$

B. $x^2-1=0$

C. $\sqrt{x-1}=-1$

D. $\frac{1}{x-1}=0$

【分析】A、变形得 $x^2 = -1 < 0$, 由此得到原方程无实数根;

B、变形得 $x^2 = 1$, 由此得到原方程有实数根;

C、根据非负数的性质可得原方程无实数根;

D、先把方程两边乘 $x - 1$ 得 $1 = 0$ ，由此得到原方程无实数根.

【解答】解：A、方程变形得 $x^2 = -1 < 0$ ，故没有实数根，此选项错误；

B、方程变形得 $x^2 = 1$ ，故有实数根，此选项正确；

C、二次根式非负，故没有实数根，此选项错误；

D、方程两边乘 $x - 1$ 得 $1 = 0$ ，没有实数根，此选项错误.

故选：B.

【点评】本题考查了无理方程：根号内含有未知数的方程叫无理方程；解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解，常常采用平方法去根号.

4. (3分) 关于抛物线 $y = -x^2 + 2x - 3$ 的判断，下列说法正确的是 ()

A. 抛物线的开口方向向上

B. 抛物线的对称轴是直线 $x = -1$

C. 抛物线对称轴左侧部分是下降的

D. 抛物线顶点到 x 轴的距离是 2

【分析】由抛物线的解析式可求得其开口方向、对称轴、增减性以及顶点坐标，进一步可得出答案.

【解答】解： $\because y = -x^2 + 2x - 3 = -(x - 1)^2 - 2$,

$\therefore$ 抛物线开口向下，对称轴为 $x = 1$ ，顶点坐标为 $(1, -2)$,

在对称轴左侧， y 随 x 的增大而增大，

$\therefore A$ 、 B 、 C 不正确；

$\because$ 抛物线顶点到 x 轴的距离是 $|-2| = 2$,

$\therefore D$ 正确，

故选：D.

【点评】本题主要考查二次函数的性质，掌握二次函数的顶点式是解题的关键，即在 $y = a(x - h)^2 + k$ 中，对称轴为 $x = h$ ，顶点坐标为 (h, k) .

5. (3分) 如果从货船 A 测得小岛 b 在货船 A 的北偏东 30° 方向 500 米处，那么从小岛 B 看货船 A 的位置，此时货船 A 在小岛 B 的 ()

A. 南偏西 30° 方向 500 米处

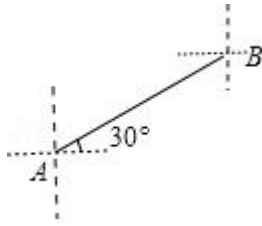
B. 南偏西 60° 方向 500 米处

C. 南偏西 30° 方向 $250\sqrt{3}$ 米处

D. 南偏西 60° 方向 $250\sqrt{3}$ 米处

【分析】根据方位角画出图形解答即可．

【解答】解：如图所示：



$\therefore$ 小岛 B 在货船 A 的北偏东 30° 方向 500 米处，

$\therefore$ 货船 A 在小岛 B 的南偏西 30° 方向 500 米处，

故选：A．

【点评】此题考查解直角三角形的方位角问题，关键是根据题意画出图形解答．

6. (3 分) 下列命题中，假命题是 ()

- A. 顺次联结任意四边形四边中点所得的四边形是平行四边形
- B. 顺次联结对角线相等的四边形四边中点所得的四边形是菱形
- C. 顺次联结对角线互相垂直的四边形四边中点所得的四边形是矩形
- D. 顺次联结两组邻边互相垂直的四边形四边中点所得的四边形是矩形

【分析】根据三角形中位线定理、菱形、矩形的判定定理判断．

【解答】解：连接 BD ，

$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 中， E 、 H 是 AB 、 AD 中点，

$$\therefore EH \parallel BD, EH = \frac{1}{2}BD.$$

$\therefore$ 在 $\triangle BCD$ 中， G 、 F 是 DC 、 BC 中点，

$$\therefore GF \parallel BD, GF = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore EH = GF, EH \parallel GF,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形，A 是真命题；

当 $AC = BD$ 时， $EH = EF$ ，

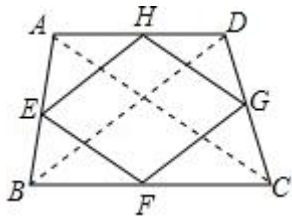
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为菱形，B 是真命题；

当 $AC \perp BD$ 时， $EH \perp EF$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为正方形，C 是真命题；

顺次直角梯形四边中点所得的四边形不是矩形，D 是假命题；

故选：D．



【点评】本题考查的是命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题．判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理．

二、填空题

7. (3分) 计算: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$.

【分析】直接通分运算，再利用分式的加减运算法则计算得出答案．

【解答】解: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab}$
 $= \frac{b-a}{ab}$.

