

2020 年上海市崇明区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列二次根式是最简二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ B. $\sqrt{0.3}$ C. $\sqrt{8}$ D. $\sqrt{6}$

2.（4 分）如果 $a > b$ ，那么下列结论中一定成立的是（ ）

- A. $2 - a > 2 - b$ B. $2 + a > 2 + b$ C. $ab > b^2$ D. $a^2 > b^2$

3.（4 分）已知一次函数 $y = (m - 3)x + 6 + 2m$ ，如果 y 随自变量 x 的增大而减小，那么 m 的取值范围为（ ）

- A. $m < 3$ B. $m > 3$ C. $m < -3$ D. $m > -3$

4.（4 分）下列说法正确的是（ ）

- A. 了解我区居民知晓“创建文明城区”的情况，适合全面调查
B. 甲、乙两人跳高成绩的方差分别为 $S_{\text{甲}}^2 = 3$ ， $S_{\text{乙}}^2 = 4$ ，说明乙的跳高成绩比甲稳定
C. 一组数据 2、2、3、4 的众数是 2，中位数是 2.5
D. 可能性是 1% 的事件在一次试验中一定不会发生

5.（4 分）如果一个正多边形的外角是锐角，且它的余弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，那么它是（ ）

- A. 等边三角形 B. 正六边形 C. 正八边形 D. 正十二边形

6.（4 分）下列命题正确的是（ ）

- A. 对角线相等的四边形是平行四边形
B. 对角线相等的四边形是矩形
C. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形
D. 对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）计算： $(3a^3)^2 =$ _____.

8.（4 分）因式分解： $a^3 - 9a =$ _____.

9.（4 分）方程 $\sqrt{x+2} = x$ 的根是_____.

10.（4 分）如果方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 没有实数根，那么 m 的取值范围是_____.

11.（4 分）分别写有数字 $\sqrt{3}$ 、 -1 、 $\frac{1}{3}$ 、 0 、 π 的五张大小和质地均相同的卡片，从中任意抽取一张，抽到无理数的概率是_____.

12. (4分) 将抛物线 $y = x^2 + 2$ 向右平移 3 个单位, 再向上平移 2 个单位后, 那么所得新抛物线你的解析式为_____.

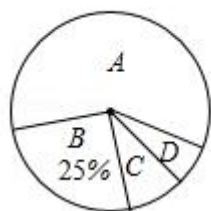
13. (4分) 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AG}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.

14. (4分) 为了解某校九年级全体男生 1000 米跑步的成绩, 随机抽取了部分男生进行测试, 并将测试成绩分为 A 、 B 、 C 、 D 四个等级, 绘制成如下不完整的统计图表. 根据图表信息, 那么扇形图中表示 C 的圆心角的度数为_____度.

成绩等级频数分布表

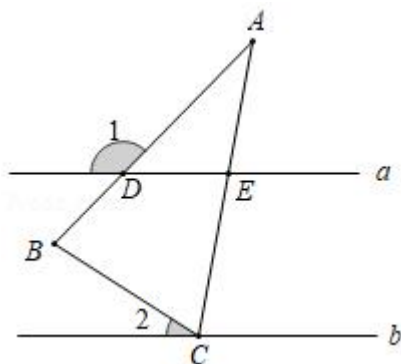
成绩等级	频数
A	24
B	10
C	x
D	2

成绩等级扇形统计图



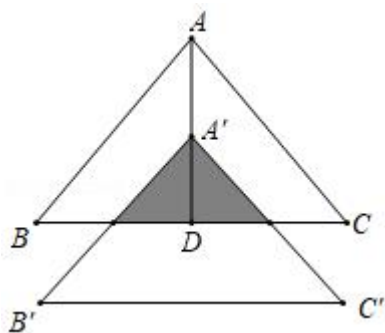
15. (4分) 某品牌旗舰店平日将某商品按进价提高 40% 后标价, 在某次电商购物节中, 为促销该商品, 按标价 8 折销售, 售价为 2240 元, 则这种商品的进价是_____元.

16. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 30^\circ$, 直线 $a \parallel b$, 点 C 在直线 b 上, 直线 a 交 AB 于点 D , 交 AC 于点 E , 如果 $\angle 1 = 145^\circ$, 那么 $\angle 2$ 的度数是_____.

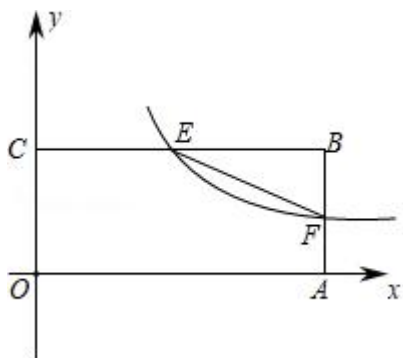


17. (4分) 如图, 将 $\triangle ABC$ 沿 BC 边上的中线 AD 平移到 $\triangle A'B'C'$ 的位置, 已知 $\triangle ABC$ 的面

积为 16，阴影部分三角形的面积为 9．如果 $AA' = 1$ ，那么 $A'D$ 的长为_____．



18. (4 分) 如图，平面直角坐标系中， $A(8, 0)$ ， $B(8, 4)$ ， $C(0, 4)$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 在第一象限内的图象分别与线段 AB 、 BC 交于点 F 、 E ，连接 EF ．如果点 B 关于 EF 的对称点恰好落在 OA 边上．那么 k 的值为_____．



三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

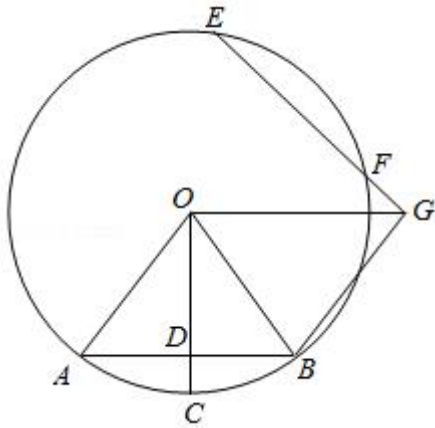
19. (10 分) 计算： $(\sqrt{2})^2 + (-\frac{\pi}{3})^0 - 12\frac{1}{2} + 2(\tan 60^\circ - 1)^{-1}$

20. (10 分) 解方程组：
$$\begin{cases} x+y=6 \\ x^2-3xy+2y^2=0 \end{cases}$$

21. (10 分) 如图已知 $\odot O$ 经过 A 、 B 两点, $AB = 6$, C 是 $\widehat{AB}$ 的中点, 联结 OC 交弦 AB 与点 D , $CD = 1$.

(1) 求圆 $\odot O$ 的半径;

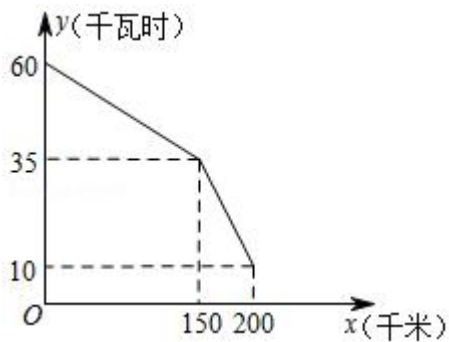
(2) 过点 B 、点 O 分别作点 AO 、 AB 的平行线, 交于点 G , E 是 $\odot O$ 上一点, 联结 EG 交 $\odot O$ 于点 F , 当 $EF = AB$, 求 $\sin \angle OGE$ 的值.