故答案为: $\frac{b-a}{ab}$.

【点评】此题主要考查了分式的加减，正确进行通分运算是解题关键．

8. (3分) 分解因式: $m^2+2m-3 = (m+3)(m-1)$.

【分析】直接利用十字相乘法分解因式得出答案．

【解答】解: $m^2+2m-3 = (m+3)(m-1)$.

故答案为: $(m+3)(m-1)$.

【点评】此题主要考查了十字相乘法，正确分解常数项是解题关键．

9. (3分) 方程组 $\begin{cases} y=2x \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-2 \end{cases}$.

【分析】把①代入②即可把方程组转化成方程，求出 x 的值，把 x 的值代入①即可求出 y .

【解答】解: $\begin{cases} y=2x \text{ ①} \\ x^2+y^2=5 \text{ ②} \end{cases}$

把①代入②得: $5x^2 = 5$,

$x^2 = 1$,

$x = \pm 1$,

把 $x = 1$ 代入①得: $y = 2$;

把 $x = -1$ 代入①得: $y = -2$;

故答案为: $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-2 \end{cases}.$

【点评】 本题考查了解高次方程组和解一元二次方程，关键是能把方程组转化成一元二次方程.

10. (3分) 已知正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的函数值 y 随着自变量 x 的值增大而减小，那么符合条件的正比例函数可以是 $y = -2x$. (只需写出一个)

【分析】 根据正比例函数的性质可得 $k < 0$ ，然后确定 k 的值即可.

【解答】 解: $\because$ 正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的函数值 y 随着自变量 x 的值增大而减小，

$$\therefore k < 0,$$

$$\therefore \text{符合条件的正比例函数可以是 } y = -2x,$$

故答案为: $y = -2x$.

【点评】 此题主要考查了正比例函数的性质，关键是掌握正比例函数的性质：正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的图象是一条经过原点的直线，当 $k > 0$ 时，该直线经过第一、三象限，且 y 的值随 x 的值增大而增大；当 $k < 0$ 时，该直线经过第二、四象限，且 y 的值随 x 的值增大而减小.

11. (3分) 如果关于 x 的方程 $3x^2+4x+m=0$ 有两个相等的实数根，那么 m 的值是 $-\frac{4}{3}$.

【分析】 根据方程有两个相等的实数根得出 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，据此列出关于 m 的方程，解之可得.

【解答】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $3x^2+4x+m=0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times m = 0,$$

$$\text{解得 } m = -\frac{4}{3},$$

故答案为: $-\frac{4}{3}$.

【点评】 本题主要考查根的判别式，利用一元二次方程根的判别式 ($\Delta = b^2 - 4ac$) 判断方程的根的情况.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系:

- ①当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；
- ②当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；
- ③当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

12. (3分) 已知直线 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 与 x 轴和 y 轴的交点分别是 $(1, 0)$ 和 $(0, -2)$,

那么关于 x 的不等式 $kx+b < 0$ 的解集是 $x < 1$.

【分析】先利用待定系数法求出一次函数解析式，然后解不等式 $kx+b < 0$ 即可.

【解答】解：把 $(1, 0)$ 和 $(0, -2)$ 代入 $y = kx+b$ 得 $\begin{cases} k+b=0 \\ b=-2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} k=2 \\ b=-2 \end{cases}$ ，

所以一次函数解析式为 $y = 2x - 2$ ，

解不等式 $2x - 2 < 0$ 得 $x < 1$.

故答案为 $x < 1$.

【点评】本题考查了一次函数与一元一次不等式：从函数的角度看，就是寻求使一次函数 $y = kx+b$ 的值大于（或小于）0 的自变量 x 的取值范围.

13. (3 分) 如果从长度分别为 2、4、6、7 的四条线段中随机抽取三条线段，那么抽取的三条线段能构成三角形的概率是 $\frac{1}{2}$.

【分析】利用列举法展示所有 6 种等可能的结果数，根据三角形三边的关系可判断三条线段能构成三角形的结果数，然后根据概率求解，

【解答】解：从长度分别为 2、4、6、7 的四条线段中随机抽取三条线段，它们为 2、4、6；2、4、7；2、6、7；4、6、7，共有 4 种等可能的结果数，其中三条线段能构成三角形的结果数为 2，

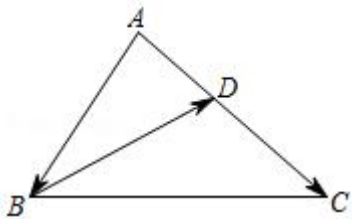
所以三条线段能构成三角形的概率 $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

故答案为 $\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后利用概率公式计算事件 A 或事件 B 的概率. 也考查了三角形三边的关系.