22. (10 分) 如图是某型号新能源纯电动汽车充满电后, 蓄电池剩余电量 y (千瓦时), 关于已行驶路程 x (千米) 的函数图象.

(1) 根据图象, 蓄电池剩余电量为 35 千瓦时时汽车已经行驶的路程为_____千米. 当 $0 \leq x \leq 150$ 时, 消耗 1 千瓦时的电量, 汽车能行驶的路程为_____千米.

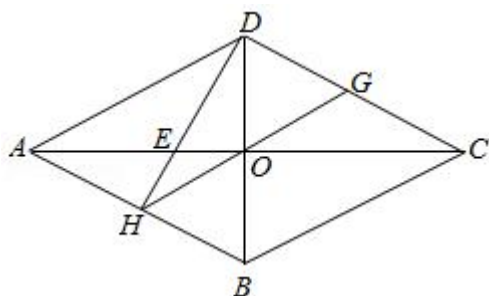
(2) 当 $150 \leq x \leq 200$ 时, 求 y 关于 x 的函数表达式, 并计算当汽车已行驶 160 千米时, 蓄电池的剩余电量.



23. (12分) 如图, 已知四边形 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $DH \perp AB$, 垂足为点 H , 交 AC 于 E , 联结 HO 并延长交 CD 于点 G ,

(1) 求证: $\angle DHO = \frac{1}{2} \angle BCD$;

(2) 求证: $HG \cdot AE = 2DE \cdot CG$.

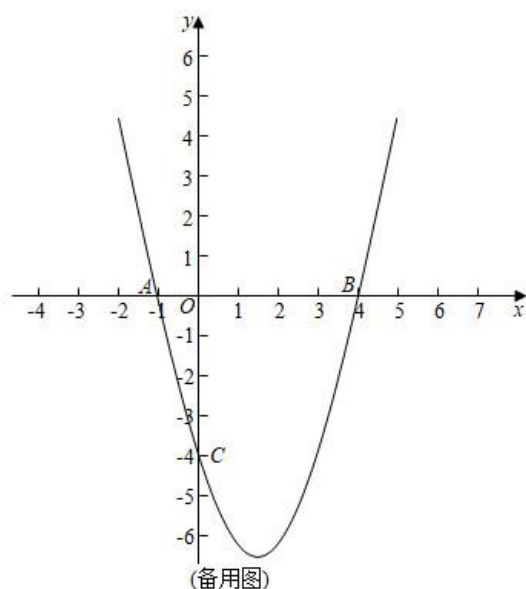
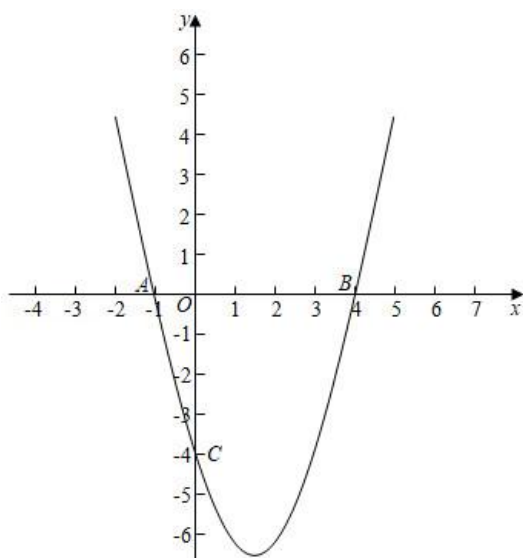


24. (12分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 4$ 经过点 $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 点 D 是该抛物线上一点, 且在第四象限内, 连结 AC 、 BC 、 CD 、 BD .

(1) 求抛物线的函数解析式, 并写出对称轴;

(2) 当 $S_{\triangle BCD} = 4S_{\triangle AOC}$ 时, 求点 D 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 如果点 E 是 x 轴上的一点, 点 F 是抛物线上一点, 当点 A 、 D 、 E 、 F 为顶点的四边形是平行四边形, 请直接写出点 E 的坐标.

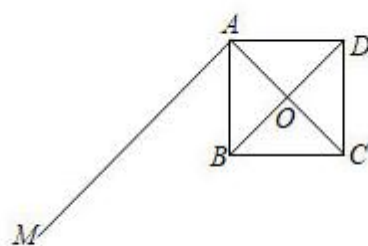
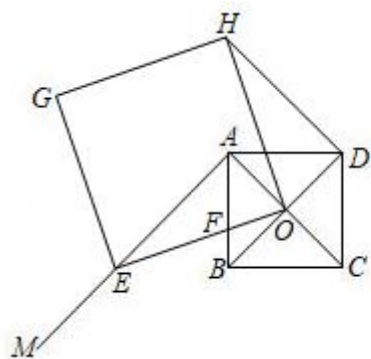


25. (14分) 如图, 已知正方形 $ABCD$ 中, $BC=4$, AC 、 BD 相交于点 O , 过点 A 作射线 $AM \perp AC$, 点 E 是射线 AM 上一点, 联结 OE 交 AB 边于点 F . 以 OE 为一边, 作正方形 $OEGH$, 且点 A 在正方形 $OEGH$ 的内部, 联结 DH .

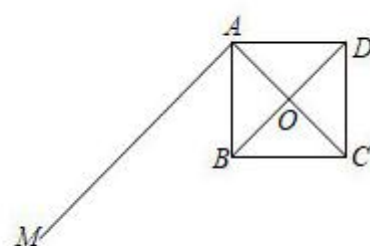
(1) 求证: $\triangle HDO \cong \triangle EAO$;

(2) 设 $BF=x$, 正方形 $OEGH$ 的边长为 y , 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出定义域;

(3) 联结 AG , 当 $\triangle AEG$ 是等腰三角形时, 求 BF 的长.



(备用图 1)



(备用图 2)

2020 年上海市崇明区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列二次根式是最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ B. $\sqrt{0.3}$ C. $\sqrt{8}$ D. $\sqrt{6}$

【分析】根据最简二次根式的概念判断.

【解答】解：A、 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，被开方数含分母，不是最简二次根式；

B、 $\sqrt{0.3} = \sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$ ，被开方数含分母，不是最简二次根式；

C、 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，被开方数中含能开得尽方的因数，不是最简二次根式；

D、 $\sqrt{6}$ 是最简二次根式；

故选：D.

【点评】本题考查的是最简二次根式的概念，掌握被开方数不含分母、被开方数中不含能开得尽方的因数或因式的二次根式是最简二次根式是解题的关键.

2.（4 分）如果 $a > b$ ，那么下列结论中一定成立的是（ ）

A. $2 - a > 2 - b$ B. $2 + a > 2 + b$ C. $ab > b^2$ D. $a^2 > b^2$

【分析】根据不等式的性质逐个判断即可.

【解答】解：A、 $\because a > b$,

$\therefore 2 - a < 2 - b$ ，故本选项错误，不符合题意；

B、 $\because a > b$,

$\therefore 2 + a > 2 + b$ ，故本选项正确，符合题意；

C、 $\because a > b$,

$\therefore$ 当 $b > 0$ 时， $ab > b^2$ ，当 $b < 0$ 时， $ab < b^2$ ，不能判断 ab 和 b^2 的大小，故本选项错误，不符合题意；

D、 $\because a > b$,

不能判断 a^2 和 b^2 的大小，故本选项错误，不符合题意；

故选：B.

【点评】本题考查了不等式的性质的应用，能熟记不等式的性质是解此题的关键.

3. (4分) 已知一次函数 $y = (m - 3)x + 6 + 2m$, 如果 y 随自变量 x 的增大而减小, 那么 m 的取值范围为 ()

A. $m < 3$ B. $m > 3$ C. $m < -3$ D. $m > -3$

【分析】根据一次函数的性质得到关于 m 的不等式, 求解集即可.

【解答】解: 根据题意, 得: $m - 3 < 0$,

解得: $m < 3$,

故选: A.

【点评】本题主要考查一次函数的图象与系数的关系, 解决此类问题的关键是灵活运用一次函数的图象与 k 的关系是解题的关键.

4. (4分) 下列说法正确的是 ()

A. 了解我区居民知晓“创建文明城区”的情况, 适合全面调查

B. 甲、乙两人跳高成绩的方差分别为 $S_{甲}^2 = 3$, $S_{乙}^2 = 4$, 说明乙的跳高成绩比甲稳定

C. 一组数据 2、2、3、4 的众数是 2, 中位数是 2.5

D. 可能性是 1% 的事件在一次试验中一定不会发生

【分析】直接利用方差的意义以及概率的意义、全面调查和抽样调查分别分析得出答案.

【解答】解: A、了解我区居民知晓“创建文明城区”的情况, 适合抽样调查, 故原说法错误;

B、甲、乙两人跳高成绩的方差分别为 $S_{甲}^2 = 3$, $S_{乙}^2 = 4$, 说明甲的跳高成绩比乙稳定, 故原说法错误;

C、一组数据 2、2、3、4 的众数是 2, 中位数是 2.5, 正确;

D、可能性是 1% 的事件在一次试验中也有可能发生, 故原说法错误;

故选: C.

【点评】此题主要考查了方差的意义以及概率的意义、全面调查和抽样调查, 正确掌握相关定义是解题关键.

5. (4分) 如果一个正多边形的外角是锐角, 且它的余弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 那么它是 ()

A. 等边三角形 B. 正六边形 C. 正八边形 D. 正十二边形

【分析】利用任意凸多边形的外角和均为 360° , 正多边形的每个外角相等即可求出答案.

【解答】解: $\because$ 一个外角为锐角, 且其余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$ 这个一个外角 $= 30^\circ$,

$\therefore 360 \div 30 = 12$.

故它是正十二边形.

故选: D .

【点评】 此题主要考查了多边形的外角和, 利用任意凸多边形的外角和均为 360° , 正多边形的每个外角相等即可求出答案.

6. (4 分) 下列命题正确的是 ()

- A. 对角线相等的四边形是平行四边形
- B. 对角线相等的四边形是矩形
- C. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形
- D. 对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

【分析】 根据平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定定理判断即可.

【解答】 解: 对角线互相平分的四边形是平行四边形, A 错误;

对角线相等的平行四边形是矩形, B 错误;

对角线互相垂直的平行四边形是菱形, C 正确;

对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形, D 错误;

故选: C .

【点评】 本题考查的是命题的真假判断, 正确的命题叫真命题, 错误的命题叫做假命题. 判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 计算: $(3a^3)^2 = \underline{9a^6}$.

【分析】 利用积的乘方的性质: 积的乘方, 等于把每一个因式分别乘方, 再把所得的幂相乘, 首先计算积的乘方, 再利用幂的乘方乘方性质: 底数不变, 指数相乘, 计算 $(a^3)^2$ 可得答案.

【解答】 解: $(3a^3)^2 = 3^2 \cdot (a^3)^2 = 9 \cdot a^{3 \times 2} = 9a^6$.

故答案为: $9a^6$.

【点评】 此题主要考查了积的乘方和幂的乘方混合运用, 计算时要紧扣积的乘方的性质与幂的乘方乘方性质.

8. (4 分) 因式分解: $a^3 - 9a = \underline{a(a+3)(a-3)}$.

【分析】 原式提取 a , 再利用平方差公式分解即可.

【解答】解：原式 $= a(a^2 - 9)$

$$= a(a+3)(a-3),$$

故答案为： $a(a+3)(a-3)$.

【点评】此题考查了提公因式法与公式法的综合运用，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

9. (4分) 方程 $\sqrt{x+2} = x$ 的根是 $x=2$.

【分析】先把方程两边平方，使原方程化为整式方程 $x+2 = x^2$ ，解此一元二次方程得到 $x_1 = 2$ ， $x_2 = -1$ ，把它们分别代入原方程得到 $x_2 = -1$ 是原方程的增根，由此得到原方程的根为 $x = 2$.

【解答】解：方程两边平方得， $x+2 = x^2$ ，

解方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 得 $x_1 = 2$ ， $x_2 = -1$ ，

经检验 $x_2 = -1$ 是原方程的增根，

所以原方程的根为 $x = 2$.

故答案为： $x = 2$.

【点评】本题考查了无理方程：根号内含有未知数的方程叫无理方程；解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解，常常采用平方法去根号.

10. (4分) 如果方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 没有实数根，那么 m 的取值范围是 $m > 9$.

【分析】利用判别式的意义得到 $\Delta = (-6)^2 - 4m < 0$ ，然后解不等式即可.

【解答】解：根据题意得 $\Delta = (-6)^2 - 4m < 0$ ，

解得 $m > 9$.

故选 B.

【点评】本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

11. (4分) 分别写有数字 $\sqrt{3}$ 、 -1 、 $\frac{1}{3}$ 、 0 、 π 的五张大小和质地均相同的卡片，从中任意抽取一张，抽到无理数的概率是 $\frac{2}{5}$.

【分析】直接利用概率公式计算可得.