14. (3 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AC 上，已知 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的面积比是 2:3，

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{BD}$ （用向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示）是 $-\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$.



【分析】利用三角形法则可知： $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ ，求出 $\overrightarrow{AD}$ 即可解决问题.

【解答】解： $\because \triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的面积比是 2:3，

$$\therefore AD:DC=2:3,$$

$$\therefore AD=\frac{2}{5}AC,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC},$$

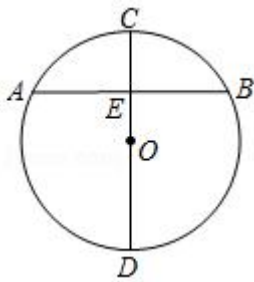
$$\therefore \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{a}+\frac{2}{5}\overrightarrow{b},$$

$$\text{故答案为: } -\overrightarrow{a}+\frac{2}{5}\overrightarrow{b}.$$

【点评】 本题考查平面向量，三角形法则等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型．

15. (3分) 如图， $\odot O$ 的弦 AB 和直径 CD 交于点 E ，且 CD 平分 AB ，已知 $AB=8$ ， $CE=2$ ，那么 $\odot O$ 的半径长是 5．



【分析】 连接 OA ，由垂径定理的推论得出 $AB \perp CD$ ，由已知可得 $AE = \frac{1}{2}AB = 4$ ， $OE =$

$OC - CE = r - 2$ ， $OA = r$ ，在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中，利用勾股定理求 r ．

【解答】 解：连接 OA ，

$\therefore$ ， $\odot O$ 的弦 AB 和直径 CD 交于点 E ，且 CD 平分 AB ，

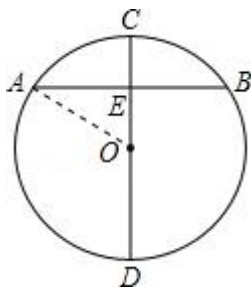
$$\therefore AB \perp CD,$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = 4, \text{ 又 } OE = OC - CE = r - 2, OA = r,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中，由勾股定理，得 $AE^2 + OE^2 = OA^2$ ，即 $4^2 + (r - 2)^2 = r^2$ ，

解得： $r = 5$ ，

故答案为：5．



【点评】 本题考查了垂径定理的推论、勾股定理的运用．关键是连接半径，将问题转化到直角三角形中，利用勾股定理，列方程求解．

16. (3 分) 某种花卉每盆的盈利与每盆的株数有一定的关系，每盆植 3 株时，平均每株盈利 4 元；若每盆增加 1 株，平均每株盈利减少 0.5 元，要使每盆的盈利达到 15 元，每盆应多植多少株？设每盆多植 x 株，可列出的方程是 $(3+x)(4-0.5x) = 15$.

【分析】 设每盆多植 x 株，则平均每株盈利 $(4 - 0.5x)$ ，根据总利润 = 株数 $\times$ 每株的盈利即可得．

【解答】 解：设每盆多植 x 株，可列出的方程： $(3+x)(4-0.5x) = 15$ ，

故答案为： $(3+x)(4-0.5x) = 15$ ．

【点评】 本题主要考查由实际问题抽象出一元二次方程，理解题意找到题目蕴含的相等关系是解题的关键．

17. (3 分) 已知正三角形 ABC 的半径长为 R ，那么 $\triangle ABC$ 的周长是 $3\sqrt{3}R$. (用含 R 的式子表示)

【分析】 根据题意作出图形，构造直角三角形求得三角形的边长即可求得本题的答案．

【解答】 解：如图所示：

连接 OA 、 OB 、 OC ，过 O 作 $OD \perp BC$ 于 D ，

$\because \triangle ABC$ 是半径为 R 的等边三角形，

$\therefore OA = OB = OC = R$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle OBD = 30^\circ$ ，

$\because OD \perp BC$ ，

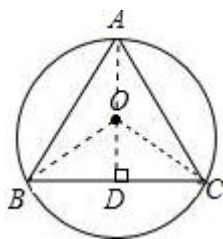
$\therefore \angle ODB = 90^\circ$ ， $OD = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}R$ ，

$\therefore BD = \sqrt{3}OD = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ ，

$\therefore BC = 2BD = \sqrt{3}R$ ，

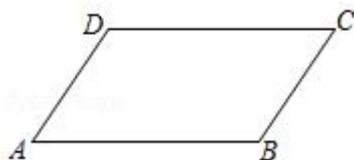
$\therefore$ 该三角形的周长为 $3\sqrt{3}R$ ，

故答案为: $3\sqrt{3}R$.