【解答】解： $\because$ 在 $\sqrt{3}$ 、 -1 、 $\frac{1}{3}$ 、 0 、 π 中无理数有 $\sqrt{3}$ 、 π 这 2 个，

∴从中任意抽取一张，抽到无理数的概率是 $\frac{2}{5}$ ，

故答案为： $\frac{2}{5}$ ．

【点评】本题主要考查概率公式，解题的关键是掌握随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$ ．

12. (4分) 将抛物线 $y = x^2 + 2$ 向右平移 3 个单位，再向上平移 2 个单位后，那么所得新抛物线的解析式为 $y = x^2 - 6x + 13$ ．

【分析】根据“上加下减，左加右减”的原则进行解答即可．

【解答】解：抛物线 $y = x^2 + 2$ 向右平移 3 个单位后的解析式为： $y = (x - 3)^2 + 2$ ．

再向上平移 2 个单位后所得抛物线的解析式为： $y = (x - 3)^2 + 2 + 2$ ，即 $y = x^2 - 6x + 13$ ．

故答案是： $y = x^2 - 6x + 13$ ．

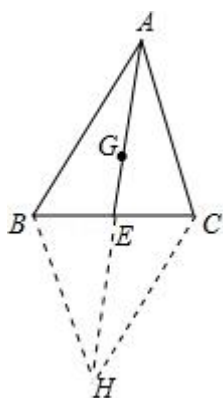
【点评】主要考查的是函数图象的平移，用平移规律“左加右减，上加下减”直接代入函数解析式求得平移后的函数解析式．

13. (4分) 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{AG}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为 $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$ ．

【分析】如图，延长 AE 到 H ，使得 $EH = AE$ ，连接 BH ， CH ．求出 $\overrightarrow{AH}$ ，证明 $AG = \frac{1}{3}AH$

即可解决问题．

【解答】解：如图，延长 AE 到 H ，使得 $EH = AE$ ，连接 BH ， CH ．



∵ $AE = EH$ ， $BE = EC$ ，

∴ 四边形 $ABHC$ 是平行四边形，

∴ $AC = BH$ ， $AC \parallel BH$ ，

∴ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \vec{a} + \vec{b}$ ，

$\because G$ 是重心,

$$\therefore AG = \frac{2}{3}AE,$$

$\because AE = EH,$

$$\therefore AG = \frac{1}{3}AH,$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}).$$

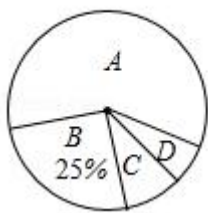
【点评】 本题考查三角形的重心, 平行四边形的判定和性质等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

14. (4 分) 为了解某校九年级全体男生 1000 米跑步的成绩, 随机抽取了部分男生进行测试, 并将测试成绩分为 A 、 B 、 C 、 D 四个等级, 绘制成如下不完整的统计图表. 根据图表信息, 那么扇形图中表示 C 的圆心角的度数为 36 度.

成绩等级频数分布表

成绩等级	频数
A	24
B	10
C	x
D	2

成绩等级扇形统计图



【分析】 先由 B 等级人数及其所占百分比求出总人数, 再根据各等级人数之和等于总人数求出 C 等级人数 x , 最后用 360° 乘以 C 等级人数所占比例即可得.

【解答】 解: $\because$ 被调查的总人数为 $10 \div 25\% = 40$ (人),

$\therefore C$ 等级人数 $x = 40 - (24 + 10 + 2) = 4$ (人),

则扇形图中表示 C 的圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{4}{40} = 36^\circ$,

故答案为: 36.

【点评】 本题主要考查扇形统计图, 解题的关键是结合扇形统计图与频数分布表得出被

调查的总人数.

15. (4分) 某品牌旗舰店平日将某商品按进价提高 40% 后标价, 在某次电商购物节中, 为促进该商品, 按标价 8 折销售, 售价为 2240 元, 则这种商品的进价是 2000 元.

【分析】设这种商品的进价是 x 元, 根据提价之后打八折, 售价为 2240 元, 列方程解答即可.

【解答】解: 设这种商品的进价是 x 元,

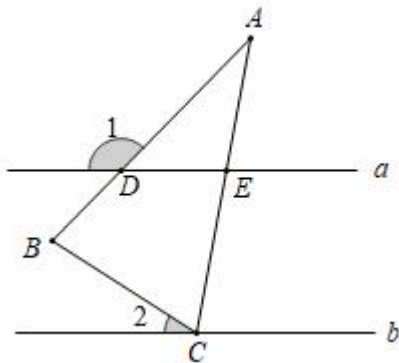
由题意得, $(1+40\%)x \times 0.8 = 2240$.

解得: $x = 2000$,

故答案为 2000

【点评】本题考查了一元一次方程的应用, 解答本题的关键是读懂题意, 设出未知数, 找出合适的等量关系, 列方程解答.

16. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 30^\circ$, 直线 $a \parallel b$, 点 C 在直线 b 上, 直线 a 交 AB 于点 D , 交 AC 于点 E , 如果 $\angle 1 = 145^\circ$, 那么 $\angle 2$ 的度数是 40° .



【分析】先根据等腰三角形的性质和三角形的内角和可得 $\angle ACB = 75^\circ$, 由三角形外角的性质可得 $\angle AED$ 的度数, 由平行线的性质可得同位角相等, 可得结论.

【解答】解: $\because AB = AC$, 且 $\angle A = 30^\circ$,

$\therefore \angle ACB = 75^\circ$,

在 $\triangle ADE$ 中, $\because \angle 1 = \angle A + \angle AED = 145^\circ$,

$\therefore \angle AED = 145^\circ - 30^\circ = 115^\circ$,

$\because a \parallel b$,

$\therefore \angle AED = \angle 2 + \angle ACB$,

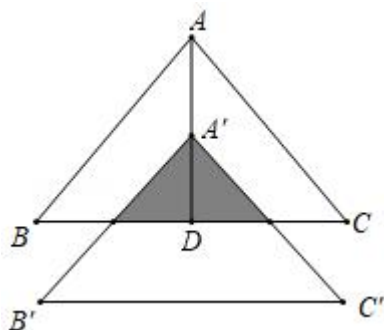
$\therefore \angle 2 = 115^\circ - 75^\circ = 40^\circ$.

故答案为: 40° .

【点评】本题主要考查了等腰三角形的性质, 平行线的性质, 题目比较基础, 熟练掌握

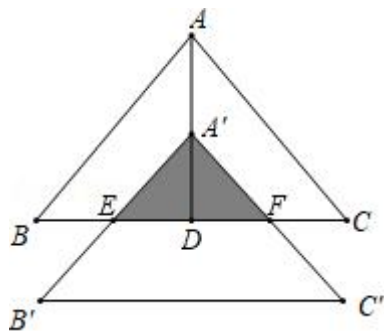
性质是解题的关键.

17. (4分) 如图, 将 $\triangle ABC$ 沿 BC 边上的中线 AD 平移到 $\triangle A'B'C'$ 的位置, 已知 $\triangle ABC$ 的面积为16, 阴影部分三角形的面积为9. 如果 $AA' = 1$, 那么 $A'D$ 的长为 3.



【分析】先证明 $\triangle DA'E \sim \triangle DAB$, 再利用相似三角形的性质求得 $A'D$ 便可.