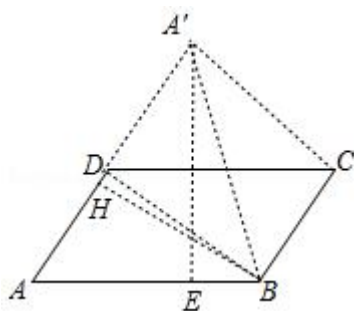
【点评】 本题考查的是正三角形的性质、边心距、半径、周长和面积的计算；熟练掌握正三角形的性质，根据题意画出图形，利用数形结合求解是解答此题的关键.

18. (3分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=3$, $AB=5$, $\sin A = \frac{4}{5}$, 将平行四边形 $ABCD$ 绕着点 B 顺时针旋转 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) 后, 点 A 的对应是点 A' , 联结 $A'C$, 如果 $A'C \perp BC$, 那么 $\cos\theta$ 的值是 $\frac{7}{25}$.



【分析】 连接 BD , 连接 $A'D$, 过点 B 作 $BH \perp AD$ 于 H , 过点 A' 作 $A'E \perp AB$ 于 E , 先证点 H 与点 D 重合, 再证四边形 $A'CBD$ 是矩形, 可得 $\angle A'DB = 90^\circ$, 可得点 A , 点 D , 点 A' 共线, 由面积法可求 $A'E = \frac{24}{5}$, 由勾股定理可求解.

【解答】 解: 如图, 连接 BD , 连接 $A'D$, 过点 B 作 $BH \perp AD$ 于 H , 过点 A' 作 $A'E \perp AB$ 于 E ,



$$\because \sin A = \frac{4}{5} = \frac{BH}{AB},$$

$$\therefore BH = 4,$$

$$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{25 - 16} = 3,$$

$$\therefore AD = AH = 3,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 与点 } H \text{ 重合},$$

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$,
 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore AD = BC = 3$, $AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle ADB = \angle DBC = 90^\circ$,
 又 $\because A'C \perp BC$,
 $\therefore BD \parallel A'C$,
 $\because$ 将平行四边形 $ABCD$ 绕着点 B 顺时针旋转 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$),
 $\therefore A'B = AB = 5$,
 $\because A'C \perp BC$,
 $\therefore A'C = \sqrt{A'B^2 - BC^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$,
 $\therefore A'C = BD$,
 $\therefore$ 四边形 $A'CBD$ 是平行四边形,
 $\because \angle DBC = 90^\circ$, $BC = A'D = 3$,
 $\therefore$ 四边形 $A'CBD$ 是矩形,
 $\therefore \angle A'DB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle A'DB + \angle ADB = 180^\circ$,
 $\therefore$ 点 A , 点 D , 点 A' 共线,
 $\therefore S_{\triangle A'BA} = \frac{1}{2} \times AB \times A'E = \frac{1}{2} \times AA' \times BD$,
 $\therefore A'E = \frac{24}{5}$,
 $\therefore BE = \sqrt{A'B^2 - A'E^2} = \sqrt{25 - \frac{576}{25}} = \frac{7}{5}$,
 $\therefore \cos \theta = \frac{BE}{A'B} = \frac{\frac{7}{5}}{5} = \frac{7}{25}$,
 故答案为: $\frac{7}{25}$.

【点评】 本题考查了平行四边形的性质, 矩形的判定和性质, 勾股定理, 旋转的性质, 证明点 A , 点 D , 点 A' 共线是本题的关键.

三、解答题

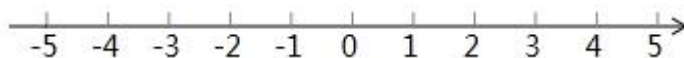
19. 计算: $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + |\sqrt{2} - 2| - 2\cos 30^\circ + 3\frac{1}{2}$.

【分析】直接利用二次根式的性质和绝对值的性质、特殊角的三角函数值、分数指数幂的性质分别化简得出答案．

【解答】解：原式 $= \sqrt{2} - 1 + 2 - \sqrt{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}$
 $= \sqrt{2} - 1 + 2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3}$
 $= 1.$

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键．

20. 解不等式组： $\begin{cases} -3(x-2) > -x-4 \\ -x-\frac{7}{3} \leq \frac{1-x}{3} \end{cases}$ ，并将解集在数轴上表示出来．



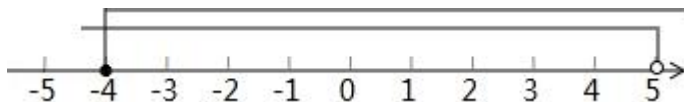
【分析】分别求出不等式组中两不等式的解集，找出两解集的公共部分确定出不等式组的解集，表示在数轴上即可．

【解答】解： $\begin{cases} -3(x-2) > -x-4 \text{ ①} \\ -x-\frac{7}{3} \leq \frac{1-x}{3} \text{ ②} \end{cases}$ ，