【解答】解: 如图,



$\because S_{\triangle ABC} = 16$ 、 $S_{\triangle A'EF} = 9$, 且 AD 为 BC 边的中线,

$$\therefore S_{\triangle A'DE} = \frac{1}{2}S_{\triangle A'EF} = 4.5, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 8,$$

$\because$ 将 $\triangle ABC$ 沿 BC 边上的中线 AD 平移得到 $\triangle A'B'C'$,

$$\therefore A'E \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle DA'E \sim \triangle DAB,$$

$$\text{则 } \left(\frac{A'D}{AD}\right)^2 = \frac{S_{\triangle A'DE}}{S_{\triangle ADB}}, \text{ 即 } \left(\frac{A'D}{A'D+1}\right)^2 = \frac{4.5}{8},$$

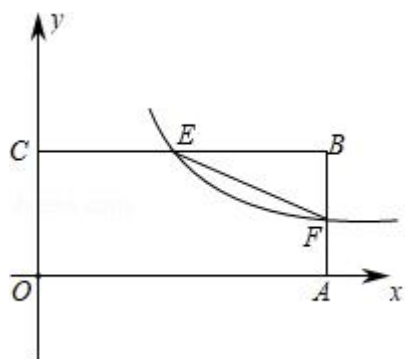
$$\text{解得 } A'D = 3 \text{ 或 } A'D = -\frac{3}{7} \text{ (舍)},$$

故答案为3.

【点评】本题主要平移的性质, 解题的关键是熟练掌握平移变换的性质与三角形中线的性质、相似三角形的判定与性质等知识点.

18. (4分) 如图, 平面直角坐标系中, $A(8, 0)$, $B(8, 4)$, $C(0, 4)$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$

在第一象限内的图象分别与线段 AB 、 BC 交于点 F 、 E ，连接 EF ．如果点 B 关于 EF 的对称点恰好落在 OA 边上．那么 k 的值为 12．



【分析】 根据 $A(8, 0)$, $B(8, 4)$, $C(0, 4)$, 可得矩形的长和宽, 易知点 F 的横坐标, E 的纵坐标, 由反比例函数的关系式, 可用含有 k 的代数式表示出点 F 的纵坐标和点 E 的横坐标, 由三角形相似和对称, 可求出 AD 的长, 然后把问题转化到三角形 ADF 中, 由勾股定理建立方程求出 k 的值.

【解答】 解: 过点 E 作 $EG \perp OA$, 垂足为 G , 设点 B 关于 EF 的对称点为 D , 连接 DF 、 ED 、 BD , 如图所示:

则 $\triangle BEF \cong \triangle DEF$,

$$\therefore BD = DF, BE = DE, \angle FDE = \angle FBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDG + \angle ADF = \angle ADF + \angle AFD,$$

$$\therefore \angle EDG = \angle AFD,$$

$$\because \angle EGD = \angle DAF,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle GED,$$

$$\therefore \frac{AD}{EG} = \frac{DF}{DE},$$

$$\therefore AD : EG = BD : BE,$$

$$\because A(8, 0), B(8, 4), C(0, 4),$$

$$\therefore AB = OC = EG = 4, OA = BC = 8,$$

$$\because E, F \text{ 在反比例函数 } y = \frac{k}{x} \text{ 的图象上,}$$

$$\therefore E\left(\frac{k}{4}, 4\right), F\left(8, \frac{k}{8}\right)$$

$$\therefore OG = EC = \frac{k}{4}, AF = \frac{k}{8},$$

$$\therefore BF = 4 - \frac{k}{8}, BE = 8 - \frac{k}{4},$$

$$\therefore \frac{BF}{BE} = \frac{4 - \frac{k}{8}}{8 - \frac{k}{4}} = \frac{1}{2} = \frac{DF}{DE} = \frac{AD}{EG},$$

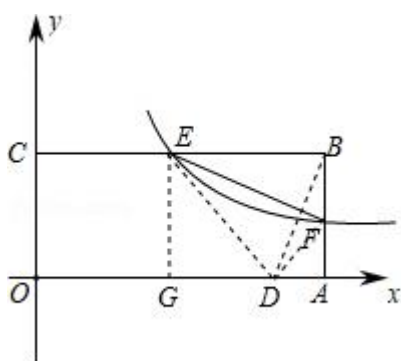
$$\therefore AD = \frac{1}{2}EG = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, 由勾股定理: $AD^2 + AF^2 = DF^2$

$$\text{即: } 2^2 + \left(\frac{k}{8}\right)^2 = \left(4 - \frac{k}{8}\right)^2$$

解得: $k = 12$,

故答案为 12.



【点评】 此题综合利用轴对称的性质, 相似三角形的判定和性质, 勾股定理以及反比例函数的图象和性质等知识, 发现 BD 与 BE 的比是 $1:2$ 是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $(\sqrt{2})^2 + \left(-\frac{\pi}{3}\right)^0 - 12^{\frac{1}{2}} + 2(\tan 60^\circ - 1)^{-1}$

【分析】 直接利用负整数指数幂的性质以及特殊角的三角函数值、绝对值的性质分别化简得出答案.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= 2 + 1 - 2\sqrt{3} + 2 \times (\sqrt{3} - 1)^{-1} \\ &= 2 + 1 - 2\sqrt{3} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= 2 + 1 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 \\ &= 4 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

【点评】 此题主要考查了实数运算, 正确化简各数是解题关键.

20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} x+y=6 \\ x^2-3xy+2y^2=0 \end{cases}$$

【分析】 先对 $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 分解因式转化为两个一元一次方程, 然后联立①, 组成两

$$\therefore r^2 = 3^2 + (r - 1)^2,$$

解得, $r = 5$,

即圆 $\odot O$ 的半径为5;

(2) 作 $OH \perp EF$ 于点 H ,

$$\because AB = EF, OD = r - 1 = 4,$$

$$\therefore OH = OD = 4, \angle OHG = 90^\circ,$$

$$\because OA \parallel BG, OG \parallel AB,$$

$\therefore$ 四边形 $OABG$ 是平行四边形,

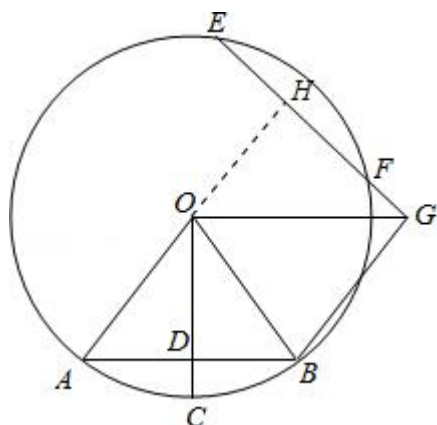
$$\therefore OG = AB,$$

$$\because AB = 6,$$

$$\therefore OG = 6,$$

$$\therefore \sin \angle OGH = \frac{OH}{OG} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\text{即 } \sin \angle OGE = \frac{2}{3}.$$

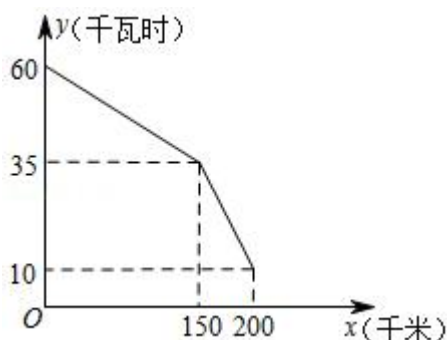


【点评】 本题考查圆周角定理、圆心角、弧、弦的关系、勾股定理、垂径定理, 解答本题的关键是明确题意, 利用数形结合的思想解答.

22. (10 分) 如图是某型号新能源纯电动汽车充满电后, 蓄电池剩余电量 y (千瓦时), 关于已行驶路程 x (千米) 的函数图象.