由①得： $x < 5$ ，

由②得： $x \geq -4$ ，

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-4 \leq x < 5$ ，



【点评】此题考查了解一元一次不等式组，熟练掌握不等式组的解法是解本题的关键．

21. 在抗击“新冠肺炎疫情”的日子里，上海全市学生积极响应号召开展“停课不停学”的线上学习活动，某中学为了了解全校 1200 名学生一周内平均每天进行在家体育锻炼时间的情况，随机调查了该校 100 名学生一周内平均每天在家体育锻炼时间的情况，结果如下表：

时间 (分)	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
人数	16	24	14	10	8	6	8	4	6	4

完成下列各题：

(1) 根据上述统计表中的信息，可知这 100 名学生一周内平均每天在家体育锻炼时间的众数是 20 分，中位数是 25 分；

(2) 小李根据上述统计表中的信息，制作了频数分布表和频数分布直方图（不完整），那么：

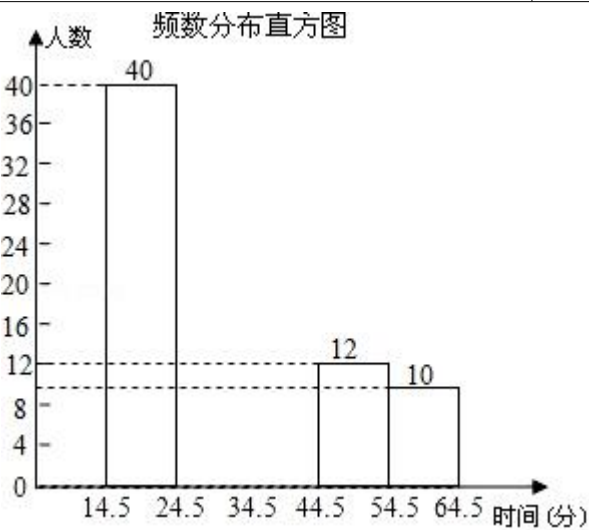
①频数分布表中 $m = \underline{24}$ ， $n = \underline{14}$ ；

②请补全频数分布直方图。

(3) 请估计该学校平均每天在家体育锻炼时间不少于 35 分钟的学生大约有 432 人。

频数分布表

分组（时间：分钟）	频数
14.5 - 24.5	40
24.5 - 34.5	m
34.5 - 44.5	n
44.5 - 54.5	12
54.5 - 64.5	10
合计	100



【分析】(1) 根据众数和中位数的概念分析；

(2) 根据各小组频数之和等于数据总和，各小组频率之和等于 1；可得 $m = 12$ ， $n = 7$ ；

由统计表中数据补全直方图即可；

(3) 用样本估计总体可得答案。

【解答】解：(1) 分析统计表可得：众数即出现次数最多的数据为 20，中位数即最中间两个数据的平均数是 25；

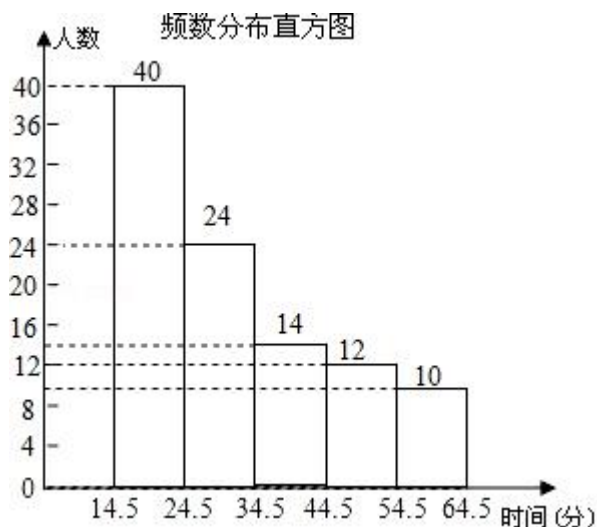
(2) ①从统计表知, $m = 14 + 10 = 24$, $n = 8 + 6 = 14$;

②补全频数分布直方图如图所示;

$$(3) 1200 \times \frac{8+6+8+4+6+4}{100} = 432 \text{ (人)},$$

答: 计该学校平均每天在家体育锻炼时间不少于 35 分钟的学生大约有 432 人.

故答案为: 20, 25; 24, 14; 432.

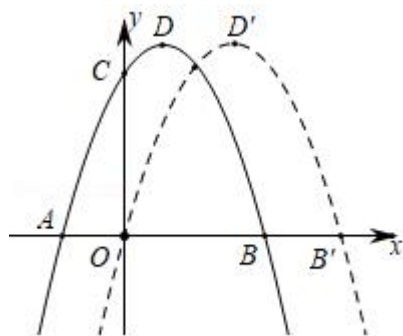


【点评】 本题考查了频数(率)分布直方图, 利用统计图获取信息时, 必须认真观察、分析、研究统计图, 才能作出正确的判断和解决问题. 同时考查了平均数、中位数和众数的概念以及用样本估计总体.

22. 如图, 抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 3$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和 B , 与 y 轴交于点 C , 顶点为点 D .

(1) 求抛物线的表达式、点 B 和点 D 的坐标;

(2) 将抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 3$ 向右平移后所得新抛物线经过原点 O , 点 B 、 D 的对应点分别是点 B' 、 D' , 联结 $B'C$, $B'D'$, CD' , 求 $\triangle CB'D'$ 的面积.



【分析】 (1) 将点 A 的坐标代入抛物线表达式, 求出 $a = -1$, 进而求解;

(2) 根据新抛物线经过原点 O , 求出其表达式, 利用 $\triangle CB'D'$ 的面积 $= S_{\triangle D'HC} + S_{\triangle D'HB'}$, 进而求解.

【解答】解: (1) 将点 A 的坐标代入抛物线表达式得:

$$0 = a + 2a + 3, \text{ 解得: } a = -1,$$

故抛物线的表达式为: $y = -x^2 + 2x + 3$;

抛物线的对称轴为: $x = 1$, 点 D 的坐标为: $(1, 4)$,

令 $y = 0$, $y = -x^2 + 2x + 3 = 0$, 解得: $x = 3$ 或 -1 , 令 $x = 0$, 则 $y = 3$,

故点 B 的坐标为: $(3, 0)$ 、点 $C(0, 3)$;

故抛物线的表达式为: $y = -x^2 + 2x + 3$, B 的坐标为 $(3, 0)$ 、点 D 的坐标为 $(1, 4)$;

(2) 设抛物线向右平移了 m 个单位,

则 B' 、 D' 的坐标分别为: $(m+3, 0)$ 、 $(m+1, 4)$,

平移后抛物线的表达式为: $y = -(x - m - 1)^2 + 4$,

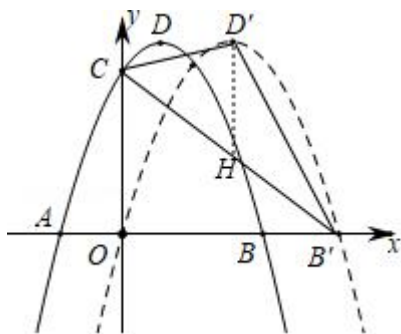
$\because$ 新抛物线经过原点 O ,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = -(0 - m - 1)^2 + 4 = 0$,

解得: $m = 1$ 或 -3 (舍去 -3),

故点 B' 、 D' 的坐标分别为: $(4, 0)$ 、 $(2, 4)$,

如下图, 过点 D' 作 $D'H \parallel y$ 轴交 $B'C$ 于点 H ,



设直线 $B'C$ 的表达式为: $y = kx + b$, 则 $\begin{cases} b = 0 \\ 0 = 4k + 3 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases}$,

故直线 $B'C$ 的表达式为: $y = -\frac{3}{4}x + 3$,

当 $x = 2$ 时, $y = \frac{3}{2}$, 故 $D'H = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$;

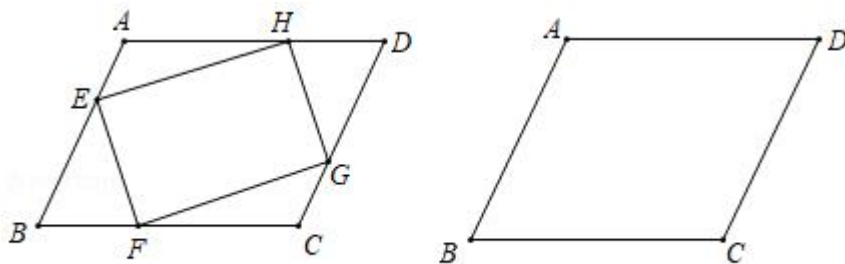
$$\triangle CB'D' \text{ 的面积} = S_{\triangle D'HC} + S_{\triangle D'HB'} = \frac{1}{2} \times D'H \times OB' = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 4 = 5.$$

【点评】 本题考查的是抛物线与 x 轴的交点，主要考查函数图象上点的坐标特征，要求学生非常熟悉函数与坐标轴的交点、顶点等点坐标的求法，及这些点代表的意义及函数特征。

23. 已知：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 、 G 、 H 分别在边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上， $BE = DG$ ， $BF = DH$ 。