(1) 根据图象, 蓄电池剩余电量为 35 千瓦时时汽车已经行驶的路程为 150 千米. 当 $0 \leq x \leq 150$ 时, 消耗 1 千瓦时的电量, 汽车能行驶的路程为 6 千米.

(2) 当 $150 \leq x \leq 200$ 时, 求 y 关于 x 的函数表达式, 并计算当汽车已行驶 160 千米时, 蓄电池的剩余电量.



【分析】(1) 由图象可知，蓄电池剩余电量为 35 千瓦时时汽车已行驶了 150 千米，据此即可求出 1 千瓦时的电量汽车能行驶的路程；

(2) 运用待定系数法求出 y 关于 x 的函数表达式，再把 $x = 160$ 代入即可求出当汽车已行驶 160 千米时，蓄电池的剩余电量．

【解答】解：(1) 由图象可知，蓄电池剩余电量为 35 千瓦时时汽车已行驶了 150 千米．

1 千瓦时的电量汽车能行驶的路程为： $\frac{150}{60-35}=6$ (千米)，

故答案为：150；6．

(2) 设 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，把点 (150, 35)，(200, 10) 代入，

$$\text{得} \begin{cases} 150k + b = 35 \\ 200k + b = 10 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -0.5 \\ b = 110 \end{cases},$$

$$\therefore y = -0.5x + 110,$$

当 $x = 160$ 时， $y = -0.5 \times 160 + 110 = 30$ ，

答：当 $150 \leq x \leq 200$ 时，函数表达式为 $y = -0.5x + 110$ ，当汽车已行驶 160 千米时，蓄电池的剩余电量为 30 千瓦时．

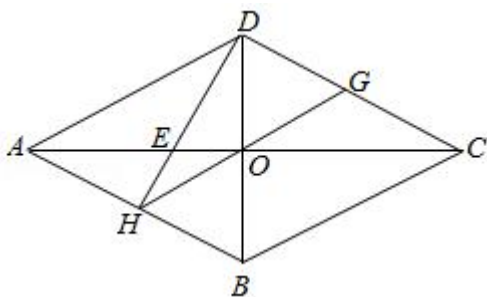
【点评】 本题考查了一次函数的应用，解题的关键：(1) 熟练运用待定系数法就解析式；

(2) 找出剩余油量相同时行驶的距离．本题属于基础题，难度不大，解决该类问题应结合图形，理解图形中点的坐标代表的意义．

23. (12 分) 如图，已知四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $DH \perp AB$ ，垂足为点 H ，交 AC 于 E ，联结 HO 并延长交 CD 于点 G ，

(1) 求证： $\angle DHO = \frac{1}{2} \angle BCD$ ；

(2) 求证： $HG \cdot AE = 2DE \cdot CG$ ．



【分析】(1) 先判断出 $OB = OD$ ，进而判断出 $OH = OD$ ，得出 $\angle DHO = \angle BDH$ ，再用等角的余角相等判断出 $\angle DHO = \angle BAO$ ，即可得出结论；

(2) 先判断出 $\angle ADH = \angle COG$ ，进而判断出 $\triangle ADE \sim \triangle COG$ ，得出 $AE \cdot OG = DE \cdot CG$ ，再判断出 $\triangle AOH \cong \triangle COG$ ，得出 $OG = \frac{1}{2}HG$ ，即可得出结论．

【解答】证明：(1) $\because AC$ 是菱形 $ABCD$ 的对角线，

$$\therefore \angle BCD = \angle BAD = 2\angle BAO,$$

$\because$ 点 O 是菱形 $ABCD$ 的两条对角线的交点，

$$\therefore OB = OD,$$

$$\because DH \perp AB,$$

$$\therefore \angle BHD = 90^\circ,$$

$$\therefore OH = OD,$$

$$\therefore \angle DHO = \angle BDH,$$

在 $\text{Rt}\triangle BHD$ 中， $\angle BDH + \angle ABO = 90^\circ$ ，

$$\because \angle BAO + \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDH = \angle BAO,$$

$$\therefore \angle DHO = \angle BAO,$$

$$\therefore \angle BCD = 2\angle DHO,$$

$$\therefore \angle DHO = \frac{1}{2}\angle BCD;$$

(2) 由 (1) 知， $\angle DHB = \angle BAO$ ，

$\because AC$ 是菱形 $ABCD$ 的对角线，

$$\therefore OA = OC, \angle DAO = \angle BAO,$$

$$\therefore \angle DHB = \angle DAO,$$

$$\therefore \angle AED = \angle HEO,$$

$$\therefore \angle AOH = \angle ADE,$$

$$\because \angle AOH = \angle COG,$$

$$\therefore \angle ADH = \angle COG,$$

$$\because \angle DAE = \angle OCG,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle COG,$$

$$\therefore \frac{AE}{CG} = \frac{DE}{OG},$$

$$\therefore AE \cdot OG = DE \cdot CG,$$

$$\text{在 } \triangle AOH \text{ 和 } \triangle COG \text{ 中, } \begin{cases} \angle AOH = \angle COG \\ AO = CO \\ \angle OAH = \angle OCG \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOH \cong \triangle COG \text{ (SAS)},$$

$$\therefore OH = OG,$$

$$\therefore OG = \frac{1}{2}HG,$$

$$\therefore AE \cdot \frac{1}{2}HG = DE \cdot CG,$$

$$\therefore HG \cdot AE = 2DE \cdot CG.$$

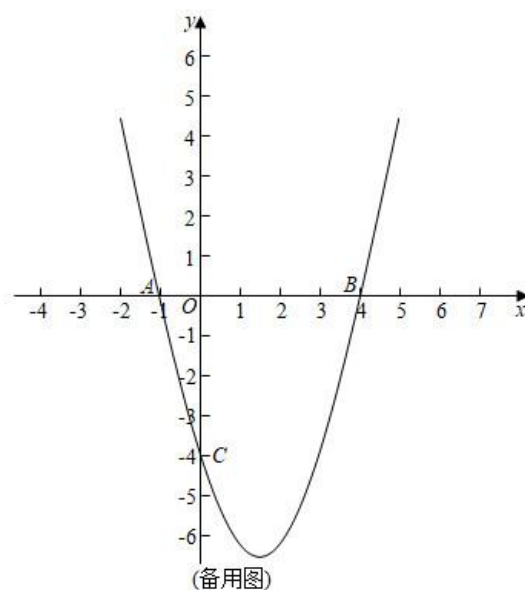
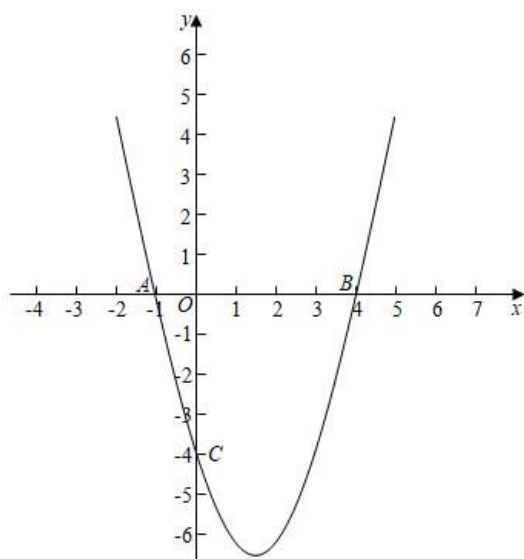
【点评】 此题主要考查了菱形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，直角三角形的性质，同角的余角相等，判断出 $\angle DHO = \angle BAO$ 是解本题的关键.