(1) 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

(2) 当 $AB = BC$ ，且 $BE = BF$ 时，求证：四边形 $EFGH$ 是矩形。



备用图

【分析】 (1) 利用全等三角形的性质可得 $EF = HG$ ， $EH = FG$ ，可得结论；

(2) 由等腰三角形的性质可得 $\angle BEF = \angle BFE = \frac{180^\circ - \angle A}{2}$ ， $\angle AEH = \angle AHE = \frac{180^\circ - \angle B}{2}$ ，可求 $\angle FEH = 90^\circ$ ，可得结论。

【解答】 证明：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD, AD = BC, \angle B = \angle D, \angle A = \angle C,$$

$$\because BE = DG, BF = DH, \text{ 且 } \angle B = \angle D,$$

$$\therefore \triangle BEF \cong \triangle DGH \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EF = HG,$$

同理可得 $EH = FG$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

$$(2) \because AB = BC, BE = BF$$

$$\therefore AB = BC = CD = AD, BE = BF = DH = DG,$$

$$\therefore AE = AH,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle B + \angle A = 180^\circ,$$

$$\because BE = BF, AE = AH,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle BFE = \frac{180^\circ - \angle A}{2}, \quad \angle AEH = \angle AHE = \frac{180^\circ - \angle B}{2},$$

$$\therefore \angle AEH + \angle BEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 平行四边形 $EFGH$ 是矩形.

【点评】 本题考查了矩形的判定，平行四边形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，灵活运用这些性质进行推理证明是本题的关键.

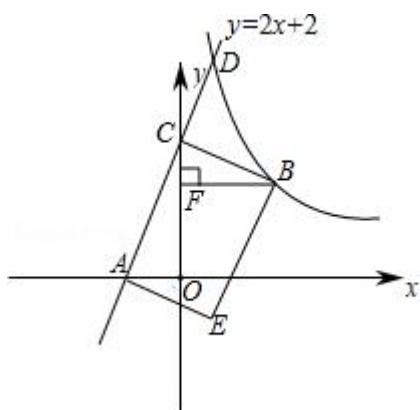
24. 如图，已知直线 $y = 2x + 2$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 C ，矩形 $ACBE$ 的顶点 B 在第一象限的反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 图象上，过点 B 作 $BF \perp OC$ ，垂足为 F ，设 $OF = t$.

(1) 求 $\angle ACO$ 的正切值；

(2) 求点 B 的坐标 (用含 t 的式子表示)；

(3) 已知直线 $y = 2x + 2$ 与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 图象都经过第一象限的点 D ，联结 DE ，如果

$DE \perp x$ 轴，求 m 的值.



【分析】 (1) 先求出点 A ，点 C 坐标，可得 $OA = 1$ ， $OC = 2$ ，即可求解；

(2) 由余角的性质可得 $\angle ACO = \angle CBF$ ，可得 $\tan \angle CBF = \tan \angle ACO = \frac{CF}{BF} = \frac{1}{2}$ ，可求 $BF = 4 - 2t$ ，即可求解；

(3) 由 “AAS” 可证 $\triangle BCF \cong \triangle AEH$ ，可得 $AH = BF = 4 - 2t$ ， $CF = HE$ ，可求点 D 坐标，由反比例函数的性质可得 $(3 - 2t)(8 - 4t) = t(4 - 2t)$ ，可求 t 的值，即可求解.

【解答】 解：(1) $\because$ 直线 $y = 2x + 2$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 C ，

$\therefore$ 点 $A(-1, 0)$ ，点 $C(0, 2)$

$\therefore OA = 1$ ， $OC = 2$ ，

$$\therefore \tan \angle ACO = \frac{OA}{CO} = \frac{1}{2};$$

(2) $\because$ 四边形 $ACBE$ 是矩形,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO + \angle BCF = 90^\circ, \text{ 且 } \angle BCF + \angle CBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle CBF,$$

$$\because OF = t,$$

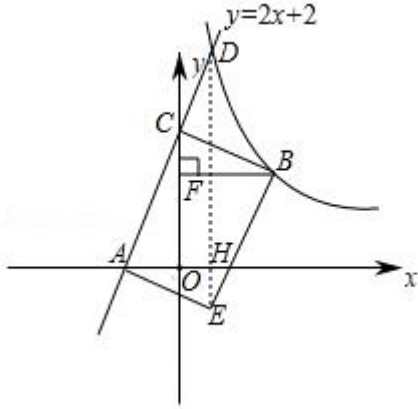
$$\therefore CF = 2 - t,$$

$$\because \tan \angle CBF = \tan \angle ACO = \frac{CF}{BF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BF = 4 - 2t,$$

$$\therefore \text{点 } B(4 - 2t, t);$$

(3) 如图, 连接 DE , 交 x 轴于 H 点,



$\because DE \perp x$ 轴,

$$\therefore \angle AHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HAE + \angle AEH = 90^\circ, \text{ 且 } \angle CAO + \angle HAE = 90^\circ, \angle CAO + \angle ACO = 90^\circ, \angle ACO + \angle BCF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEH = \angle BCF, \text{ 且 } \angle CFB = \angle AHE, AE = BC,$$