24. (12 分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 4$ 经过点 $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 点 D 是该抛物线上一点, 且在第四象限内, 连结 AC 、 BC 、 CD 、 BD .

(1) 求抛物线的函数解析式, 并写出对称轴;

(2) 当 $S_{\triangle BCD} = 4S_{\triangle AOC}$ 时, 求点 D 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 如果点 E 是 x 轴上的一点, 点 F 是抛物线上一点, 当点 A 、 D 、 E 、 F 为顶点的四边形是平行四边形, 请直接写出点 E 的坐标.



【分析】(1) 设抛物线的解析式为 $y = a(x+1)(x-4) = ax^2 - 3ax - 4a$, 根据 $-4a = -4$, 可得 $a = 1$, 由此即可解决问题.

(2) 如图 1 中, 设 $D(m, m^2 - 3m - 4)$, 连接 OD . 根据 $S_{\triangle BCD} = S_{\triangle OCD} + S_{\triangle OBD} - S_{\triangle OBC} = 4S_{\triangle AOC}$, 构建方程求出 m 即可解决问题.

(3) 分两种情形: 如图 2 中, 当 AE 为平行四边形的边时, 根据 $DF = AE = 1$, 求解即可. 如图 3 中, 当 AE, DF 是平行四边形的对角线时, 根据点 F 的纵坐标为 6, 求出点 F 的坐标, 再根据中点坐标公式求解即可.

【解答】解: (1) $\because y = ax^2 + bx - 4$ 经过点 $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$,
 $\therefore$ 可以假设抛物线的解析式为 $y = a(x+1)(x-4) = ax^2 - 3ax - 4a$,
 $\therefore -4a = -4$,
 $\therefore a = 1$,
 $\therefore$ 抛物线的解析式为: $y = x^2 - 3x - 4$, 对称轴 $x = \frac{3}{2}$.

(2) 如图 1 中, 设 $D(m, m^2 - 3m - 4)$, 连接 OD .

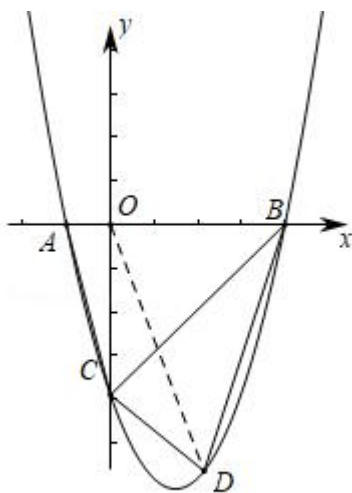


图1

$$\because S_{\triangle BCD} = S_{\triangle OCD} + S_{\triangle OBD} - S_{\triangle OBC} = 4S_{\triangle AOC},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times (-m^2 + 3m + 4) + \frac{1}{2} \times 4 \times m - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 4$$

$$\text{整理得: } m^2 - 4m + 4 = 0,$$

$$\text{解得 } m = 2,$$

$$\therefore D(2, -6).$$

(3) 如图2中, 当 AE 为平行四边形的边时,

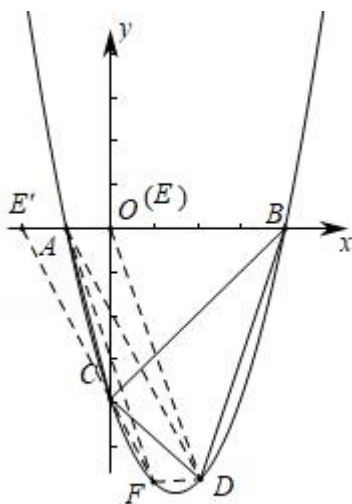


图2

$$\because DF \parallel AE, D(2, -6)$$

$$\therefore F(1, -6),$$

$$\therefore DF = 1,$$

$$\therefore AE = 1,$$

$\therefore E(0, 0)$, 或 $E'(-2, 0)$.

如图 3 中, 当 AE, DF 是平行四边形的对角线时,

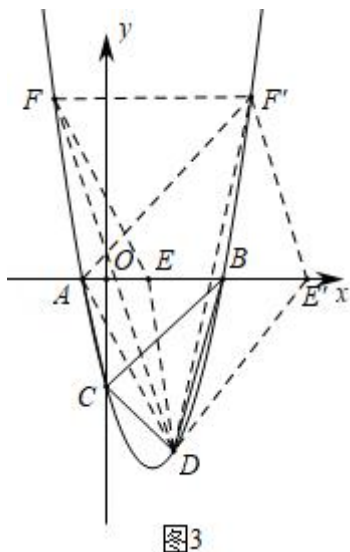


图3

$\because$ 点 D 与点 F 到 x 轴的距离相等,

$\therefore$ 点 F 的纵坐标为 6,

当 $y = 6$ 时, $6 = x^2 - 3x - 4$,

解得 $x = -2$ 或 5 ,

$\therefore F(-2, 6)$ 或 $(5, 6)$,

设 $E(n, 0)$, 则有 $\frac{-1+n}{2} = \frac{-2+2}{2}$ 或 $\frac{-1+n}{2} = \frac{5+2}{2}$,

解得 $n = 1$ 或 8 ,

$\therefore E(1, 0)$ 或 $(8, 0)$,

, 综上所述, 满足条件的点 E 的坐标为 $(0, 0)$ 或 $(1, 0)$ 或 $(8, 0)$ 或 $(-2, 0)$.

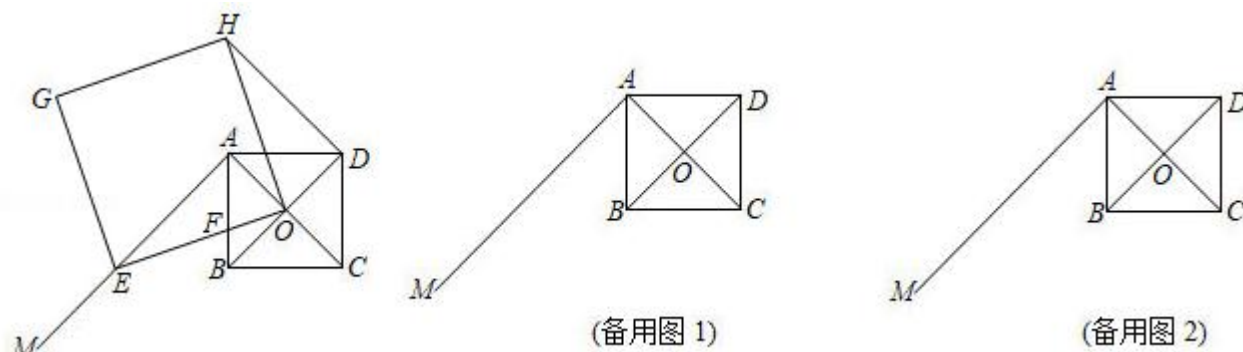
【点评】 本题属于二次函数综合题, 考查了待定系数法, 平行四边形的判定和性质, 三角形的面积等知识, 解题的关键是学会利用参数构建方程解决问题, 学会用分类讨论的思想思考问题, 属于中考压轴题.

25. (14 分) 如图, 已知正方形 $ABCD$ 中, $BC = 4$, AC, BD 相交于点 O , 过点 A 作射线 $AM \perp AC$, 点 E 是射线 AM 上一点, 联结 OE 交 AB 边于点 F . 以 OE 为一边, 作正方形 $OEGH$, 且点 A 在正方形 $OEGH$ 的内部, 联结 DH .

(1) 求证: $\triangle HDO \cong \triangle EAO$;

(2) 设 $BF = x$, 正方形 $OEGH$ 的边长为 y , 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出定义域;

(3) 联结 AG , 当 $\triangle AEG$ 是等腰三角形时, 求 BF 的长.



【分析】(1) 根据正方形的性质得到 $\angle AOD = 90^\circ$, $AO = OD$, $\angle EOH = 90^\circ$, $OE = OH$, 由全等三角形的性质即可得到结论;

(2) 如图 1, 过 O 作 $ON \perp AB$ 于 N , 根据等腰直角三角形的性质得到 $AN = BN = ON = \frac{1}{2}AB = 2$, 根据勾股定理得到 $OF = \sqrt{FN^2 + ON^2} = \sqrt{(2-x)^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$, 根据平行线分线段成比例定理即可得到结论;

(3) ①当 $AE = EG$ 时, $\triangle AEG$ 是等腰三角形, ②当 $AE = AG$ 时, $\triangle AEG$ 是等腰三角形, 如图 2, 过 A 作 $AP \perp EG$ 于 P ③当 $GE = AG$ 时, $\triangle AEG$ 是等腰三角形, 如图 3, 过 G 作 $GQ \perp AE$ 于 Q , 根据相似三角形的性质或全等三角形的性质即可得到结论.

【解答】解: (1) $\because$ 在正方形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$,

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ , AO = OD ,$$

$\because$ 四边形 $OEGH$ 是正方形,

$$\therefore \angle EOH = 90^\circ , OE = OH ,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle DOH ,$$

$$\therefore \triangle HDO \cong \triangle EAO (SAS);$$

(2) 如图 1, 过 O 作 $ON \perp AB$ 于 N ,

$$\text{则 } AN = BN = ON = \frac{1}{2}AB = 2 ,$$

$$\because BF = x ,$$

$$\therefore AF = 4 - x ,$$

$$\therefore FN = 2 - x ,$$

$$\therefore OF = \sqrt{FN^2 + ON^2} = \sqrt{(2-x)^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 8} ,$$

$$\therefore EF = y - \sqrt{x^2 - 4x + 8} ,$$

$$\because AM \perp AC ,$$

$$\therefore AE \parallel OB,$$

$$\therefore \frac{BF}{AF} = \frac{OF}{EF},$$

$$\therefore \frac{x}{4-x} = \frac{\sqrt{x^2-4x+8}}{y-\sqrt{x^2-4x+8}},$$

$$\therefore y = \frac{4\sqrt{x^2-4x+8}}{x} (0 < x \leq 4);$$

(3) ①当 $AE = EG$ 时, $\triangle AEG$ 是等腰三角形,

则 $AE = OE$,

$$\therefore \angle EAO = 90^\circ,$$

$\therefore$ 这种情况不存在;

②当 $AE = AG$ 时, $\triangle AEG$ 是等腰三角形,

如图 2, 过 A 作 $AP \perp EG$ 于 P ,

则 $AP \parallel OE$,

$$\therefore \angle PAE = \angle AEO,$$

$$\therefore \triangle APE \sim \triangle EAO,$$

$$\therefore \frac{PE}{OA} = \frac{AE}{OE},$$

$$\therefore AE = AG,$$

$$\therefore PE = \frac{1}{2}y = \frac{4\sqrt{x^2-4x+8}}{2x}, \quad AE = \sqrt{y^2-8} = \frac{2\sqrt{2}(4-x)}{x},$$

$$\therefore \frac{\frac{4\sqrt{x^2-4x+8}}{2x}}{2\sqrt{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}(4-x)}{x}}{\frac{4\sqrt{x^2-4x+8}}{x}},$$

解得: $x = 2$,

②当 $GE = AG$ 时, $\triangle AEG$ 是等腰三角形,

如图 3, 过 G 作 $GQ \perp AE$ 于 Q ,

$$\therefore \angle GQE = \angle EAO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GEQ + \angle EGQ = \angle GEQ + \angle AEO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EGQ = \angle AEO,$$

$$\therefore GE = OE,$$

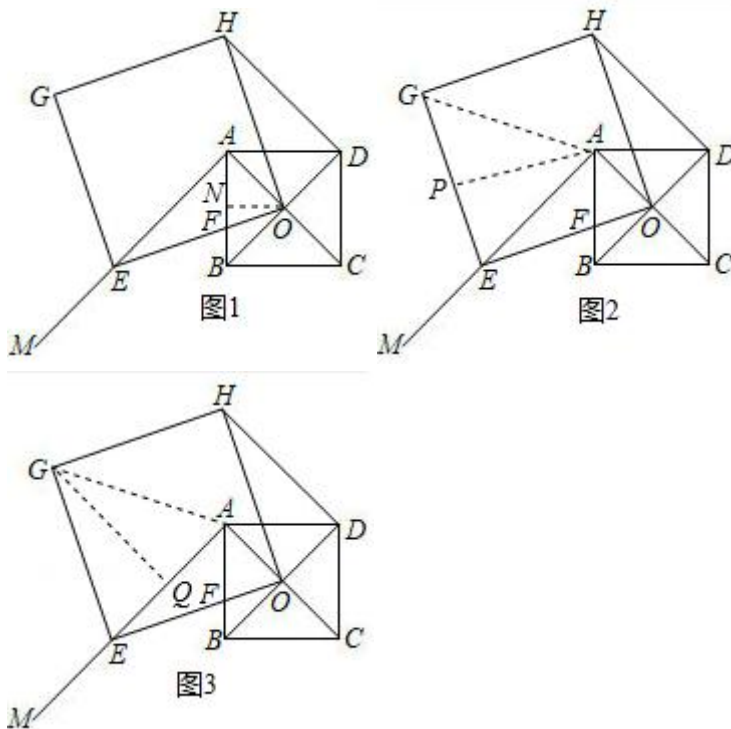
$$\therefore \triangle EGQ \cong \triangle OEA \text{ (AAS)},$$

$$\therefore EQ = AO = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore AE = 2EQ = 4\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}(4-x)}{x},$$

$$\therefore x = \frac{4}{3},$$

$$\therefore BF = 2 \text{ 或 } \frac{4}{3}.$$



【点评】 本题考查了四边形的综合题，正方形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，勾股定理，正确的作出辅助线构造全等三角形是解题的关键．