$$\therefore \triangle BCF \cong \triangle AEH (AAS)$$

$$\therefore AH = BF = 4 - 2t, CF = HE,$$

$$\because \text{点 } A(-1, 0),$$

$$\therefore \text{点 } H(3 - 2t, 0),$$

$$\therefore \text{当 } x = 3 - 2t \text{ 时, } y = 2(3 - 2t) + 2 = 8 - 4t,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 坐标为 } (3 - 2t, 8 - 4t),$$

$$\because \text{点 } D, \text{点 } B \text{ 都在反比例函数 } y = \frac{m}{x} \text{ 上,}$$

$$\therefore (3-2t)(8-4t) = t(4-2t)$$

$$\therefore t_1 = 2 \text{ (不合题意舍去)}, t_2 = \frac{6}{5};$$

$$\therefore \text{点 } B\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

$$\therefore m = \frac{6}{5} \times \frac{8}{5} = \frac{48}{25}.$$

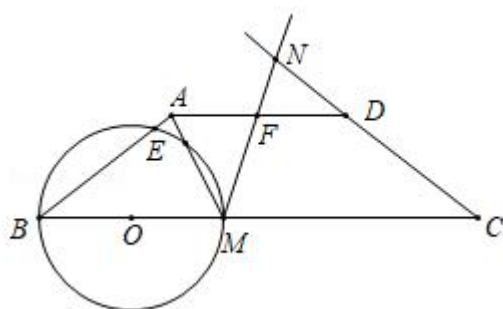
【点评】 本题是反比例函数综合题，考查了反比例函数的性质，锐角三角函数，全等三角形的判定和性质，一元二次方程的解法等知识，利用参数表示点 D 坐标是本题的关键.

25. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = CD = AD = 5$ ， $\cos B = \frac{4}{5}$ ，点 O 是边 BC 上的动点，以 OB 为半径的 $\odot O$ 与射线 BA 和边 BC 分别交于点 E 和点 M ，联结 AM ，作 $\angle CMN = \angle BAM$ ，射线 MN 与边 AD 、射线 CD 分别交于点 F 、 N .

(1) 当点 E 为边 AB 的中点时，求 DF 的长；

(2) 分别联结 AN 、 MD ，当 $AN \parallel MD$ 时，求 MN 的长；

(3) 将 $\odot O$ 绕着点 M 旋转 180° 得到 $\odot O'$ ，如果以点 N 为圆心的 $\odot N$ 与 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 都内切，求 $\odot O$ 的半径长.



【分析】 (1) 如图 1 中，连接 EM 。想办法证明 EM 垂直平分线段 AB ，推出 $MB = MA$ ，再证明 $AM = AF$ ，求出 BM 即可解决问题.

(2) 想办法证明四边形 $AMDN$ 是等腰梯形即可解决问题.

(3) 由点 N 为圆心的 $\odot N$ 与 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 都内切，推出 $NM \perp BC$ ，此时点 E 与 A 重合，求出 BM 即可解决问题.

【解答】 解：(1) 如图 1 中，连接 EM .

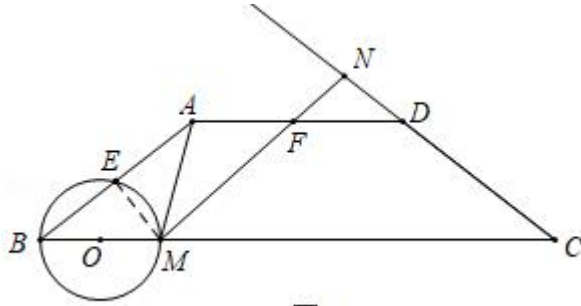


图1

$\because BM$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle BEM = 90^\circ$,

$\because E$ 是 AB 的中点,

$\therefore AE = BE = \frac{5}{2}$,

$\because \cos \angle B = \frac{BE}{BM} = \frac{4}{5}$,

$\therefore BM = \frac{25}{8}$,

$\because EM \perp AB$, $EB = EA$,

$\therefore MA = MB = \frac{25}{8}$,

$\therefore \angle B = \angle BAM$,

$\because \angle AMC = \angle B + \angle BAM = \angle AMF + \angle CMF$, $\angle CMN = \angle BAM$,

$\therefore \angle AMF = \angle B = \angle CMN$,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle AFM = \angle AMF$,

$\therefore AF = AM = \frac{25}{8}$,

$\therefore DF = AD - AF = 5 - \frac{25}{8} = \frac{15}{8}$.

(2) 如图 2 中,

